Exercices — Série 6 : supplément

Quelques formules utiles:

(I) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$ (II) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \arctan\left[f(x)\right] + C$

(III) $\displaystyle\int \left[f(x)\right]^\alpha \cdot f'(x)\,dx = \frac{\left[f(x)\right]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \forall \alpha \neq -1$ (IV) $\displaystyle\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$

(V) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes:

(a) $\displaystyle\int \cos x \sin x\,dx$

(b) $\displaystyle\int (1+x^5)^3 \cdot x^4\,dx$

(c) $\displaystyle\int (1+2x^2)^2\,dx$

(d) $\displaystyle\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin(2x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3+6x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,dx$ (développer $\cosh x$ puis faire apparaître un terme de la forme $\dfrac{f'}{1+f^2}$)

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x}}\,dx$ (poser $u = \sqrt{1+x}$)

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$ (compléter le carré ou poser $u = x-3$)

Exercice 2. En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales - définies ou indéfinies - suivantes:

(a) $\displaystyle\int_1^3 \ln x \, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 x \ln x \, dx$

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}} \, dx$ (poser d'abord $u = \sqrt{x}$.)

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

(e) $\displaystyle\int x\sqrt{x-1} \, dx$

(f) $\displaystyle\int x \arctan(2x) \, dx$

(g) $\displaystyle\int \ln^3 x \, dx$

(h) $\displaystyle\int \tan^3(x) \cos(x) \, dx$

Exercice 3. Calculer les intégrales - définies ou indéfinie - suivantes:

(a) $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{1+x}}{x} \, dx$ [Méthode de substitution]

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x(1+x)} \, dx$ [Méthode de substitution]

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^8} \, dx$ (réfléchir avant de calculer !)

(d) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{1+x^2} \, dx$

(e) $\displaystyle\int x^2 \cos(x) \, dx$ [Utiliser une double intégration par parties.]

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^5 \, dx$

Utiliser la formule récursive vue au cours ou autre possibilité :

écrire $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ puis faire le changement de variable $z = \cos x$.

(g) $\displaystyle\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \cos(\sqrt{x}) \, dx$ [Méthode de substitution puis intégrer par parties.]

(h) $\displaystyle\int \sin(x) e^x dx$ [Utiliser une double intégration par parties.]

Exercice 4.

Calculer les intégrales impropres suivantes:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x \, dx$ [Intégrer par parties.]

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$ [Méthode de substitution puis intégrer par parties.]

(e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sin(\ln x)\ dx$ [Méthode de substitution puis utiliser le résultat (h) de l'exercice précédent.]

Exercice 5.

Calculer le développement limité d'ordre 7 autour de 0 de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\, dt.$$

[Utiliser le théorème fondamental du calcul intégral qui affirme que $f'(x) = \ln(1+x^2)$ puis intégrer chaque terme du développement limité de $f'(x)$.]