Exercice 1.
On considère la suite des sommes partielles

$$F_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z).$$

Pour montrer la convergence uniforme, on montre que la suite est de Cauchy pour la norme du sup, i.e, que $\forall \epsilon > 0,\ \exists M$ tel que $\forall N_1 \geq N_2 \geq M$

$$\sup_{z \in D} |F_{N_1}(z) - F_{N_2}(z)| < \epsilon.$$

Soit donc $\epsilon > 0$ fixé.
Noter que la suite

$$B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$$

est de Cauchy, puisqu'elle converge. Il existe donc $M \geq 0$ tel que $|B_{N_1} - B_{N_2}| < \epsilon\ \forall N_1 \geq N_2 \geq M$. Ainsi

$$|F_{N_1}(z) - F_{N_2}(z)| = |\sum_{n=N_2+1}^{N_1} a_n(z)| \leq \sum_{n=N_2+1}^{N_1} b_n = |B_{N_1} - B_{N_2}| < \epsilon,$$

ce qui montre le résultat.

Exercice 2.
c.f. livre.

Exercice 3.
c.f. livre.

Exercice 4.
c.f. livre.

Exercice 5.
c.f. livre.

Exercice 6.
c.f. livre.

Exercice 7.
c.f. livre.

Exercice 8.
c.f. livre.