EPFL – Automne 2023	Pr. M. Picasso
Analyse III – PH	**Corrigé**
Série 4	12 octobre 2023

Exercice 1.
c.f. livre

Exercice 2.
c.f. livre

Exercice 3.
c.f. livre

Exercice 4.
c.f. livre

Exercice 5.
Une sphère de rayon R et de centre O peut être paramétrée par

$$\sigma(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u) \qquad u \in [0,\pi],\ v \in [0,2\pi].$$

Un vecteur normal à Σ est donc

$$\begin{aligned}\partial_u\sigma \times \partial_v\sigma &= (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, -R\sin u) \wedge (-R\sin u\sin v, R\sin u\cos v, 0)\\ &= R^2\left(\sin^2 u\cos v, \sin^2 u\sin v, \sin u\cos u\right).\end{aligned}$$

Ce vecteur normal sur la sphère est bien dirigé vers l'extérieur et $||\partial_u\sigma \times \partial_v\sigma|| = R^2\sin(u)$. La normale extérieure unité est donc donnée par

$$\nu = (\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u)\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma -p\nu_1\ ds &= \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho g R\cos u\sin u\cos v R^2\sin u\ dv\ du\\ &= \int_0^\pi \rho g R\cos u\sin u R^2\sin u\int_0^{2\pi}\cos v\ dv\,\mathrm{d}u\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma -p\nu_2\ ds &= \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho g R\cos u\sin u\sin v R^2\sin u\ dv\ du\\ &= \int_0^\pi \rho g R\cos u\sin u R^2\sin u\int_0^{2\pi}\sin v\ dv\,\mathrm{d}u\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma -p\nu_3\ ds &= \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho g R\cos u\cos u R^2\sin u\ dv\ du\\ &= \int_0^\pi 2\pi\rho g R^3\cos^2 u\sin u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{4\pi}{3}R^3\rho g.\end{aligned}$$

D'où

$$F = \left(0, 0, \frac{4\pi}{3}R^3\rho g\right).$$

et comme $\dfrac{4\pi}{3}R^3$ est le volume de la boule, on retrouve bien le théorème d'Archimède.