

Calculus

Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Dérivées d'ordres supérieurs

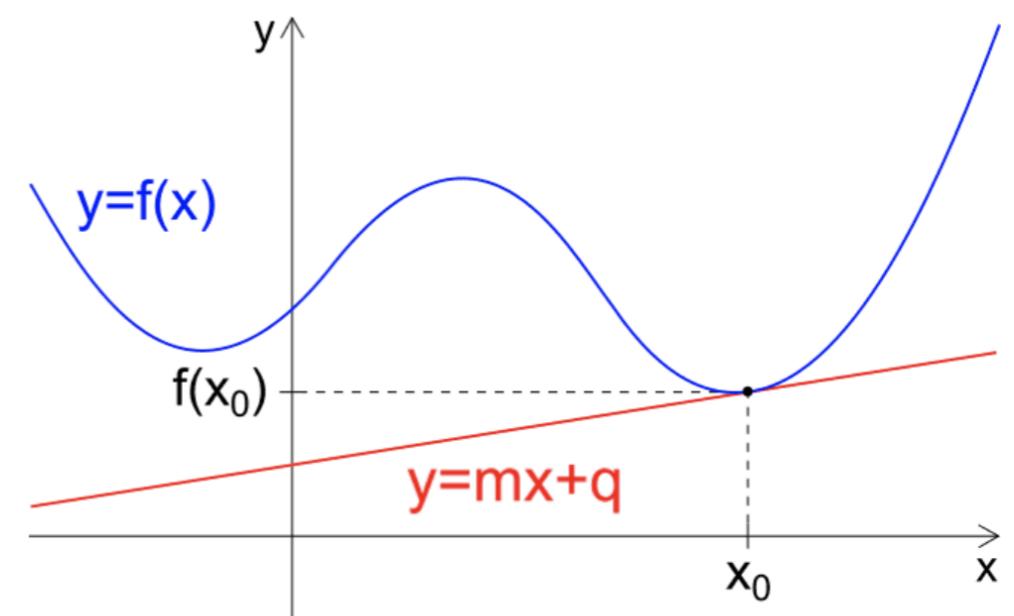
Philippe Chabloz

Dérivée seconde

- Le processus de différentiation peut être appliqué *plusieurs fois de suite*, conduisant notamment à la dérivée seconde f'' de la fonction f , qui n'est que la dérivée de la dérivée.
- La dérivée seconde a souvent une *interprétation physique utile*. Par exemple, si $f(x)$ est la position d'un objet au temps x , alors $f'(x)$ est sa vitesse au temps x et $f''(x)$ est son accélération au temps x .

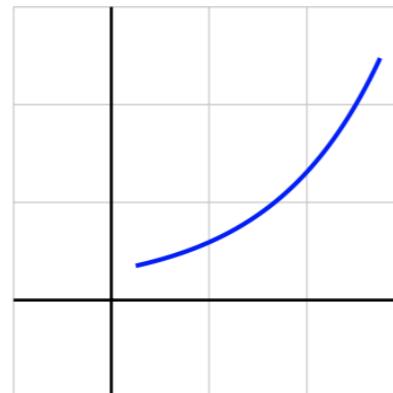
On définit la **dérivée seconde de la fonction continue et derivable f dans le point x_0** comme la limite pour h qui tend vers 0 du *double* du coefficient directeur de la parabole *sécante*, qui passe par les points $(x_0 - h, f(x_0 - h)), (x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$:

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

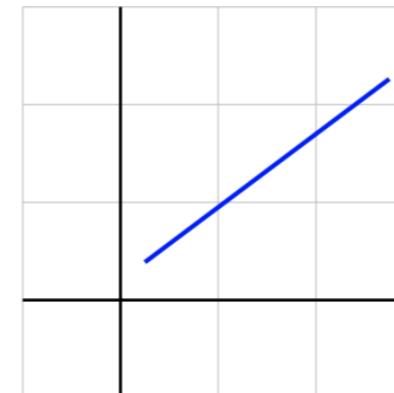


Interpretation géométrique

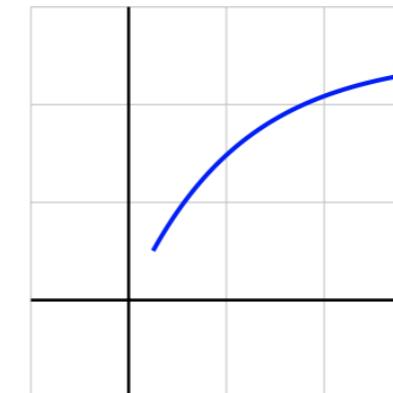
- Il est naturel de se demander si une fonction continue est croissante ou décroissante, mais aussi de se demander *comment* une fonction est croissante ou décroissante.
- Considérons les trois fonctions continues et croissantes ci-dessous : l'une est croissante à un taux croissant, l'autre est croissante à un taux constant et la troisième est croissante à un taux décroissant, respectivement :



convexe



droite



concave

Fonction convexe ou concave ?

Soit $]a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle :

- Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est **convexe** sur $]a, b[$.
- Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est **concave** sur $]a, b[$.
- Si f'' change de signe en x_0 alors f a un **point d'inflexion** en x_0 . Il est **nécessaire mais pas suffisant** que $f''(x_0) = 0$.

Exemple : la fonction $f(x) = x^4$ est convexe sur tout \mathbb{R} bien que $f''(0) = 0$.

Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable au voisinage de x_0 . Alors un x_0 est un point d'inflexion si

1. $f''(x)$ change signe en x_0
 - si $f''(x_0)$ existe ceci implique que $f''(x_0) = 0$
 - mais $f''(x_0)$ peut très bien ne pas exister !! (exemple : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ci-après)
2. Le graphe de f croise sa tangente en x_0
3. La courbure du graphe de f passe de concave à convexe ou inversement.

Trouver les extrema d'une fonction

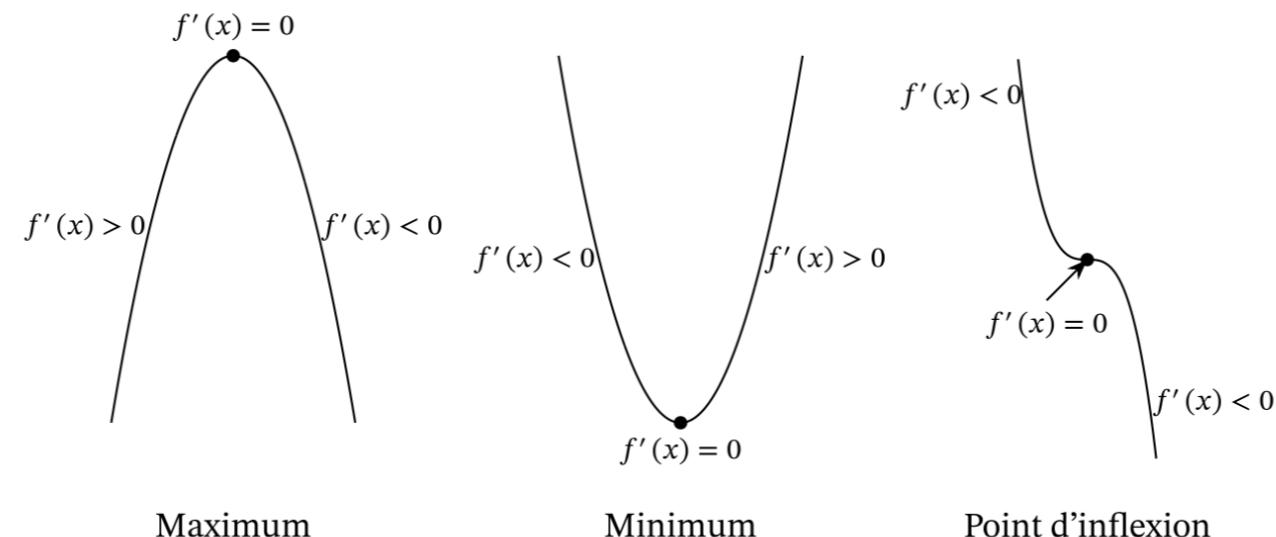
Une des premières motivations du calcul différentiel fut de déterminer le maxima ou minima d'une fonction.

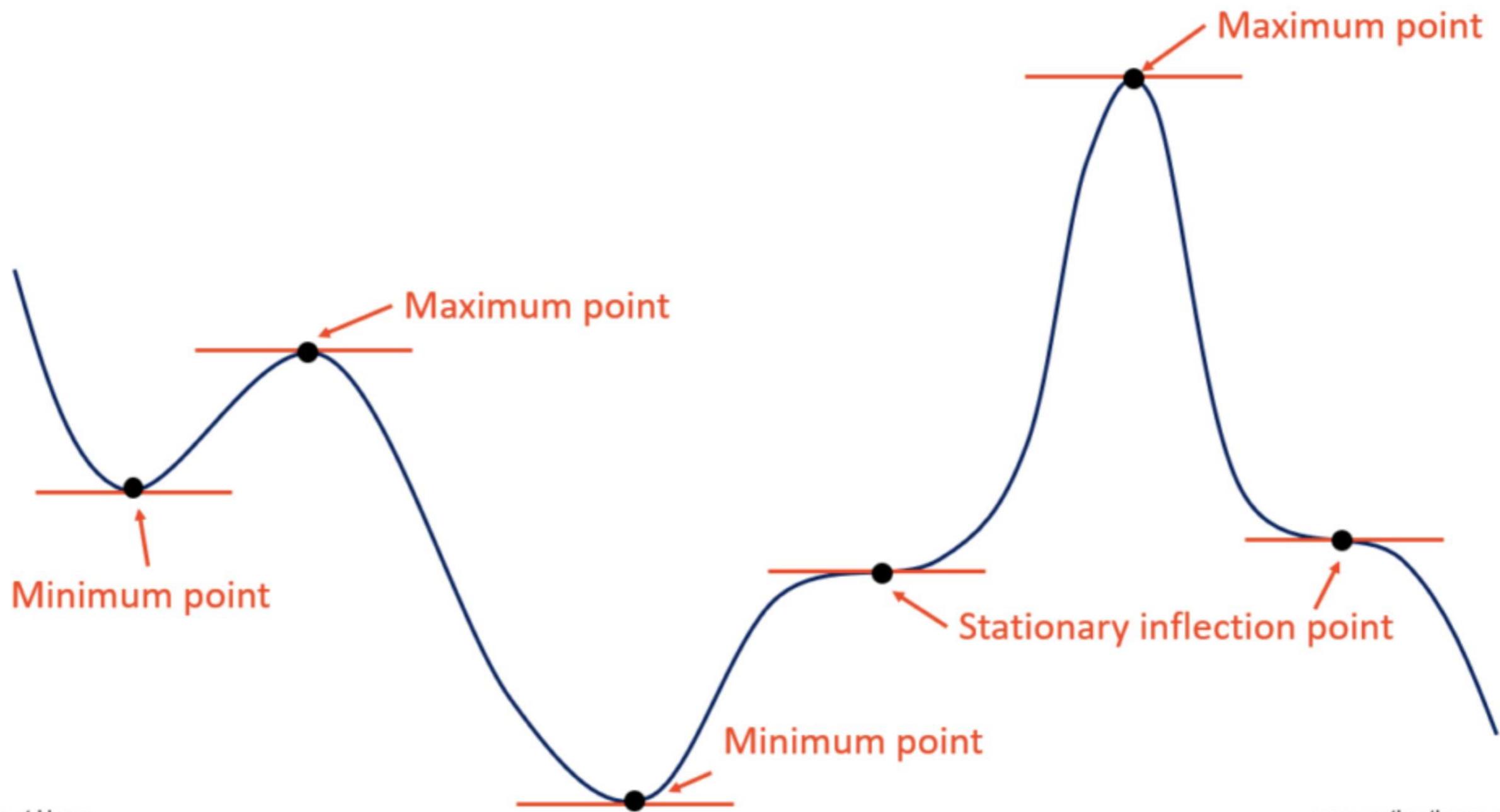
- ❖ L'étude des extrema (maximum et minimum, locaux ou globaux) passe par la recherche des zéros de la dérivée première, appelés **points stationnaires (ou critiques)** de f .
- ❖ Un point stationnaire n'est pas nécessairement un point d'extremum. On peut cependant, sous les hypothèses supplémentaires suivantes, affirmer qu'un point stationnaire est un point d'extremum :

si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$ alors le point x_0 est un **maximum local**,

si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ alors le point x_0 est un **minimum local**.

si $f'(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0 alors le point x_0 est un **point d'inflexion et donc un plat**.





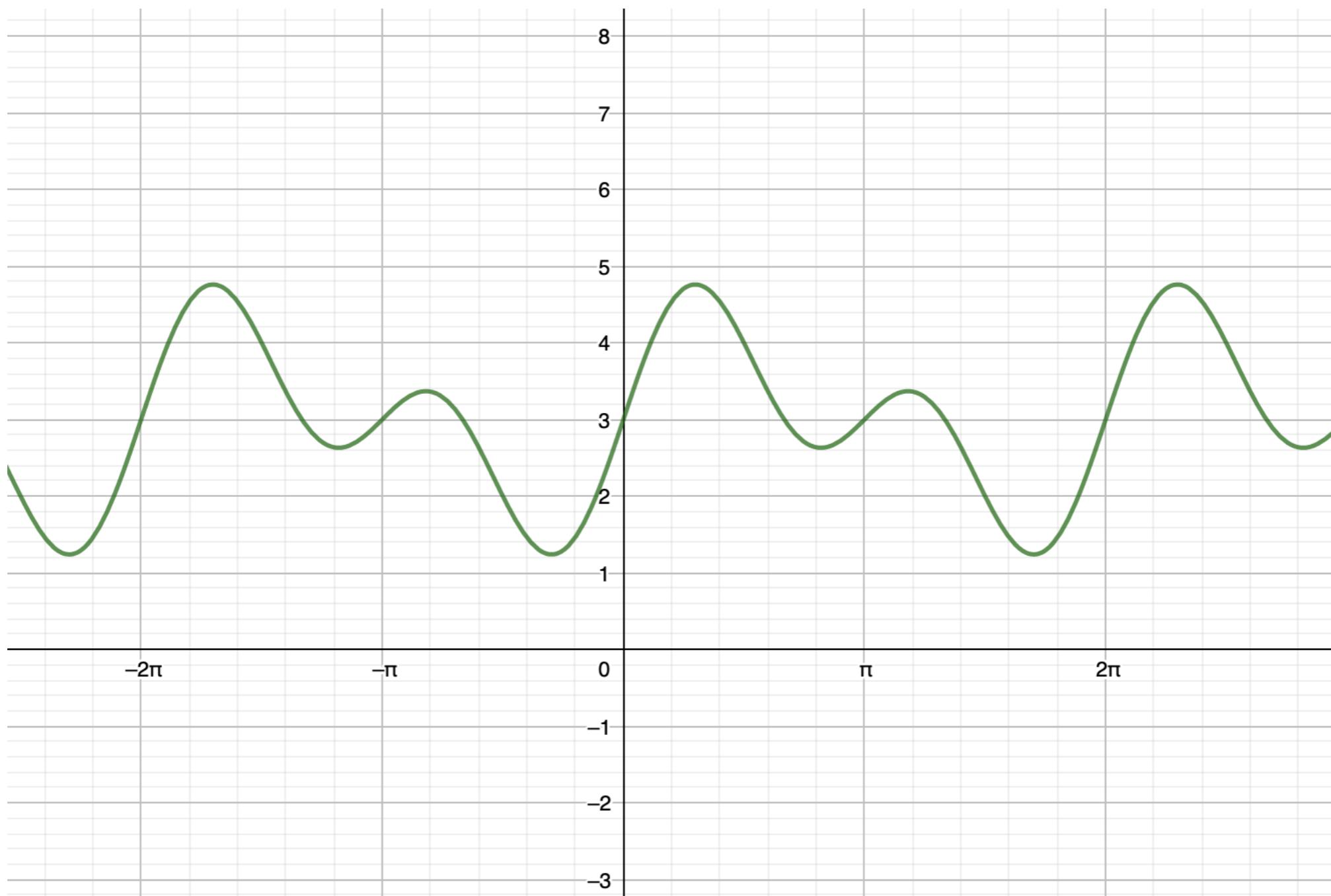
Exemple

Déterminons les points de maximum et minimum locaux de la fonction donnée par

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x.$$

Exercice

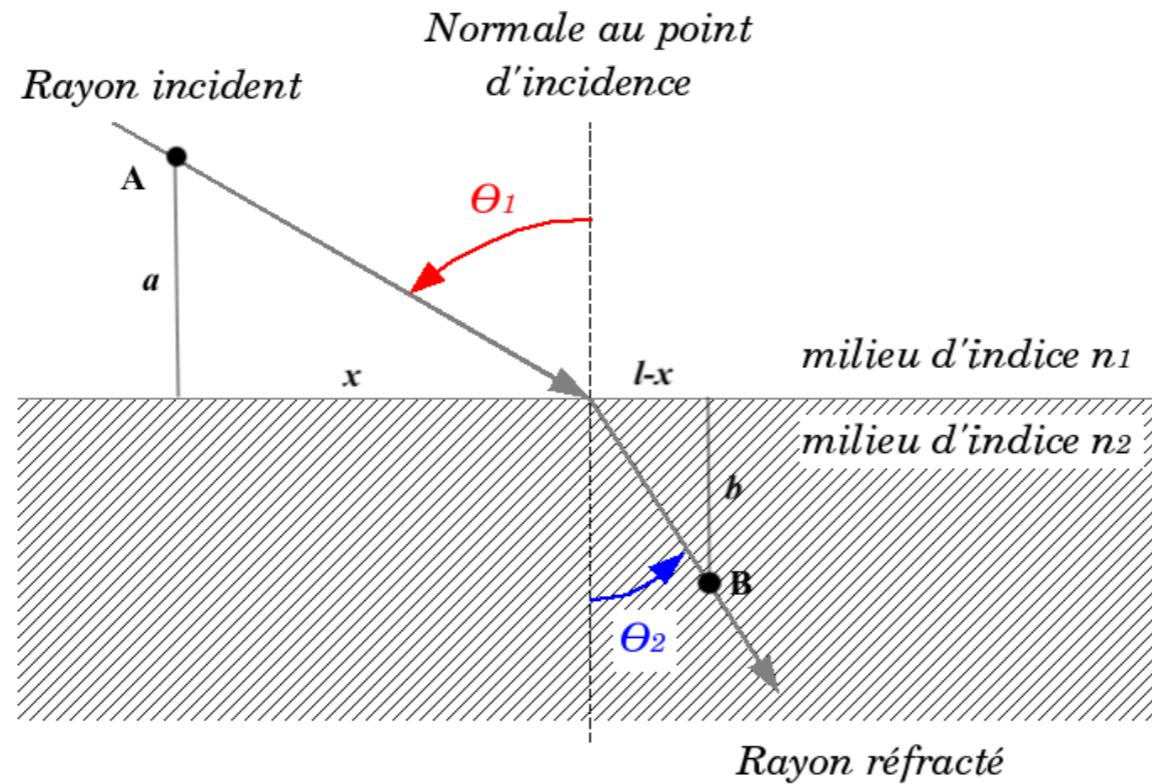
Pouvez-vous identifier l'un des points d'inflexion sur le graphe de la fonction $f(x) = \sin(2x) + \sin(x) + 3$?



Exercice (loi de Snellius)

En 1657, Fermat essaie d'expliquer la loi de Snellius décrivant la réfraction de la lumière au passage d'un milieu où sa vitesse est v_1 dans un autre où sa vitesse est v_2 . Soient deux points A et B donnés. Il s'agit de déterminer les angles θ_1 et θ_2 tels que la lumière aille le plus rapidement possible de A à B .

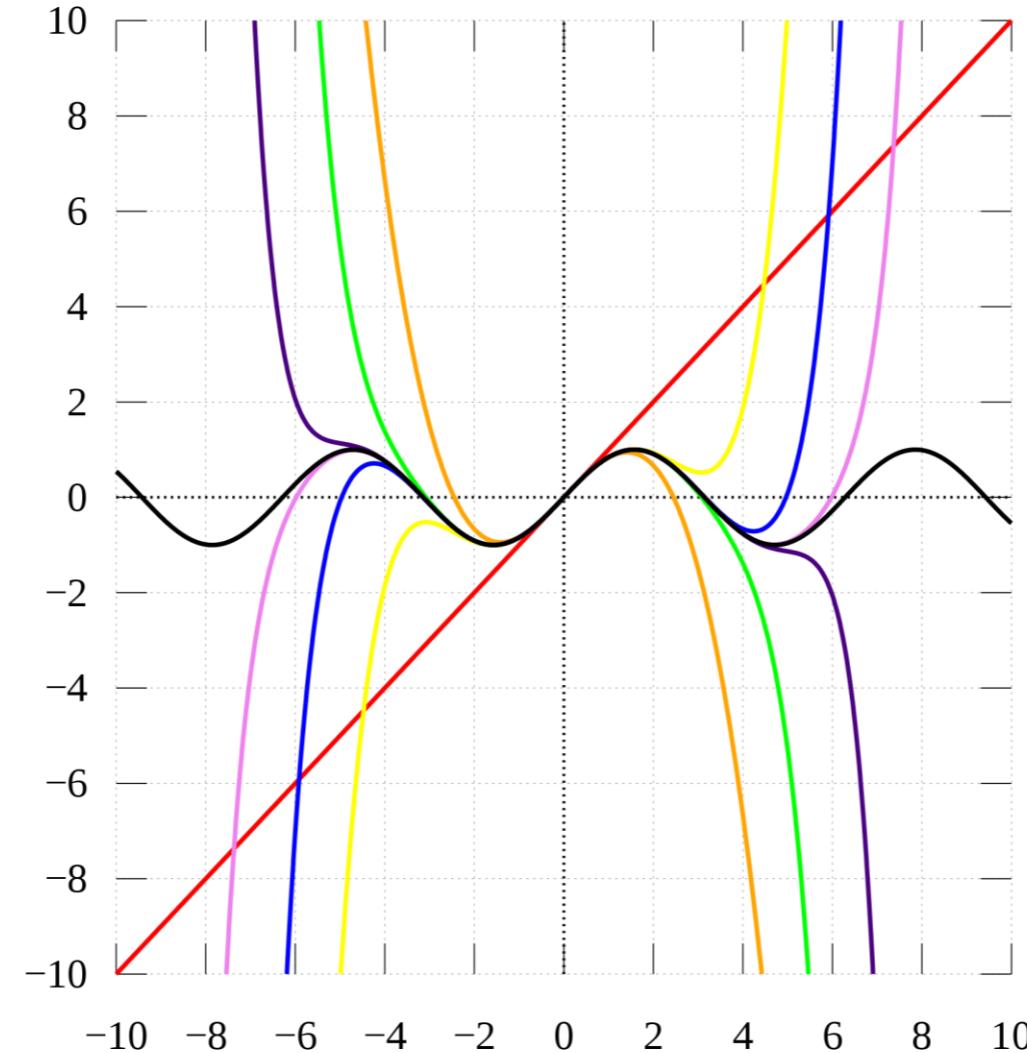
- Trouver la distance $d(x)$ entre A et B en fonction de x et le temps $t(x)$ en utilisant le fait que la vitesse est égale à la distance divisée par le temps.
- Calculez la dérivée de $t(x)$ afin de trouver une condition à imposer sur les angles θ_1 et θ_2 .



Dérivée d'ordre supérieur

- ❖ La dérivée d'une fonction derivable f est aussi une fonction. On peut donc la dériver à son tour. Nous avons défini la **dérivée seconde de la fonction f** comme la dérivée de la dérivée.
- ❖ La dérivée de la dérivée seconde, si elle existe, est appelle **dérivée troisième de f** et on la note f''' ou $f^{(3)}$.
- ❖ La dérivée de la dérivée troisième, si elle existe, est appelle **dérivée quatrième de f** et on la note $f^{(iv)}$ ou $f^{(4)}$.
- ❖ La dérivée de la dérivée quatrième, si elle existe, est appelle **dérivée cinquième de f** et on la note $f^{(v)}$ ou $f^{(5)}$.
- ❖ On peut continuer ainsi et définir la **dérivée d'ordre n** (où $n \in \mathbb{N}$) comme la fonction que l'on obtient en dérivant la dérivée d'ordre $n - 1$, si cette dérivée existe :

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}$$



Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Polynômes de Taylor

Philippe Chabloz

Dérivées d'ordre supérieur et série de Taylor

Nous avons déjà rencontré dans ce cours des sommes infinies (séries) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$



Brook Taylor
1685 - 1731

Vers 1715 Brook Taylor trouve une méthode qui fournit des sommes infinies. Aujourd'hui, ces séries sont connues sous son nom.

Approximation linéaire

- ❖ Soit f une fonction continue dans un intervalle réel I et dérivable en $x_0 \in I$. La tangente au graphe de f en x_0 est la droite d'équation

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- ❖ Le polynôme $T_1(x)$ est le seul polynôme de degré 1 vérifiant

$$\begin{cases} T_1(x_0) = f(x_0) \\ T'_1(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

et il correspond à la *meilleure approximation linéaire* de f autour de x_0 :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} \quad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

Approximation quadratique

- ❖ Si f est deux fois dérivable en x_0 , on peut chercher un polynôme $T_2(x)$ de degré 2 vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} T_2(x_0) = f(x_0) \\ T'_2(x_0) = f'(x_0) \\ T''_2(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

- ❖ Ce polynôme est égal à

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

et $T_2(x)$ est la *meilleure approximation quadratique* de f autour de x_0 :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}_{T_2(x)} \quad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

Polynômes de Taylor

- ❖ Soit f une fonction dérivable n fois en x_0 , son **polynôme de Taylor d'ordre n en x_0** , noté $T_n(x)$ ou $T_n(f, x_0)(x)$, est l'unique polynôme de degré n vérifiant les conditions

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

En x_0 la fonction f et le polynôme T_n prennent la même valeur. Les deux fonctions prennent également la même valeur pour les n premières dérivées calculées en x_0 . Le polynôme $T_n(x)$ est en ce sens la *meilleure approximation d'ordre n de f autour de x_0* .

- ❖ Ce polynôme est égal à

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

qui s'écrit aussi, de manière plus compacte comme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Séries de Taylor

Soit f une fonction *infiniment dérivable* en un point $x_0 \in \mathcal{D}_f$ (c-à-d $f^{(n)}(x_0)$ existe pour chaque $n \in \mathbb{N}$) alors la **série de Taylor de f en x_0** est la fonction définie par

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

- ❖ L'égalité dans la formule précédente (*car il s'agit bien d'une égalité*) est valable pour x dans un intervalle centré en x_0 et donc de la forme

$$]x_0 - R, x_0 + R[.$$

Le nombre R est le rayon de convergence de la série de Taylor.

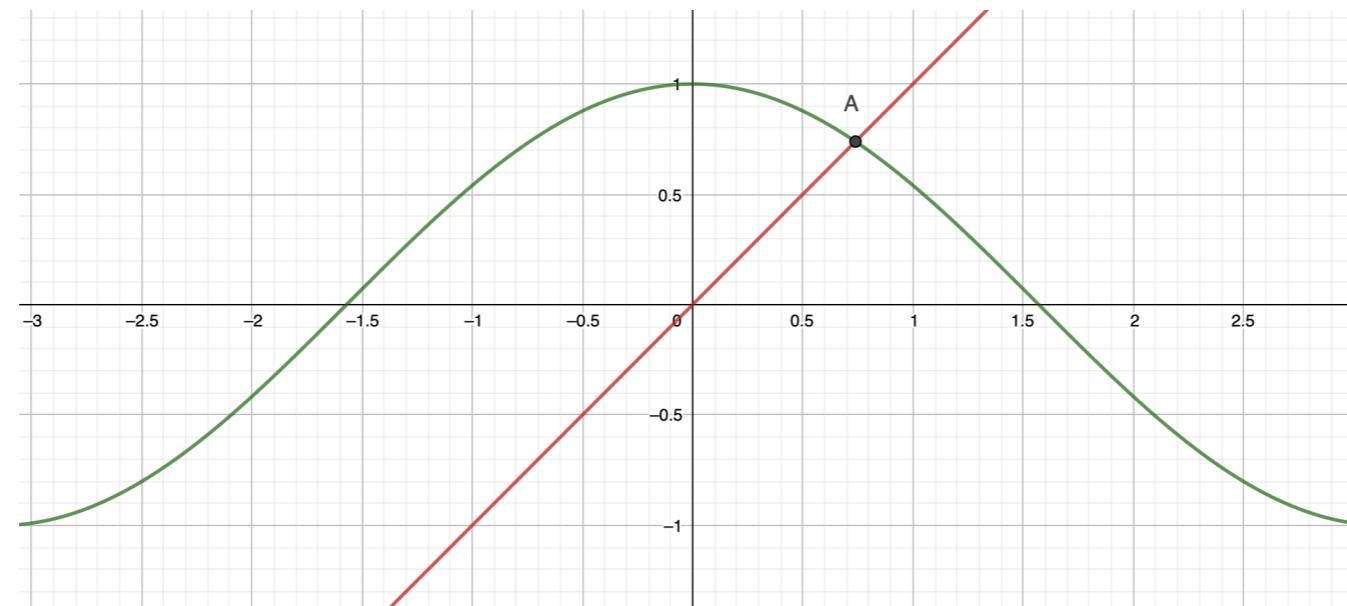
- ❖ Géométriquement, l'idée des séries de Taylor est d'approximer *au plus près* la fonction f en un point x_0 par le biais de polynômes où les coefficients sont donnés par une expression contenant les valeurs de dérivées de f calculées en x_0 .

Exercice

Déterminer une solution approchée de l'équation

$$\cos(x) = x$$

en utilisant une approximation d'ordre deux de la fonction $f(x) = \cos(x)$ autour de $x_0 = 0$.



Notation de Landau

Si une fonction $f(x)$ est négligeable devant une fonction $g(x)$ au voisinage de $x = a$, on notera

$$f = o(g) \quad \text{pour } x \rightarrow a$$

Ceci revient à dire que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemples

Au voisinage de 0 on a

1. $4x^3 = o(x^2)$ car si x tend vers 0 alors $\frac{4x^3}{x^2} = 4x$ tend vers 0.

2. $2x^2 - 5x^3 + 100x^4 = o(x)$

3. $1 - \cos(x) = o(x)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$ (règle de l'Hospital)

Au voisinage de l'infini on a

$$x^2 = o(x^3)$$

$$x^n = o(e^x)$$

$$\ln^a(x) = o(x^n)$$

$$2x + 3x^3 = o(x^4)$$

- $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$
- $o(f) + o(g) = o(f)$
- $o(f) - o(g) = o(f)$!!!

Développement limité

On dit que $f(x)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $x = a$ si on peut écrire

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) = o[(x - a)^n]$$

Exemples

1. $e^x = 1 + x + o(x)$ au voisinage de 0 $\rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{o(x)}{x}$ tend vers 1 par définition du $o(x)$.
2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots = x + o(x^2)$ au voisinage de 0 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$

Exercice : calculer la limite suivante en utilisant le développement limité du sinus et du cosinus en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \cdot (1 - \cos x^2)}{x^6} =$$

Exemple

Calculer la série de Taylor en l'origine de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

