

Exercice 1.

c.f. livre

Exercice 2.

c.f. livre

Exercice 3.

On numérote les faces du parallélépipède de la façon suivante:

$$\Sigma_1 := \{(x_1, b_1, x_3) : a_1 \leq x_1 \leq a_2, c_1 \leq x_3 \leq c_2\};$$

$$\Sigma_2 := \{(x_1, x_2, c_2) : a_1 \leq x_1 \leq a_2, b_1 \leq x_2 \leq b_2\};$$

$$\Sigma_3 := \{(x_1, b_2, x_3) : a_1 \leq x_1 \leq a_2, c_1 \leq x_3 \leq c_2\};$$

$$\Sigma_4 := \{(x_1, x_2, c_1) : a_1 \leq x_1 \leq a_2, b_1 \leq x_2 \leq b_2\};$$

$$\Sigma_5 := \{(a_1, x_2, x_3) : b_1 \leq x_2 \leq b_2, c_1 \leq x_3 \leq c_2\};$$

$$\Sigma_6 := \{(a_2, x_2, x_3) : b_1 \leq x_2 \leq b_2, c_1 \leq x_3 \leq c_2\};$$

On a

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ &= \int_{c_1}^{c_2} dx_2 \int_{b_1}^{b_2} dx_2 (f(a_2, x_2, x_3) - f(a_1, x_2, x_3)). \end{aligned}$$

D'autre part, $\nu_1 = 0$ sur $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, $\nu_1 = -1$ sur Σ_5 et $\nu_1 = 1$ sur Σ_6 . Donc

$$\iint_{\partial\Omega} f \nu_1 ds = \iint_{\Sigma_6} f ds - \iint_{\Sigma_5} f ds.$$

Paramétrisation de Σ_6 :

$$\sigma_6(u, v) = (a_2, u, v), \quad b_1 \leq u \leq b_2, \quad c_1 \leq v \leq c_2.$$

On a alors $\frac{\partial \sigma_6}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma_6}{\partial v} = (0, 1, 0) \wedge (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$. (Noter que dans ce cas là, $\nu = \frac{\partial \sigma_6}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma_6}{\partial v}$.) D'où

$$\iint_{\Sigma_6} f ds = \int_{b_1}^{b_2} du \int_{c_1}^{c_2} dv f(a_2, u, v).$$

Paramétrisation de Σ_5 :

$$\sigma_5(u, v) = (a_1, u, v), \quad b_1 \leq u \leq b_2, \quad c_1 \leq v \leq c_2.$$

On a alors $\frac{\partial \sigma_5}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma_5}{\partial v} = (0, 1, 0) \wedge (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$, et donc $\left\| \frac{\partial \sigma_5}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma_5}{\partial v} \right\| = 1$. (Noter que dans cecas là, $\nu = -\frac{\partial \sigma_5}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma_5}{\partial v}$.) D'où

$$\iint_{\Sigma_5} f ds = \int_{b_1}^{b_2} du \int_{c_1}^{c_2} dv f(a_1, u, v).$$

Finalement, on conclut

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} f \nu_1 ds &= \iint_{\Sigma_6} f ds - \iint_{\Sigma_5} f ds \\ &= \int_{b_1}^{b_2} du \int_{c_1}^{c_2} dv f(a_2, u, v) - \int_{b_1}^{b_2} du \int_{c_1}^{c_2} dv f(a_1, u, v) \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1}. \end{aligned}$$