EPFL – Automne 2024	Pr. M. Picasso
Analyse III – PH	**Corrigé**
Série 11	28 novembre 2024

Exercice 1.
Comme z_0 est repsectivement un zéro d'ordre k et l de p et q, on peut écrire

$$p(z) = (z - z_0)^k P(z), \qquad q(z) = (z - z_0)^l Q(z),$$

avec P, Q des fonctions holomorphes telles que $P(z_0), Q(z_0) \neq 0$. Ainsi, en posant $F(z) = P(z)/Q(z)$, on a que F est holomorphe en z_0, $F(z_0) \neq 0$ et

$$f(z) = (z - z_0)^{k-l} F(z).$$

1. Si $k \geq l$, alors la fonction $z \mapsto (z - z_0)^{k-l}$ est holomorph. La fonction f est donc le produit de deux fonctions holomorphes en z_0. Par conséquente, z_0 est un point régulier de f.

2. Si $l > k$, alors
$$f(z)(z - z_0)^{l-k} = F(z),$$
qui est holomorphe et ne s'annule pas en z_0. Par conséquent, z_0 est un pôle dôrdre $l - k$ de f.

Exercice 2.
Par l'exercice 1., z_0 est un pôle d'ordre 1 de f. Le résidu est donc donné par

$$\begin{aligned}
\text{Rés}_{z_0}(f) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z)}{z - z_0}} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}} \\
&= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.
c.f. livre.

Exercice 4.
c.f. livre.

Exercice 5.
c.f. livre.

Exercice 6.
c.f. livre.

Exercice 7.
c.f. livre.