

**Exercice 1.**

On a

$$f(x) = \int_0^1 F_1(tx)x_1 + F_2(tx)x_2 + F_3(tx)x_3 \, dt,$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \int_0^1 tx_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(tx) + tx_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(tx) + tx_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(tx) + F_1(tx) \, dt.$$

De plus, puisque  $\text{rot}(F) = 0$ ,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \int_0^1 tx_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(tx) + tx_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(tx) + tx_3 \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(tx) + F_1(tx) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tF_1(tx)) \, dt \\ &= F_1(x). \end{aligned}$$

On montre de manière similaire que

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = F_2(x) \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = F_3(x).$$

**Exercice 2.**

On a

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f \, ds &= \int_0^1 du \int_0^1 dv \, f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_{u_i}^{u_i + \frac{1}{N}} du \int_{v_j}^{v_j + \frac{1}{N}} dv \, f(\sigma(u, v)) \left\| \overrightarrow{Q_1 Q_2} \wedge \overrightarrow{Q_1 Q_3} \right\| \\ &= \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{N} \frac{1}{N} f(P_{i+1/2, j+1/2}) \left\| \overrightarrow{Q_1 Q_2} \wedge \overrightarrow{Q_1 Q_3} \right\| \\ &= \sum_{i,j=1}^N f(P_{i+1/2, j+1/2}) \underbrace{\left\| \overrightarrow{P_{i,j} P_{i+1,j}} \wedge \overrightarrow{P_{i,j} P_{i,j+1}} \right\|}_{\text{aire du petit parallélogramme}}. \end{aligned}$$

**Exercice 3.**

Puisque  $f$  est continue en  $z_0$ , on a que, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que si  $|z - z_0| < \delta(\epsilon)$  alors  $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ . En particulier, il existe  $\tilde{\delta}$  tel que  $|f(z)| < |f(z_0)| + 1$  pour tout  $z$  tel que  $|z - z_0| < \tilde{\delta}$ .

Similairement, puisque  $g$  est continue en  $z_0$ , on a que, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\gamma(\epsilon) > 0$  tel que si  $|z - z_0| < \gamma(\epsilon)$  alors  $|g(z) - g(z_0)| < \epsilon$ .

Soit  $\epsilon > 0$  fixé. On a

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| &= |f(z)(g(z) - g(z_0)) + g(z_0)(f(z) - f(z_0))| \\ &\leq |f(z)||g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)||f(z) - f(z_0)| \end{aligned}$$

Puisque  $f, g$  sont continues en  $z_0$ , il existe

- $\delta_1 > 0$  tel que si  $|z - z_0| < \delta_1$ , alors  $|f(z) - f(z_0)| < 1$ , et donc  $|f(z)| < |f(z_0)| + 1$ ;
- $\delta_2 > 0$  tel que si  $|z - z_0| < \delta_2$ , alors  $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2|g(z_0)| + 1}$ ;
- $\delta_3 > 0$  tel que si  $|z - z_0| < \delta_3$ , alors  $|g(z) - g(z_0)| < \frac{\epsilon}{2|f(z_0)| + 2}$ .

Posons  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . Pour tout  $z$  tel que  $|z - z_0| < \delta$ , on obtient

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| &< (|f(z_0)| + 1) \frac{\epsilon}{2|f(z_0)| + 2} + |g(z_0)| \frac{\epsilon}{2|g(z_0)| + 1} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

#### Exercice 4.

- Supposons tout d'abord que  $f = u + iv$  est continue en  $z_0 = x_0 + iy_0$  et montrons que  $u$  et  $v$  sont continues en  $(x_0, y_0)$ .  
Soit  $\epsilon > 0$ . Puisque  $f$  est continue,  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tel que  $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ . En réécrivant  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  et en notant que  $|(x, y) - (x_0, y_0)| = |z - z_0|$ , on obtient,  $\forall (x, y) : |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ ,

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| \leq |u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)| = |f(z) - f(z_0)| < \epsilon,$$

et donc  $u$  est continue. De la même façon, on montre que  $v$  est continue.

- Supposons maintenant que  $u$  et  $v$  sont continues en  $(x_0, y_0)$  et montrons que  $f$  est continue en  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . Puisque  $u$  et  $v$  sont continues en  $(x_0, y_0)$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta \Rightarrow |u(x, y) - u(x_0, y_0)|, |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}.$$

Pour tout  $z$  tel que  $|z - z_0| = |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| < \delta$ , on a alors:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)| \\ &= \sqrt{(u(x, y) - u(x_0, y_0))^2 + (v(x, y) - v(x_0, y_0))^2} \\ &< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

et donc  $f$  est continue.

#### Exercice 5.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(z_0 + h) - (fg)(z_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(z_0 + h) - f(z_0 + h)g(z_0) + f(z_0 + h)g(z_0) - (fg)(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + h) \frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} g(z_0) \\ &= f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0). \end{aligned}$$

(Notez qu'on a utilisé le fait que, puisque  $f$  est holomorphe en  $z_0$ , elle est continue en  $z_0$ .)

#### Exercice 6.

c.f. livre.