

Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

# Dérivées d'ordres supérieurs

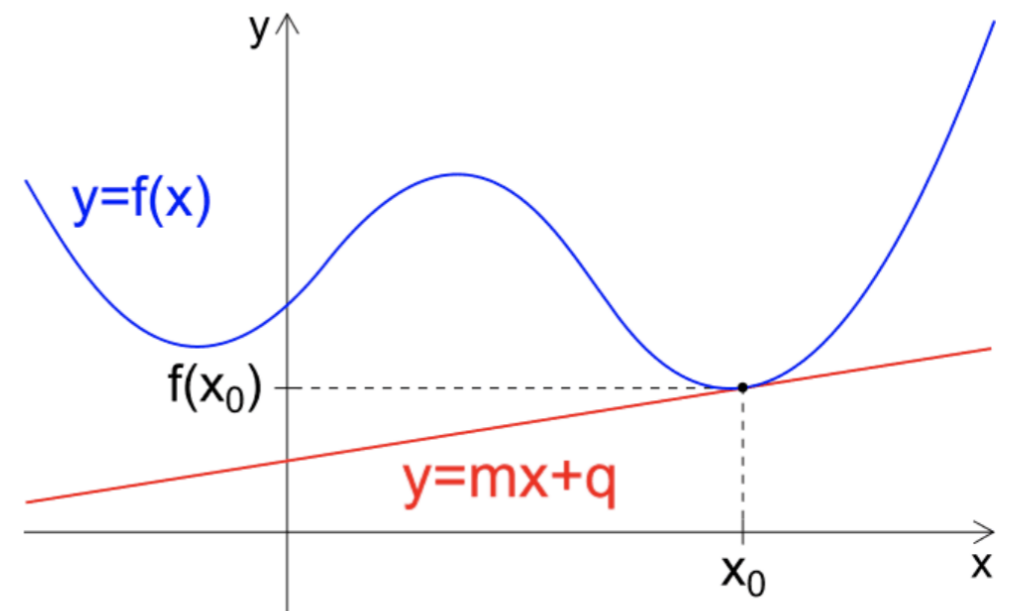
Philippe Chabloz

# Dérivée seconde

- ❖ Le processus de différenciation peut être appliqué *plusieurs fois de suite*, conduisant notamment à la dérivée seconde  $f''$  de la fonction  $f$ , qui n'est que la dérivée de la dérivée.
- ❖ La dérivée seconde a souvent une *interprétation physique utile*. Par exemple, si  $f(x)$  est la position d'un objet au temps  $x$ , alors  $f'(x)$  est sa vitesse au temps  $x$  et  $f''(x)$  est son accélération au temps  $x$ .

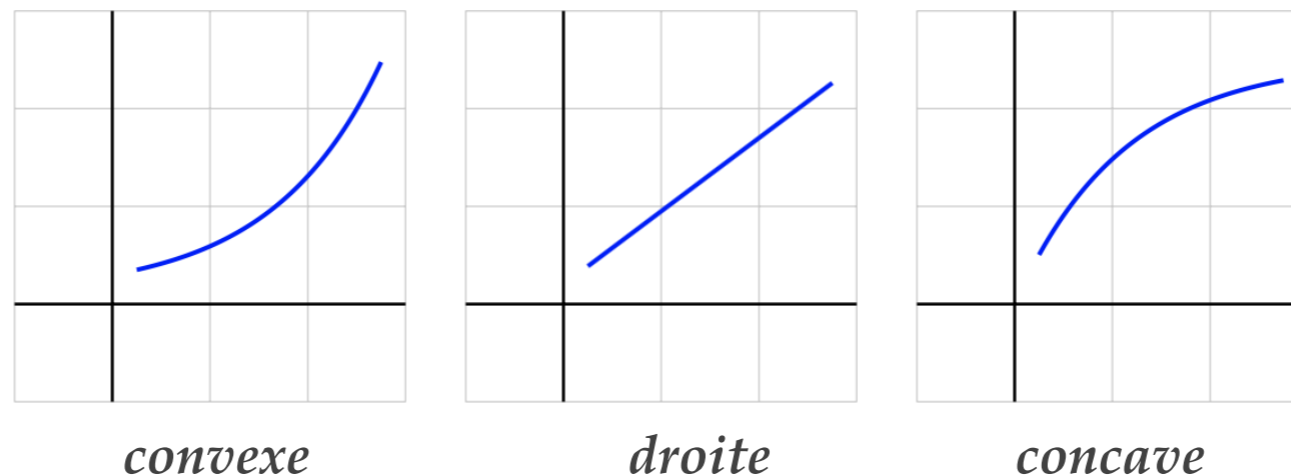
On définit la **dérivée seconde de la fonction continue et dérivable  $f$  dans le point  $x_0$**  comme la limite pour  $h$  qui tend vers 0 du *double* du coefficient directeur de la parabole *sécante*, qui passe par les points  $(x_0 - h, f(x_0 - h))$ ,  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  :

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$



# Interpretation géométrique

- ❖ Il est naturel de se demander si une fonction continue est croissante ou décroissante, mais aussi de se demander *comment* une fonction est croissante ou décroissante.
- ❖ Considérons les trois fonctions continue et croissantes ci-dessous : l'une est croissante à un taux croissant, l'autre est croissante à un taux constant et la troisième est croissante à un taux décroissant, respectivement :



## Fonction convexe ou concave ?

Soit  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  un intervalle :

1. Si  $f''(x) > 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est **convexe** sur  $]a, b[$ .
2. Si  $f''(x) < 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ , alors  $f$  est **concave** sur  $]a, b[$ .
3. Si  $f''$  change de signe en  $x_0$  alors  $f$  a un **point d'inflexion** en  $x_0$ . Il est **nécessaire mais pas suffisant** que  $f''(x_0) = 0$ .

Exemple : la fonction  $f(x) = x^4$  est convexe sur tout  $\mathbb{R}$  bien que  $f''(0) = 0$ .

# Point d'inflexion

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable au voisinage de  $x_0$ . Alors un  $x_0$  est un point d'inflexion si

1.  $f''(x)$  change signe en  $x_0$ 
  - si  $f''(x_0)$  existe ceci implique que  $f''(x_0) = 0$
  - mais  $f''(x_0)$  peut très bien ne pas exister !! (exemple :  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  ci-après)
2. Le graphe de  $f$  croise sa tangente en  $x_0$
3. La courbure du graphe de  $f$  passe de concave à convexe ou inversement.

# Trouver les extrema d'une fonction

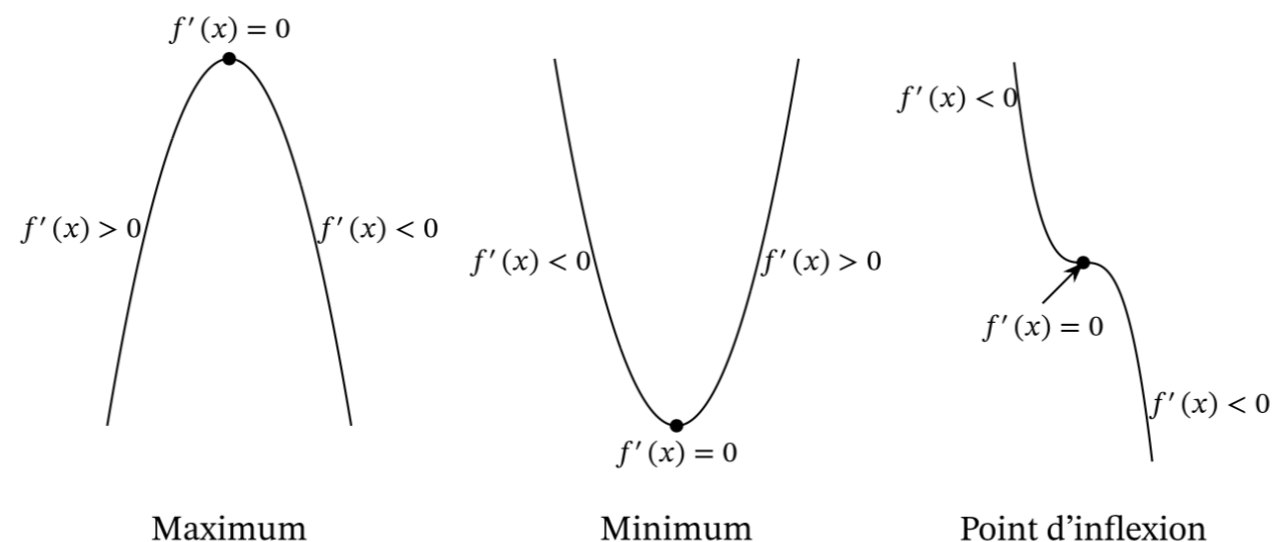
Une des premières motivations du calcul différentiel fut de déterminer le maxima ou minima d'une fonction.

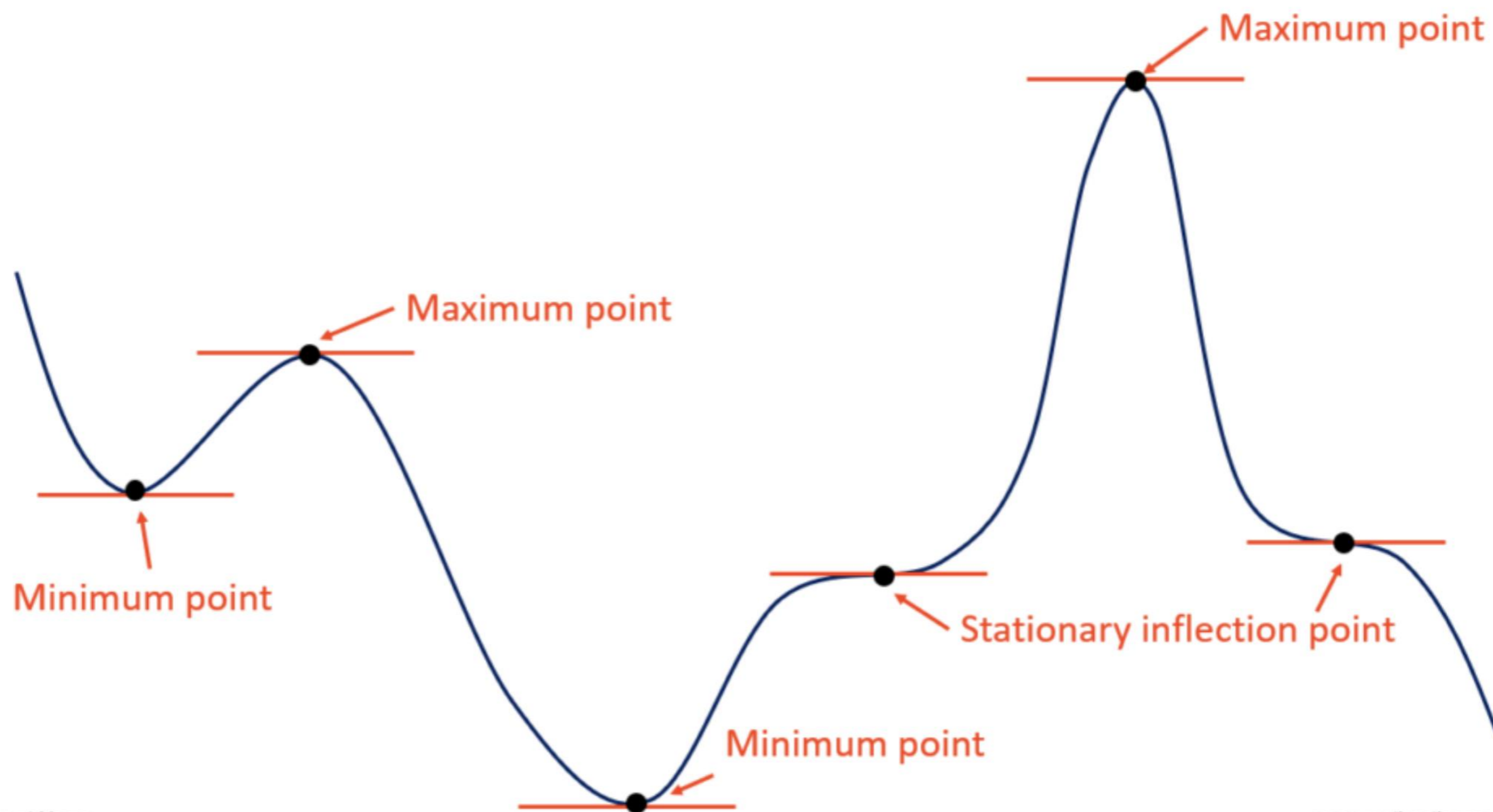
- ❖ L'étude des extrema (maximum et minimum, locaux ou globaux) passe par la recherche des zéros de la dérivée première, appelés **points stationnaires (ou critiques) de  $f$** .
- ❖ Un point stationnaire n'est pas nécessairement un point d'extremum. On peut cependant, sous les hypothèses supplémentaires suivantes, affirmer qu'un point stationnaire est un point d'extremum :

si  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) < 0$  alors le point  $x_0$  est un **maximum local**,

si  $f'(x_0) = 0$  et  $f''(x_0) > 0$  alors le point  $x_0$  est un **minimum local**.

si  $f'(x_0) = 0$  et  $f''$  change de signe en  $x_0$  alors le point  $x_0$  est un **point d'inflexion et donc un plat**.





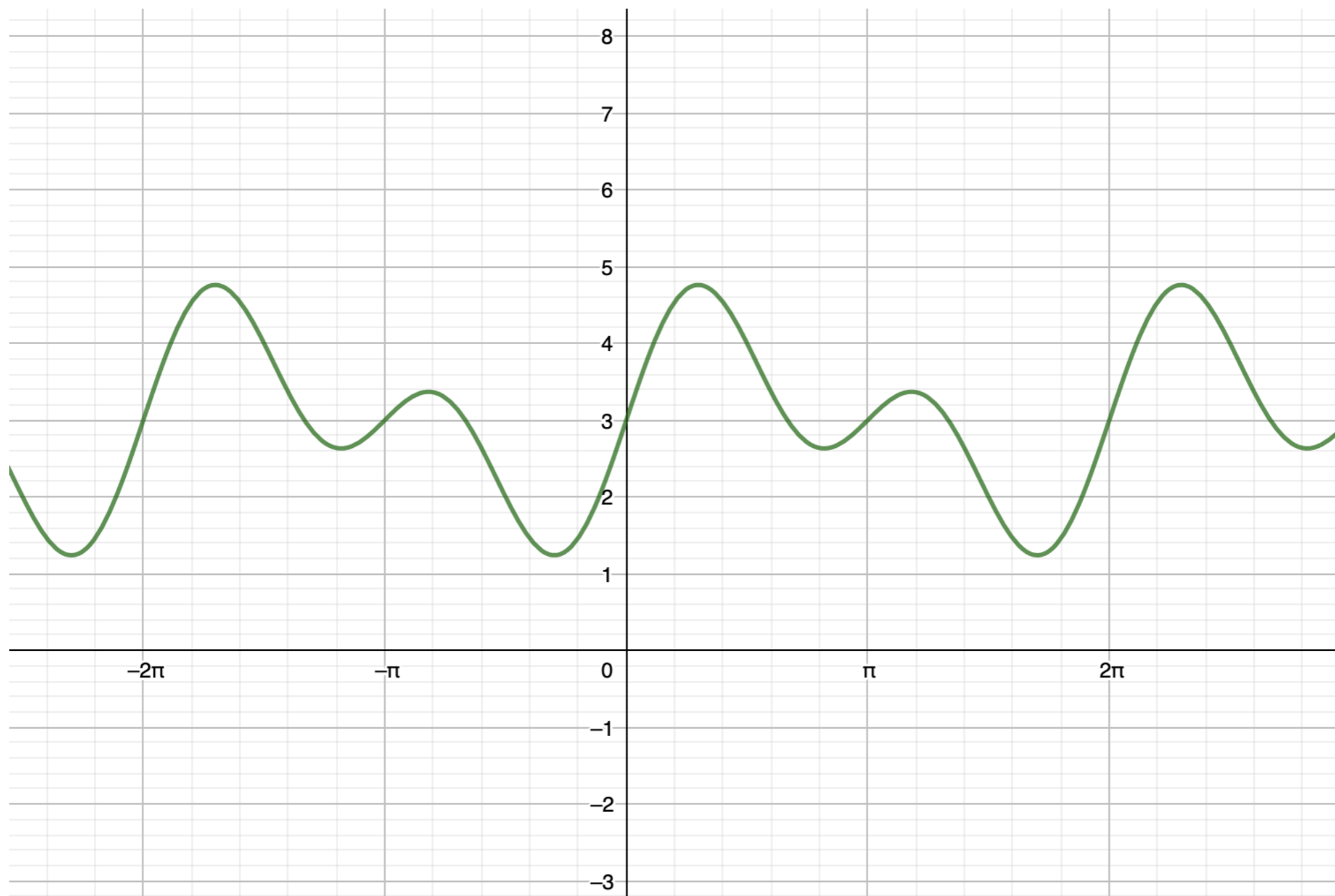
# Exemple

Déterminons les points de maximum et minimum locaux de la fonction donnée par

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x.$$

# Exercice

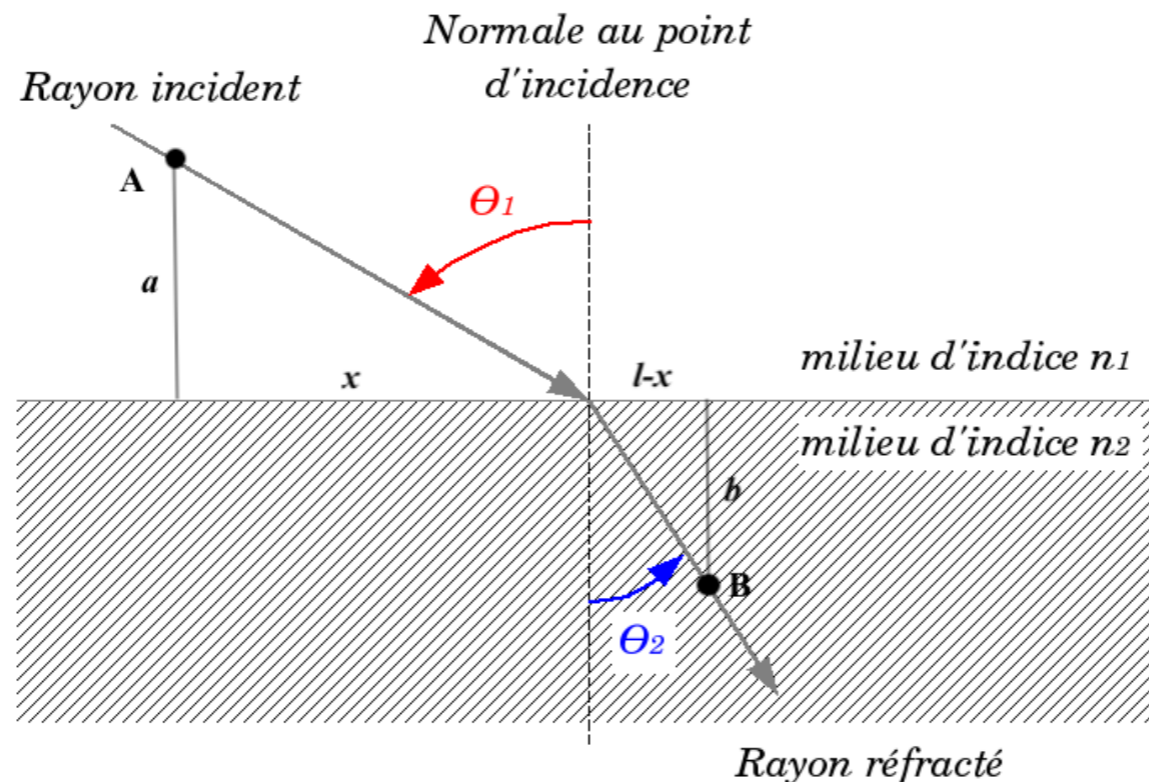
Pouvez-vous identifier l'un des points d'inflexion sur le graphe de la fonction  $f(x) = \sin(2x) + \sin(x) + 3$  ?



# Exercice (loi de Snellius)

En 1657, Fermat essaie d'expliquer la loi de Snellius décrivant la réfraction de la lumière au passage d'un milieu où sa vitesse est  $v_1$  dans un autre où sa vitesse est  $v_2$ . Soient deux points  $A$  et  $B$  donnés. Il s'agit de déterminer les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  tels que la lumière aille le plus rapidement possible de  $A$  à  $B$ .

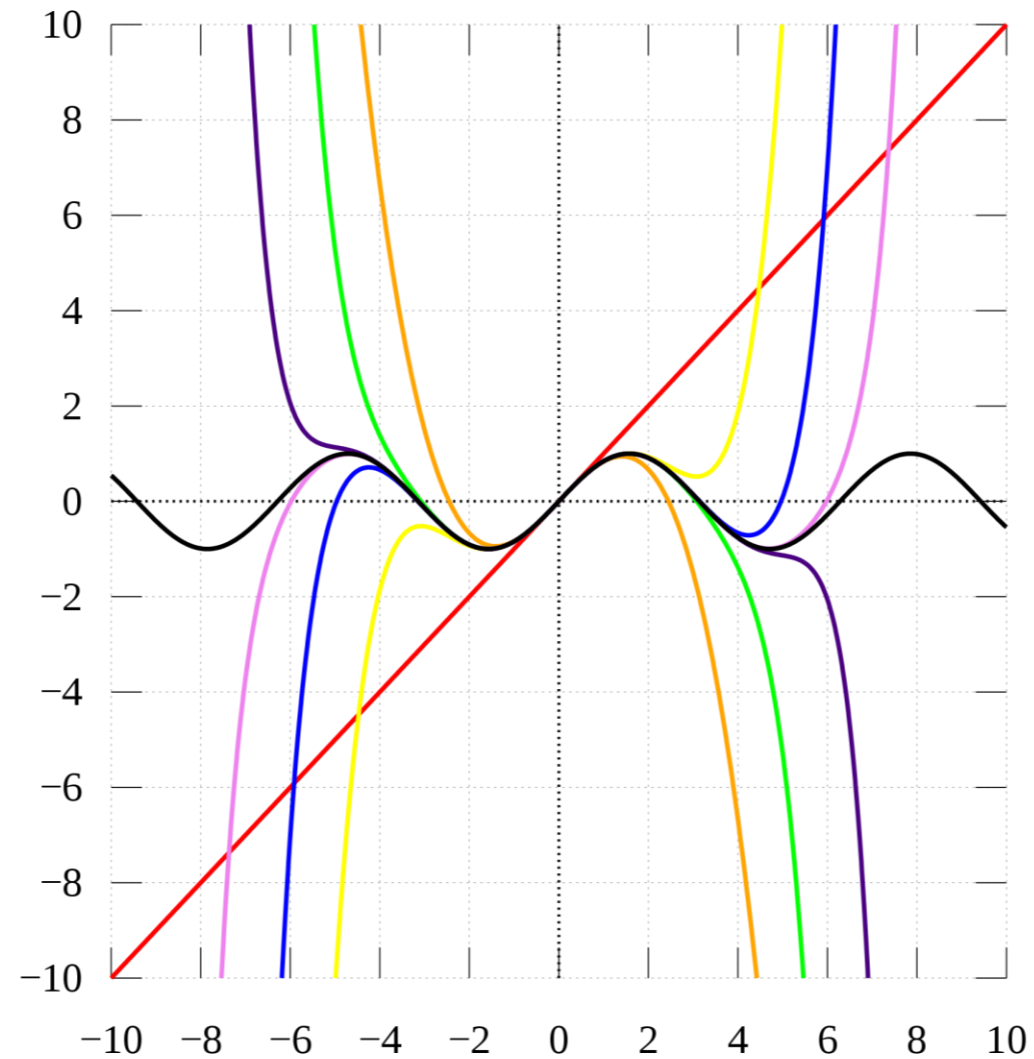
- Trouver la distance  $d(x)$  entre  $A$  et  $B$  en fonction de  $x$  et le temps  $t(x)$  en utilisant le fait que la vitesse est égale à la distance divisée par le temps.
- Calculez la dérivée de  $t(x)$  afin de trouver une condition à imposer sur les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .



# Dérivée d'ordre supérieur

- ❖ La dérivée d'une fonction dérivable  $f$  est aussi une fonction. On peut donc la dériver à son tour. Nous avons défini la **dérivée seconde de la fonction  $f$**  comme la dérivée de la dérivée.
- ❖ La dérivée de la dérivée seconde, si elle existe, est appelée **dérivée troisième de  $f$**  et on la note  $f'''$  ou  $f^{(3)}$ .
- ❖ La dérivée de la dérivée troisième, si elle existe, est appelée **dérivée quatrième de  $f$**  et on la note  $f^{(iv)}$  ou  $f^{(4)}$ .
- ❖ La dérivée de la dérivée quatrième, si elle existe, est appelée **dérivée cinquième de  $f$**  et on la note  $f^{(v)}$  ou  $f^{(5)}$ .
- ❖ On peut continuer ainsi et définir la **dérivée d'ordre  $n$**  (où  $n \in \mathbb{N}$ ) comme la fonction que l'on obtient en dérivant la dérivée d'ordre  $n - 1$ , si cette dérivée existe :

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}$$



*Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1*

# Polynômes de Taylor

Philippe Chabloz

# Dérivées d'ordre supérieur et série de Taylor

Nous avons déjà rencontré dans ce cours des sommes infinies (séries) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$



*Brook Taylor*  
1685 - 1731

Vers 1715 Brook Taylor trouve une méthode qui fournit des sommes infinies. Aujourd'hui, ces séries sont connues sous son nom.

# Approximation linéaire

- ❖ Soit  $f$  une fonction continue dans un intervalle réel  $I$  et dérivable en  $x_0 \in I$ . La tangente au graphe de  $f$  en  $x_0$  est la droite d'équation

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- ❖ Le polynôme  $T_1(x)$  est le seul polynôme de degré 1 vérifiant

$$\begin{cases} T_1(x_0) = f(x_0) \\ T_1'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

et il correspond à la *meilleure approximation linéaire* de  $f$  autour de  $x_0$  :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} \quad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

# Approximation quadratique

- ❖ Si  $f$  est deux fois dérivable en  $x_0$ , on peut chercher un polynôme  $T_2(x)$  de degré 2 vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} T_2(x_0) = f(x_0) \\ T_2'(x_0) = f'(x_0) \\ T_2''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

- ❖ Ce polynôme est égal à

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

et  $T_2(x)$  est la *meilleure approximation quadratique* de  $f$  autour de  $x_0$  :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}_{T_2(x)} \quad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

# Polynômes de Taylor

- ❖ Soit  $f$  une fonction dérivable  $n$  fois en  $x_0$ , son **polynôme de Taylor d'ordre  $n$  en  $x_0$** , noté  $T_n(x)$  ou  $T_n(f, x_0)(x)$ , est l'unique polynôme de degré  $n$  vérifiant les conditions

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

En  $x_0$  la fonction  $f$  et le polynôme  $T_n$  prennent la même valeur. Les deux fonctions prennent également la même valeur pour les  $n$  premières dérivées calculées en  $x_0$ . Le polynôme  $T_n(x)$  est en ce sens la *meilleure approximation d'ordre  $n$*  de  $f$  autour de  $x_0$ .

- ❖ Ce polynôme est égal à

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

qui s'écrit aussi, de manière plus compacte comme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

# Séries de Taylor

Soit  $f$  une fonction *infiniment dérivable* en un point  $x_0 \in \mathcal{D}_f$  (c-à-d  $f^{(n)}(x_0)$  existe pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ) alors la **série de Taylor de  $f$  en  $x_0$**  est la fonction définie par

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

- ❖ L'égalité dans la formule précédente (*car il s'agit bien d'une égalité*) est valable pour  $x$  dans un intervalle centré en  $x_0$  et donc de la forme

$$]x_0 - R, x_0 + R[.$$

Le nombre  $R$  est le rayon de convergence de la série de Taylor.

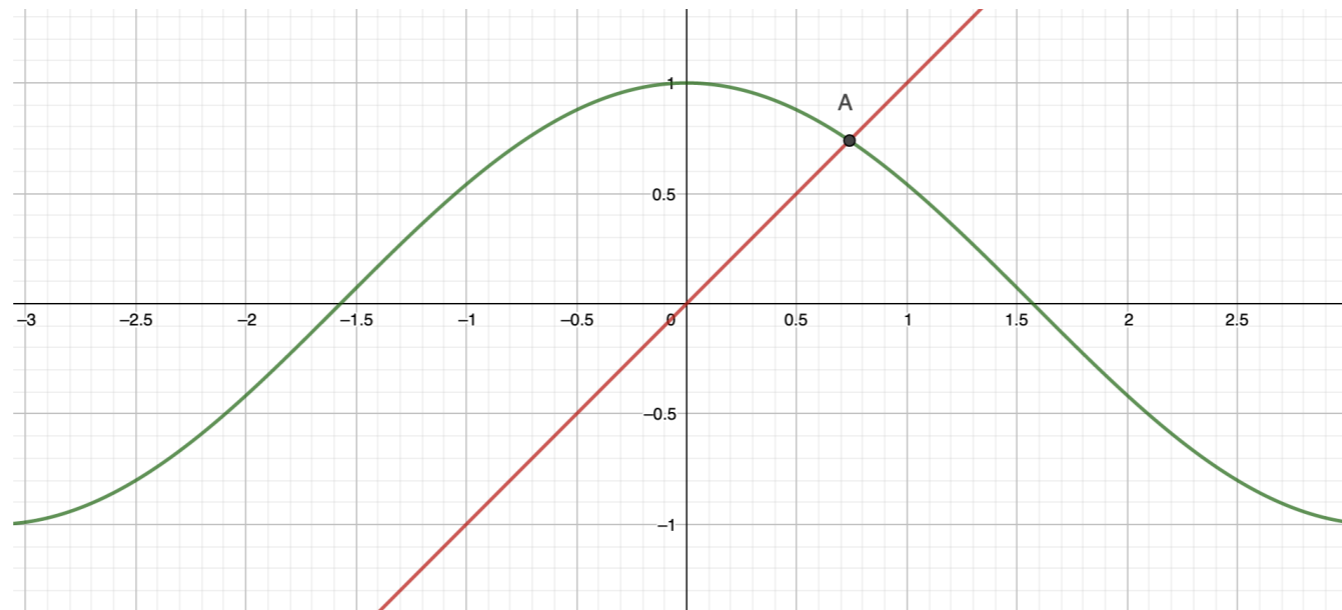
- ❖ Géométriquement, l'idée des séries de Taylor est d'approximer *au plus près* la fonction  $f$  en un point  $x_0$  par le biais de polynômes où les coefficients sont donnés par une expression contenant les valeurs de dérivées de  $f$  calculées en  $x_0$ .

# Exercice

Déterminer une solution approchée de l'équation

$$\cos(x) = x$$

en utilisant une approximation d'ordre deux de la fonction  $f(x) = \cos(x)$  autour de  $x_0 = 0$ .



# Notation de Landau

Si une fonction  $f(x)$  est négligeable devant une fonction  $g(x)$  au voisinage de  $x = a$ , on notera

$$f = o(g) \quad \text{pour } x \rightarrow a$$

Ceci revient à dire que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

## Exemples

Au voisinage de 0 on a

1.  $4x^3 = o(x^2)$  car si  $x$  tend vers 0 alors  $\frac{4x^3}{x^2} = 4x$  tend vers 0.
2.  $2x^2 - 5x^3 + 100x^4 = o(x)$
3.  $1 - \cos(x) = o(x)$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$  (règle de l'Hospital)

Au voisinage de l'infini on a

$$x^2 = o(x^3) \quad x^n = o(e^x) \quad \ln^a(x) = o(x^n) \quad 2x + 3x^3 = o(x^4)$$

- $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$
- $o(f) + o(f) = o(f)$
- $o(f) - o(f) = o(f) \quad \text{!!!!}$

# Développement limité

On dit que  $f(x)$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $x = a$  si on peut écrire

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) = o[(x - a)^n]$$

## Exemples

1.  $e^x = 1 + x + o(x)$  au voisinage de 0  $\rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{o(x)}{x}$  tend vers 1 par définition du  $o(x)$ .
2.  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots = x + o(x^2)$  au voisinage de 0  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$

Exercice : calculer la limite suivante en utilisant le développement limité du sinus et du cosinus en  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \cdot (1 - \cos x^2)}{x^6} =$$

# Exemple

Calculer la série de Taylor en l'origine de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

