Exercice 1.
c.f. livre.

Exercice 2.
c.f. livre.

Exercice 3.
c.f. livre.

Exercice 4.
c.f. livre.

Exercice 5.
c.f. livre.

Exercice 6.

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n-1)}(z_0+h)-f^{(n-1)}(z_0)}{h} &= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\frac{\int_\gamma \left(\frac{f(z)}{(z-(z_0+h))^n}-\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\right)\mathrm{d}z}{h} \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{h}\frac{(z-z_0)^n-(z-(z_0+h))^n}{(z-(z_0+h))^n(z-z_0)^n}\;dz \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{h}{h}\frac{(z-z_0)^{n-1}+\ldots+(z-(z_0+h))^{n-1}}{(z-(z_0+h))^n(z-z_0)^n}\;dz,
\end{aligned}$$

où on a utilisé $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ pour la dernière égalité.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(z_0+h)-f^{(n-1)}(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{(z-z_0)^{n-1}+\ldots+(z-(z_0+h))^{n-1}}{(z-(z_0+h))^n(z-z_0)^n}\;dz \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\;dz.
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que la fonction $(z,h)\mapsto \frac{(z-z_0)^{n-1}+\ldots+(z-(z_0+h))^{n-1}}{(z-(z_0+h))^n(z-z_0)^n}$ était continue, et donc uniformément continue sur un compact, ce qui nous permet de permuter limite et intégrale.
Noter que, par le corollaire du théorème de Cauchy, le valeur de

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\;dz$$

ne dépend pas du choix de la courbe γ. On conclut donc que, pour toute courbe simple fermée et régulière $\gamma\subset D$, on a

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Exercice 7.
On montre par récurrence que

$$f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}\ \forall n\geq 1.$$

Ainsi, pour tout z_0 tel que $B_R(z_0)\subset D$ et tout $z\in B_R(z_0)$,

$$\log(z)=\log(z_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z_0^{-n}(z-z_0)^n.$$