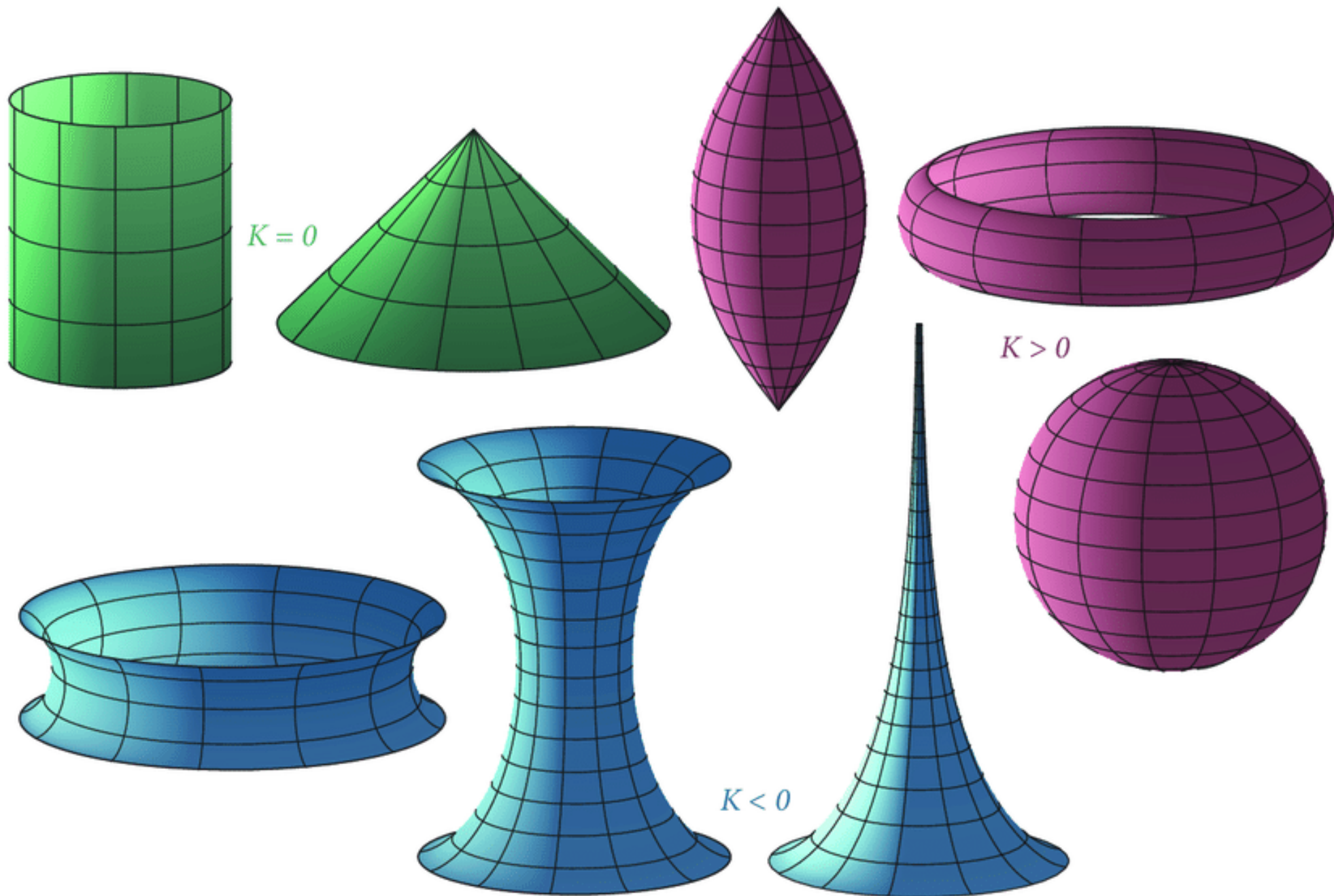


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Surfaces et volumes de révolution

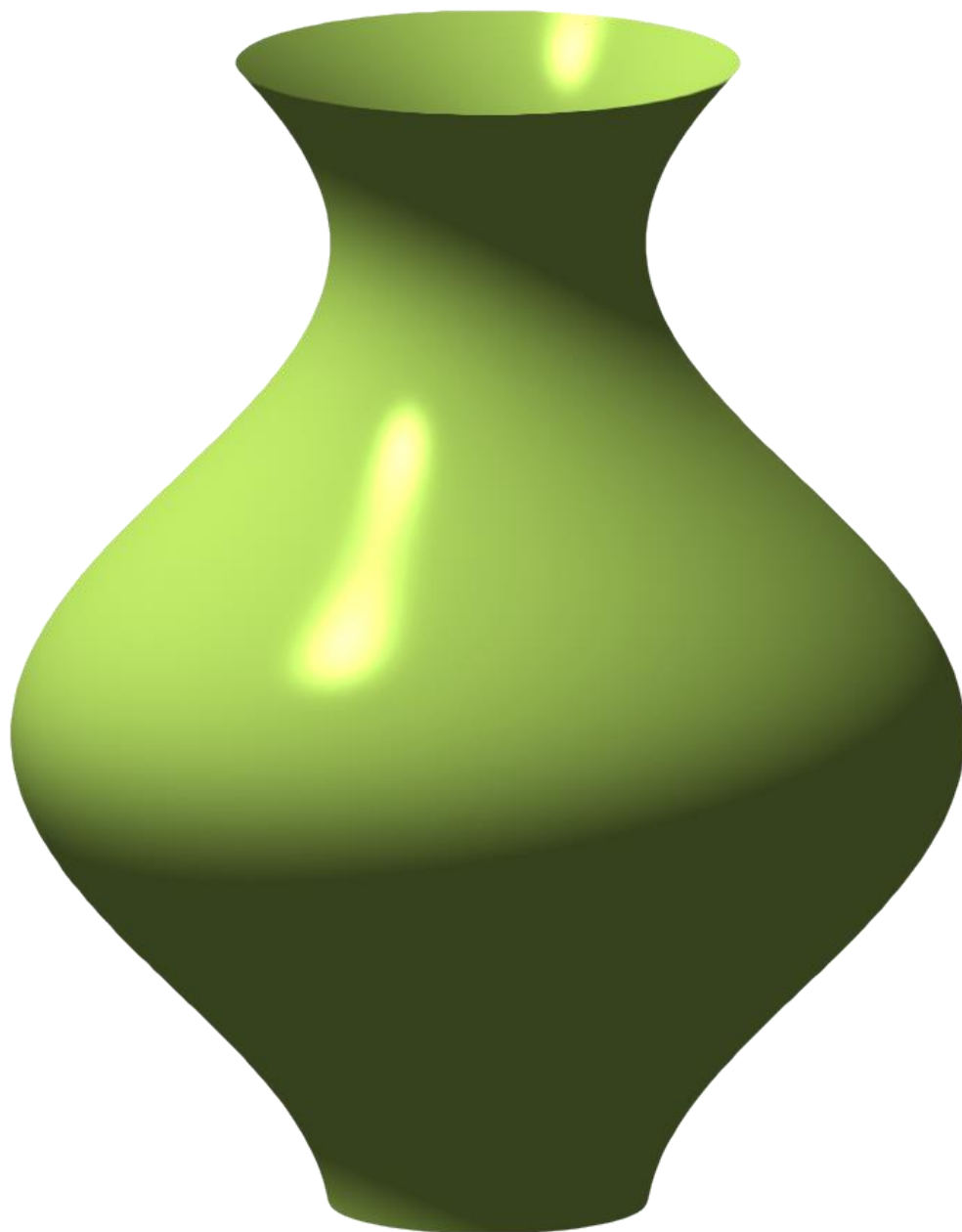
Philippe Chabloz

Surfaces de révolution





Surfaces de révolution

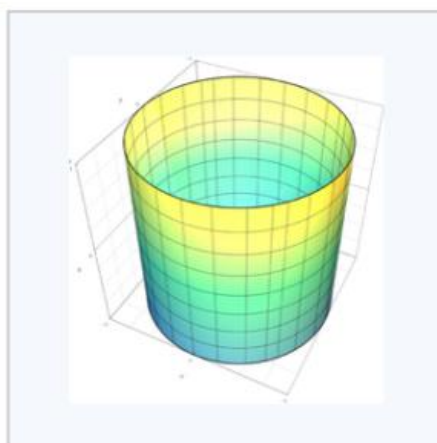


- ❖ Une surface de révolution est une surface de \mathbb{R}^3 , *invariante par rotation* autour d'un axe fixe.
- ❖ Une surface balayée par la rotation d'une courbe quelconque autour d'un axe fixe est une surface de révolution.
- ❖ Étant donnée une courbe C dans l'espace, on la fait *tourner* autour de l'axe Oz (*par exemple*) pour obtenir une surface de révolution.
- ❖ Soit $P \in C$ un point sur la courbe, si on regarde l'orbite de ce point, il s'agit d'un *cercle horizontal*) à la hauteur du point P .

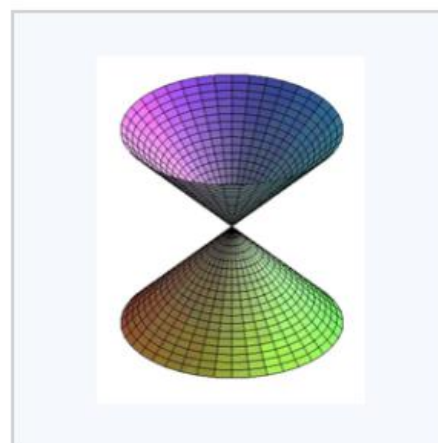
Équations paramétriques d'une surface de révolution

Soit C une courbe dans l'espace définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ où $t \in I$. La surface de révolution engendrée par la courbe C admettant l'axe Oz comme axe de rotation a équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t, \alpha) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \cos(\alpha) \\ y(t, \alpha) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \sin(\alpha) \\ z(t, \alpha) = z(t) \end{cases}, \quad \alpha \in [0, 2\pi], t \in I$$



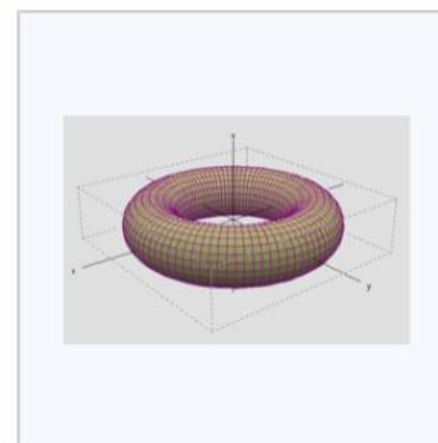
Cylindre.



Cône.



Sphère.



Tore

Surfaces de révolution

Si la **courbe γ est située dans le plan Oyz** alors les équations du slide précédent se simplifient en

❖ Pour la courbe

$$\gamma(t) = (0, y(t), z(t)) \quad t \in I$$

❖ Pour la surface de révolution

$$\Sigma(t, \alpha) = \begin{pmatrix} y(t) \cos \alpha \\ y(t) \sin \alpha \\ z(t) \end{pmatrix} \quad t \in I, \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

Dessin

Exemple : équations de la sphère

Solide de révolution : aire et volume

Supposons que la **courbe génératrice de la surface de révolution** soit contenue dans le plan Oyz .

$$\gamma(t) = (0, y(t), z(t)) \quad t \in I$$

Un élément infinitésimal de la courbe γ a comme longueur

$$dl = \sqrt{dy^2 + dz^2} = \sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

La distance à l'axe Oz de cet élément infinitésimal vaut $y(t)$.

Sa rotation autour de Oz fait **un cylindre de rayon $y(t)$ de hauteur dl** .

Ainsi la surface latérale de cet élément vaut

$$dS = 2\pi \cdot y \cdot dl$$

Le volume de ce même cylindre vaut

$$dV = \pi \cdot y^2 dz$$

Solide de révolution : aire et volume

Élément différentiel de surface latérale:

$$dS = 2\pi \cdot y \cdot dl$$

Élément différentiel du volume de révolution:

$$dV = \pi \cdot y^2 dz$$

En intégrant dS on trouve l'aire de la surface de révolution:

$$S_{Oz}^{lat} = \int_a^b 2\pi \cdot y(t) \cdot dl = 2\pi \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{dy^2 + dz^2} = 2\pi \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

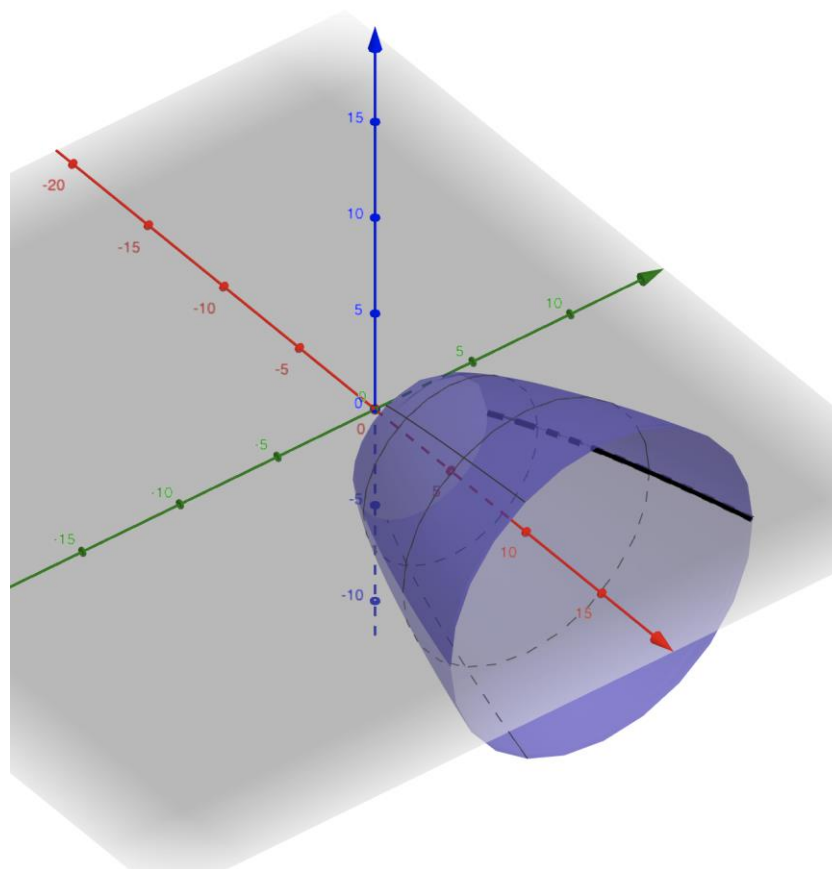
En intégrant dV on trouve le volume du solide de révolution

$$V_{Oz} = \int_a^b \pi y(t)^2 dz = \pi \int_a^b y(t)^2 \cdot z'(t) dt$$

entre $P(0, y(a), z(a))$ et $R(0, y(b), z(b))$.

Exercice

Évaluer l'aire de la surface de révolution obtenue par la rotation autour de l'axe Ox de la courbe définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$ pour $x \in [3,15]$.



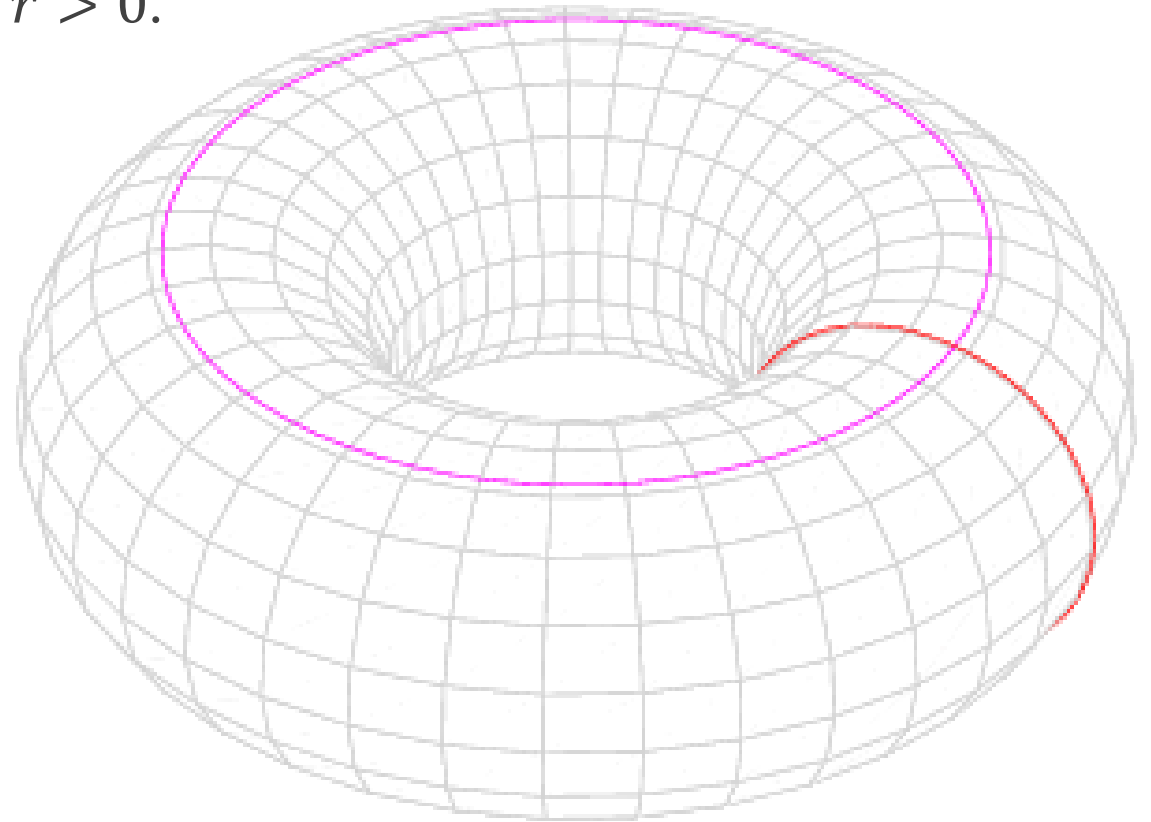
Exercice : ballon de rugby

Calculer le volume de l'ellipsoïde obtenu par rotation autour de l'axe Oz de la demi-ellipse de demi-axes a et b (ballon de rugby).

Demi-ellipse : $\gamma(t) = (0, a \sin t, -b \cos t) \quad 0 \leq t \leq \pi$

Exercice : le tore

Calculer la surface latérale du tore de paramètres $R > r > 0$.



Solide

Considérons un solide constitué d'une base et d'un sommet S relié à la base par des droites.

Pour simplifier les calculs on suppose le solide posé sur son sommet et la base horizontale. Soit B l'aire de la base et h la hauteur de la base (voir dessin à droite).

Alors pour tout $0 \leq z \leq h$ l'aire de la section horizontale de hauteur z vaut

$$B(z) = B \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2$$

Une homothétie de rapport $\frac{z}{h}$ transforme les surfaces selon le rapport $\left(\frac{z}{h}\right)^2$

Alors le volume du solide vaut

$$V = \int_0^h B \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 dz = \frac{B}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{B}{h^2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{B}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

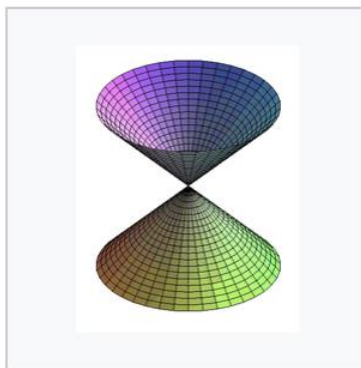
Applications:

- ❖ Volume d'un cône de rayon R et de hauteur h : $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$
- ❖ Volume d'une pyramide de base carrée : $V = \frac{1}{3} d^2 \cdot h$

Surfaces réglées

Une surface réglée est une surface par chaque point de laquelle passe une droite, appelée **génératrice**, contenue dans la surface.

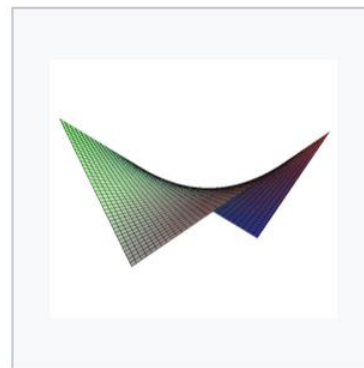
Une surface **doublement réglée** lorsque, par chacun de ses points, il y a deux droites distinctes qui passent par le point et appartiennent à la surface.



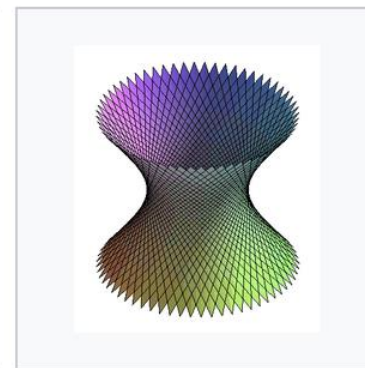
Cône.



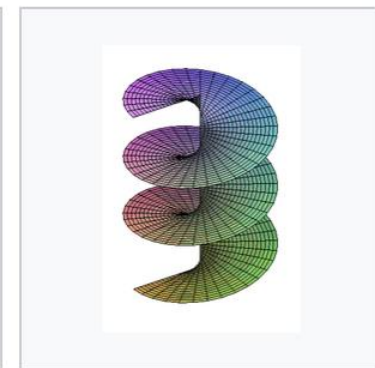
Cylindre.



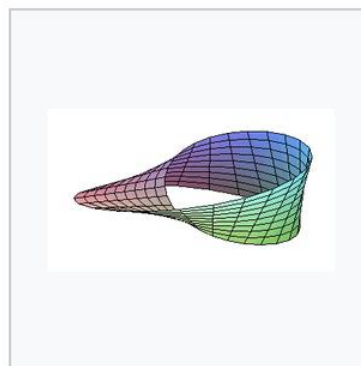
Paraboloïde
hyperbolique.



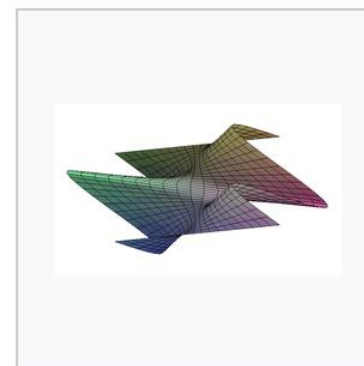
Hyperboloïde à une
nappe.



Hélicoïde.



Ruban de Möbius.



Conoïde.

Milwaukee art museum

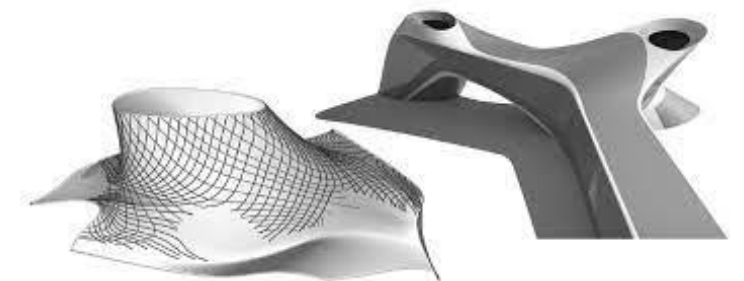
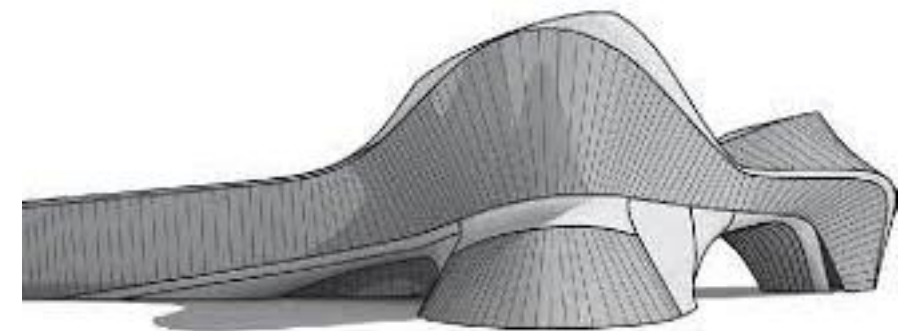
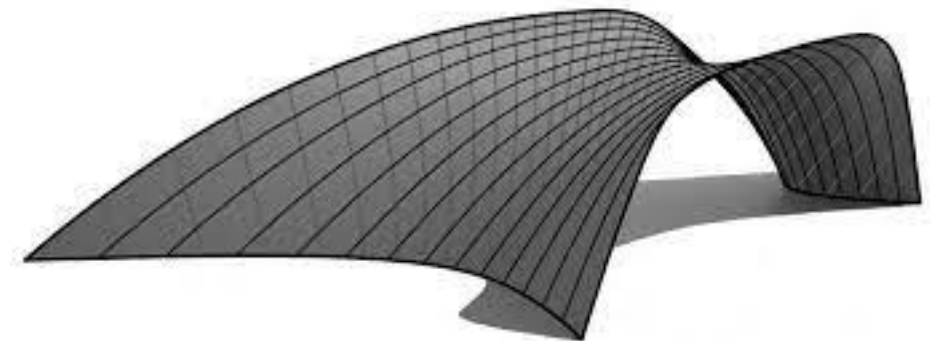
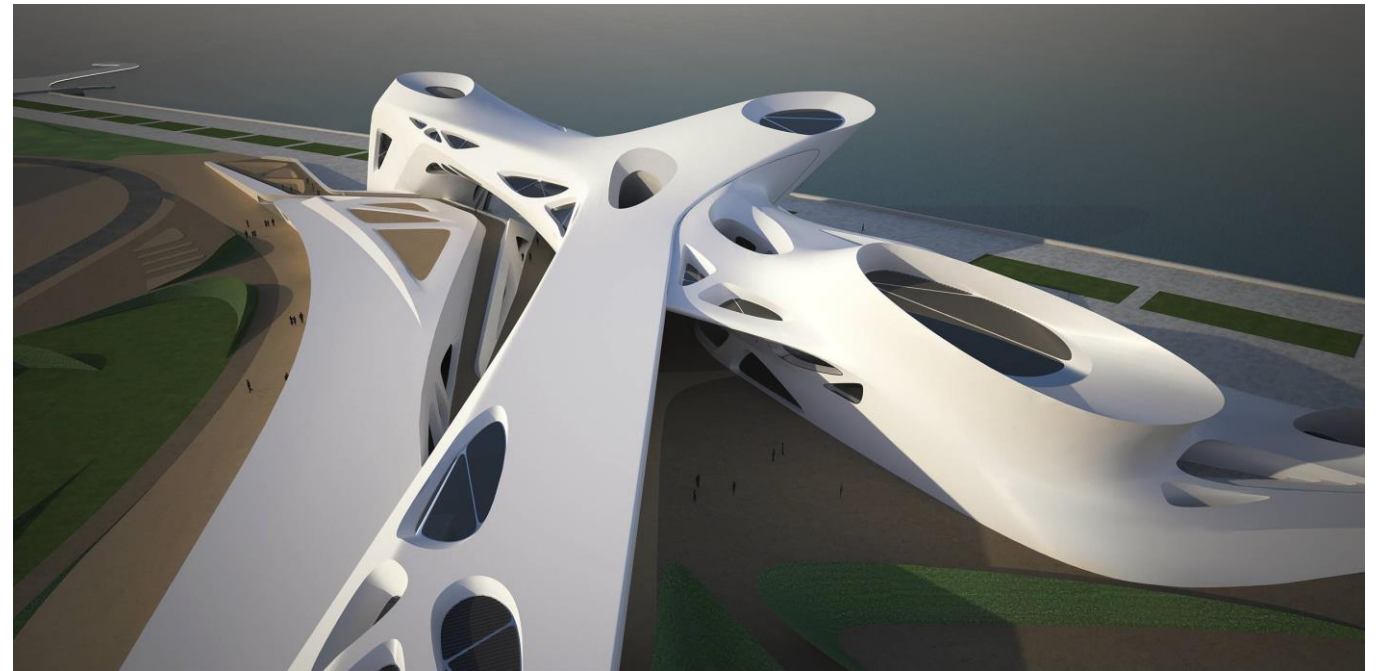
Santiago Calatrava



Frank
O. Gehry

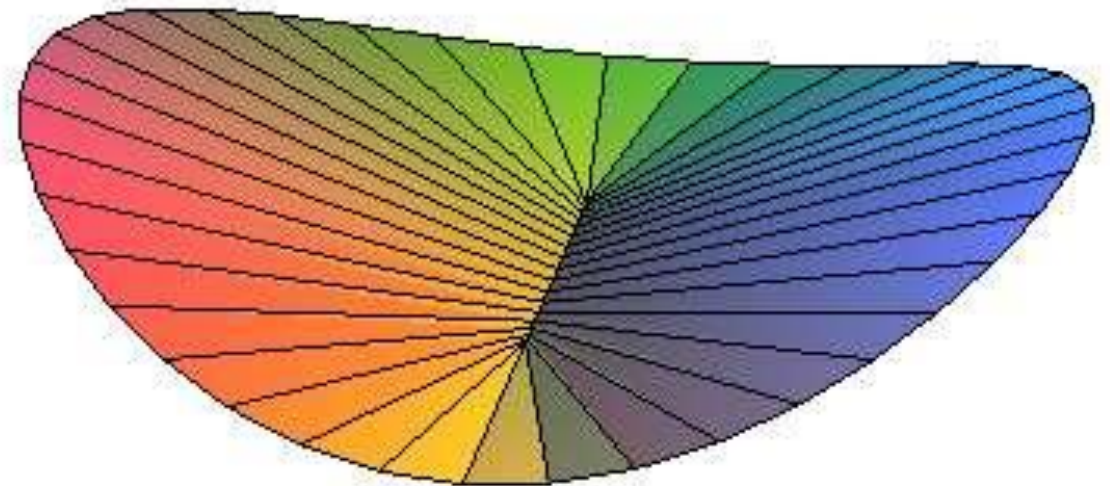
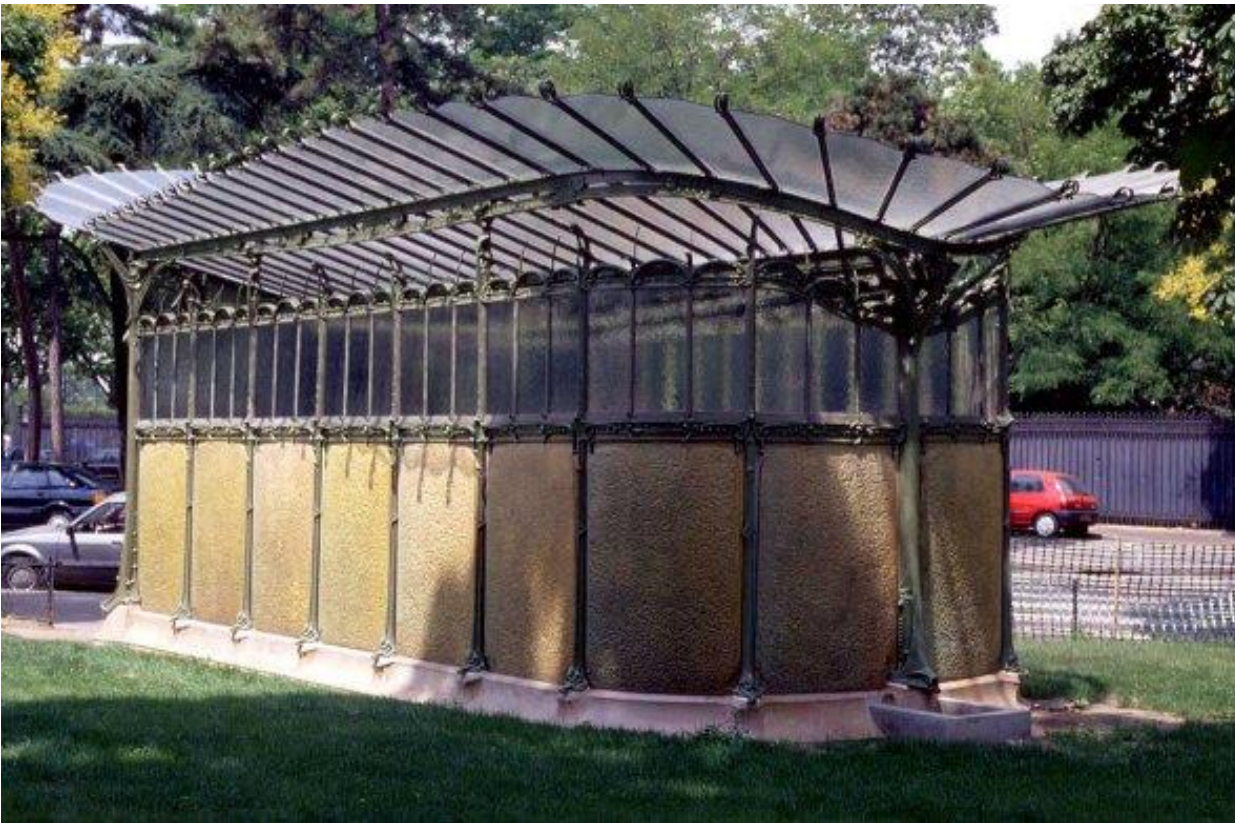


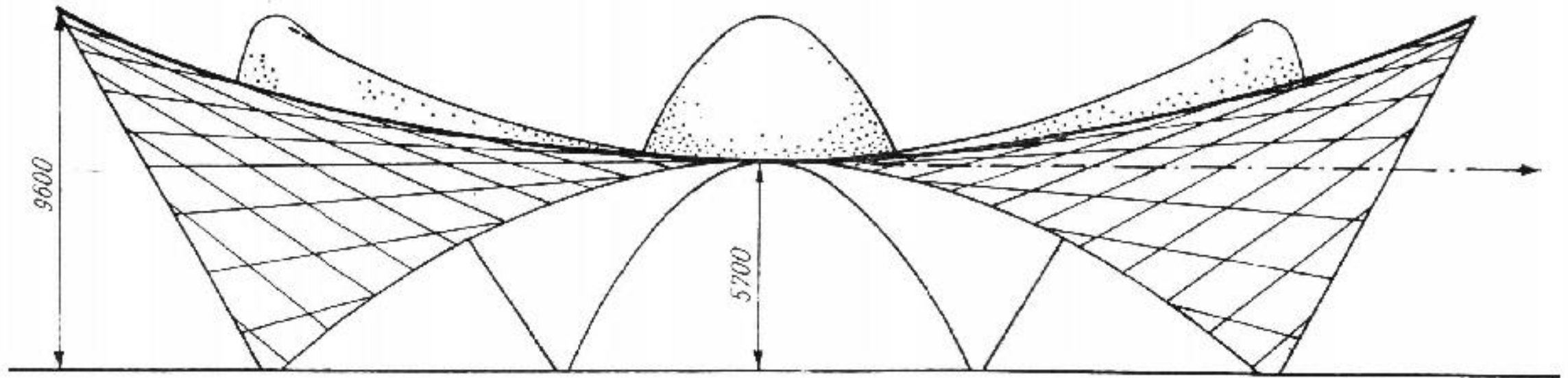
Cagliari contemporary
arts center
Zaha Hadid



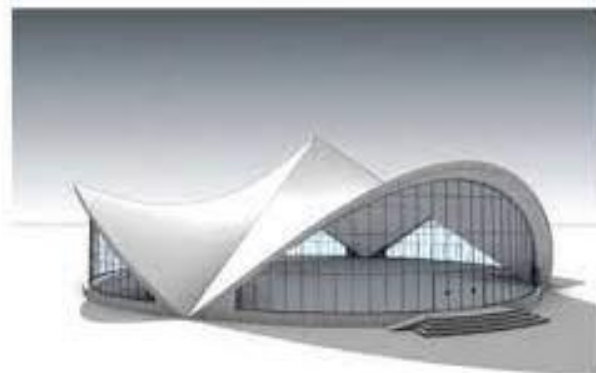
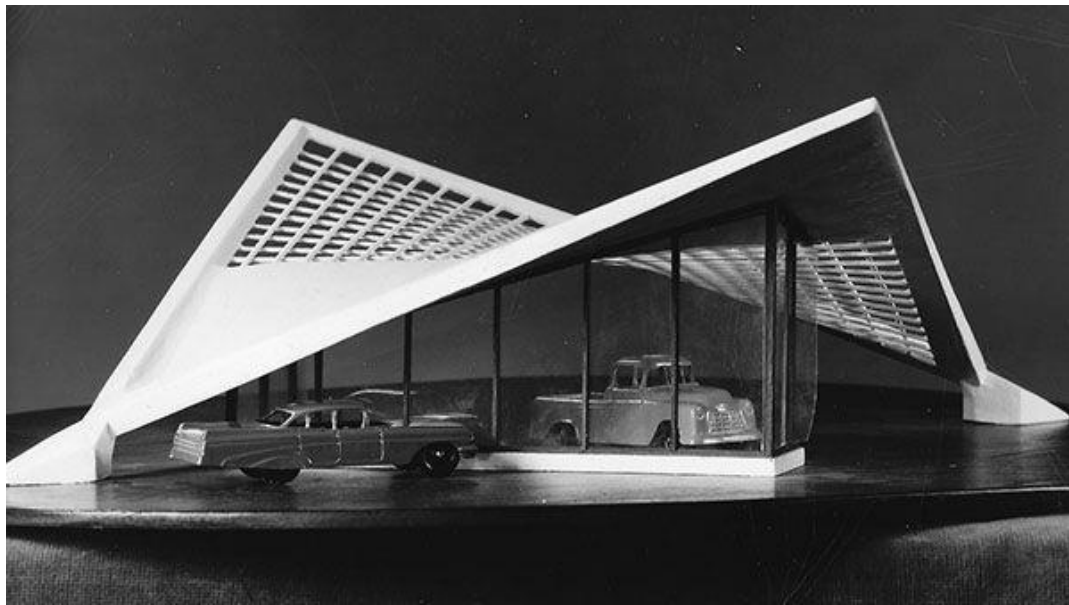
Surface de Guimard

Hector Guimard





En architecture, les surfaces réglées ont l'avantage de pouvoir être réalisées en béton via un coffrage linéaire. Les surfaces doublement réglées peuvent de plus être armées de tiges droites dans deux directions différentes.



Surfaces réglées

Pour définir une surface réglée, il faut deux courbes paramétrées dans l'espace :

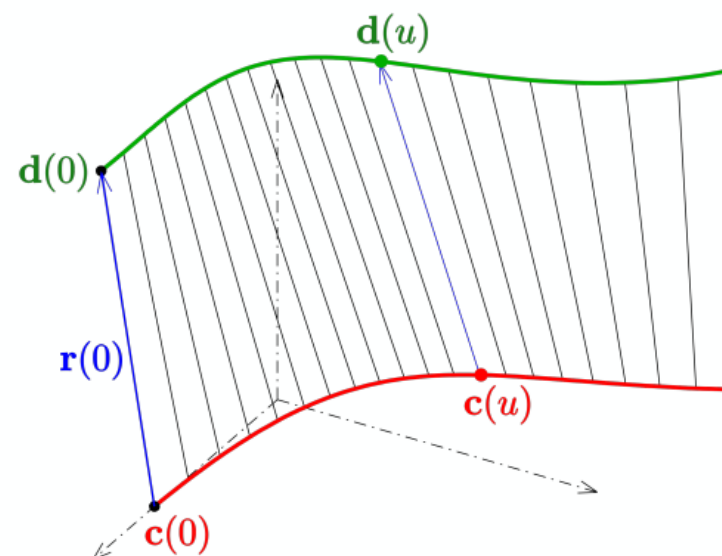
$$c(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \quad \text{et} \quad d(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) \quad \text{où } t \in I.$$

Pour t fixé, la droite entre les points $c(t)$ et $d(t)$ est donnée par l'équation paramétrique :

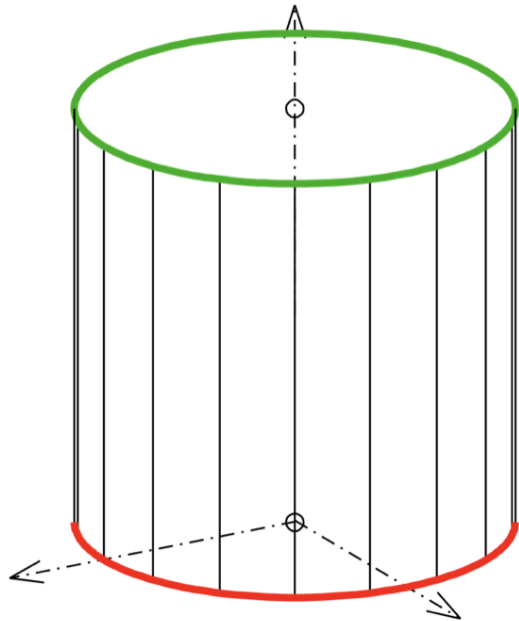
$$\gamma(s) = (1 - s)c(t) + s d(t) \quad \text{où } s \in \mathbb{R}.$$

Les droites de cette famille sont les générateurs de la surface réglée. En laissant varier t , on obtient une surface paramétrée par les paramètres $t \in I$ et $s \in \mathbb{R}$ d'équation :

$$r(s, t) = (1 - s)c(t) + s d(t) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(s, t) = (1 - s)x_1(t) + s x_2(t) \\ y(s, t) = (1 - s)y_1(t) + s y_2(t) \\ z(s, t) = (1 - s)z_1(t) + s z_2(t) \end{cases}$$



Exemples de surfaces réglées

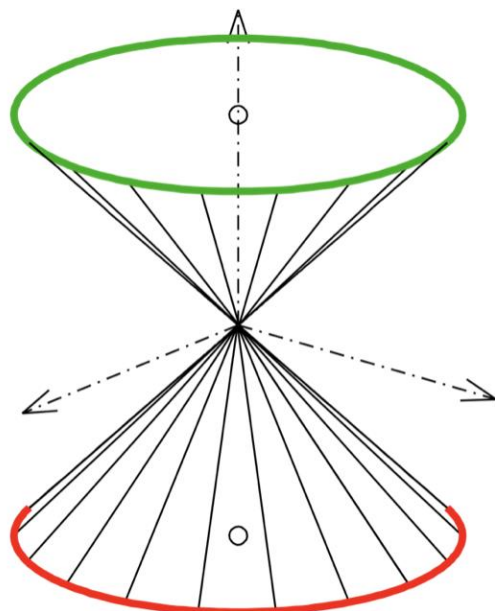


Si $c(t) = (\cos t, \sin t, -1)$ et $d(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, où $t \in [0, 2\pi]$, on obtient un **cylindre droit** de rayon 1 :

$$\begin{cases} x(s, t) = (1 - s) \cdot \cos(t) + s \cdot \cos(t) = \cos(t) \\ y(s, t) = (1 - s) \cdot \sin(t) + s \cdot \sin(t) = \sin(t) \\ z(s, t) = (1 - s)(-1) + s = 2s - 1 \end{cases} \quad \text{où } t \in [0, 2\pi] \text{ et } s \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$r(t, s) = (\cos(t), \sin(t), 2s - 1)$$



Si $c(t) = (-\cos t, -\sin t, -1)$ et $d(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, où $t \in [0, 2\pi]$, on obtient un **cône droit** :

$$\begin{cases} x(s, t) = (1 - s) \cdot \cos(t) + s \cdot \cos(t) = (2s - 1) \cdot \cos(t) \\ y(s, t) = (1 - s) \cdot \sin(t) + s \cdot \sin(t) = (2s - 1) \cdot \sin(t) \\ z(s, t) = (1 - s)(-1) + s = 2s - 1 \end{cases} \quad \text{où } t \in [0, 2\pi] \text{ et } s \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$r(t, s) = ((2s - 1) \cdot \cos(t), (2s - 1) \cdot \sin(t), 2s - 1)$$

Exemples de surfaces réglées

Nous introduisons un paramètre supplémentaire $\varphi \in [0, 2\pi]$ permettant de faire varier la synchronisation des deux paramétrisations de deux cercles. Soient :

$$c(t) = (\cos(t - \varphi), \sin(t - \varphi), -1)$$

et

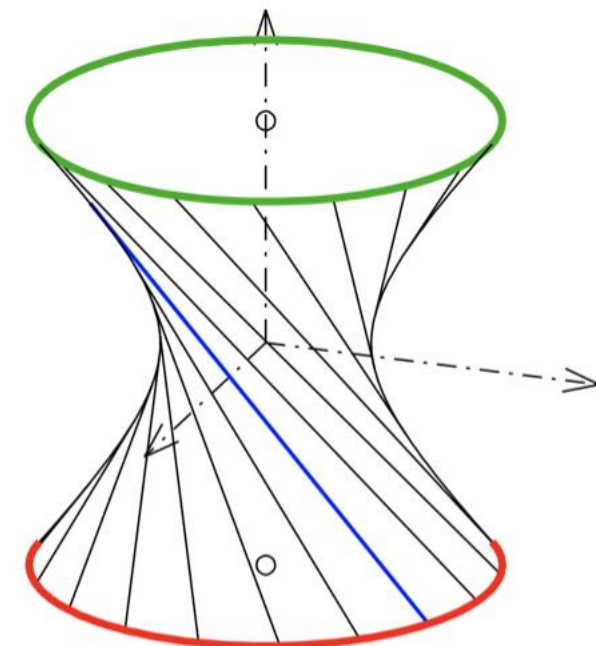
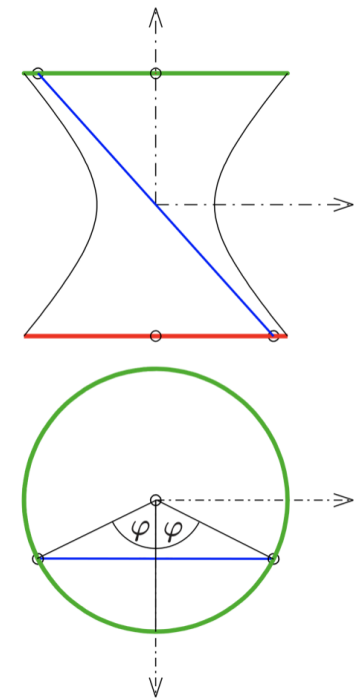
$$d(t) = (\cos(t + \varphi), \sin(t + \varphi), 1),$$

où $t \in [0, 2\pi]$. Alors :

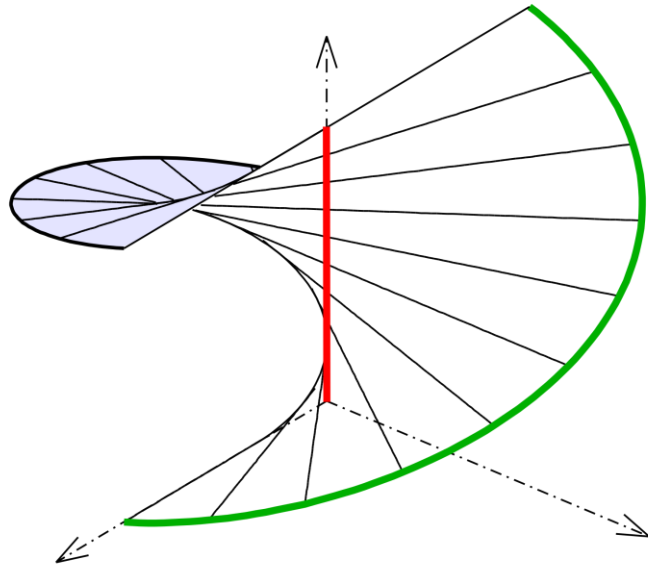
- ❖ Si $\varphi \in]0, \pi/2[$ on obtient un **hyperboloïde à une nappe** :

$$\begin{cases} x(s, t) = (1 - s) \cdot \cos(t - \varphi) + s \cdot \cos(t + \varphi) \\ y(s, t) = (1 - s) \cdot \sin(t - \varphi) + s \cdot \sin(t + \varphi) \\ z(s, t) = (1 - s) \cdot (-1) + s = 2s - 1 \end{cases}$$

- ❖ Si $\varphi = 0$ on obtient un **cylindre droit** de rayon 1.
- ❖ Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on obtient un **cône droit** de rayon 1.



Exemples de surfaces réglées

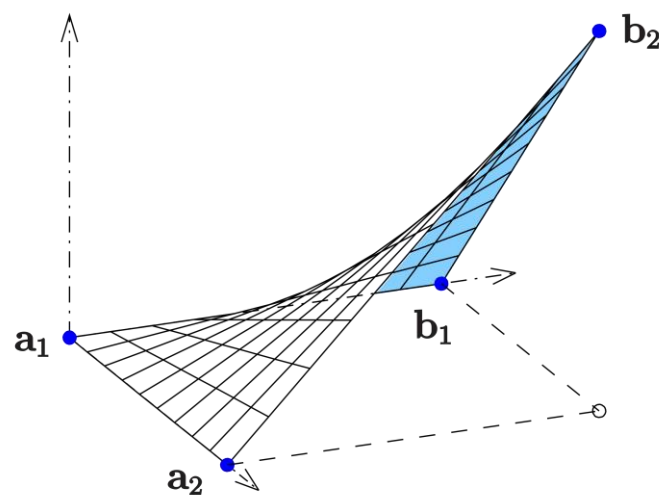


Si $c(t) = (0, 0, t)$ et $d(t) = (\cos t, \sin t, t)$, où $t \in \mathbb{R}$, on obtient un **hélicoïde** :

$$\begin{cases} x(s, t) = (1 - s) \cdot 0 + s \cdot \cos(t) = s \cdot \cos(t) \\ y(s, t) = (1 - s) \cdot 0 + s \cdot \sin(t) = s \cdot \sin(t) \\ z(s, t) = (1 - s) \cdot t + st = t \end{cases} \quad \text{où } s, t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$r(t, s) = (s \cdot \cos(t), s \cdot \sin(t), t)$$



Soient $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ quatre points dans l'espace tels que les deux droites

$$c(t) = (1 - t)\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$$

et

$$d(t) = (1 - t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2$$

sont gauches. Alors, on obtient un **paraboloïde hyperbolique** :

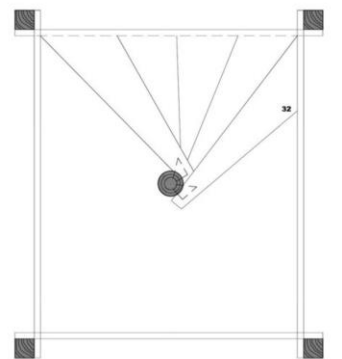
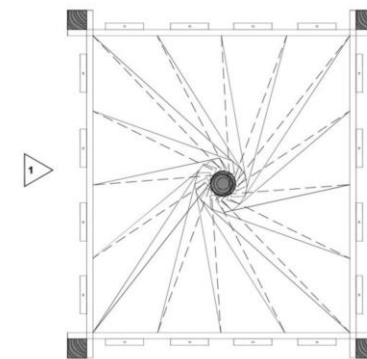
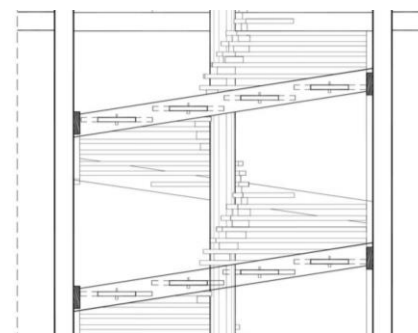
$$r(t, s) = (1 - s)((1 - t)\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2) + s((1 - t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2)$$

où $s, t \in \mathbb{R}$.

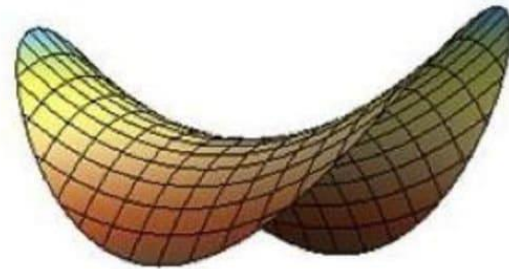


Helicoidal Wooden Staircase

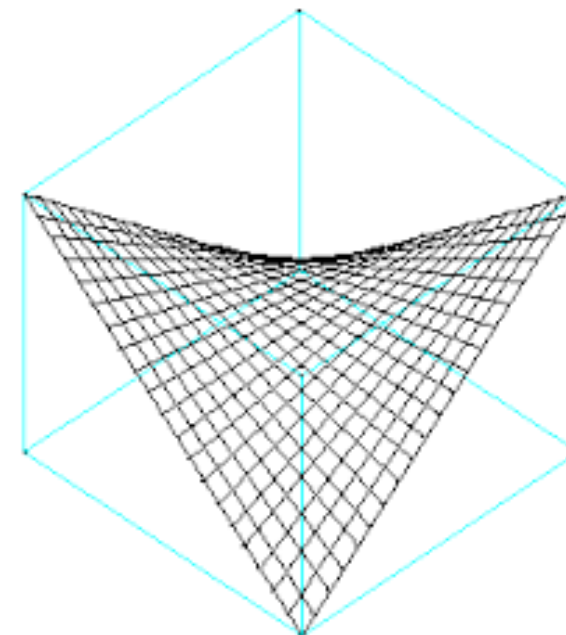
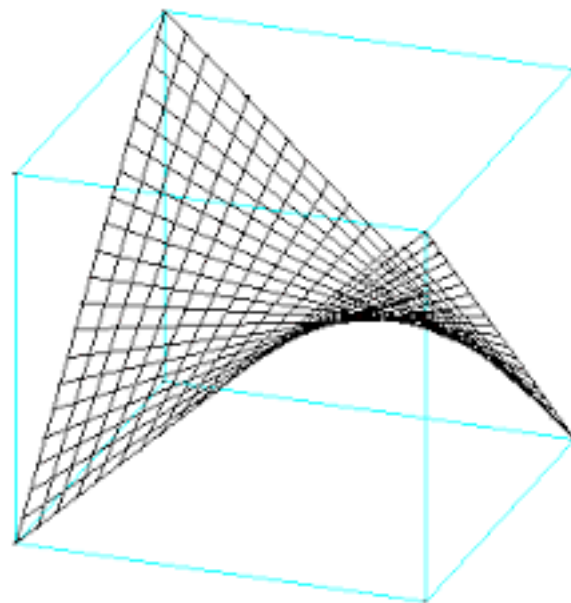
Lina Bo Bardi



Paraboloïde hyperbolique



$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$



Ruban de Möbius

La surface réglée définie par la courbe directrice

$$c(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 0)$$

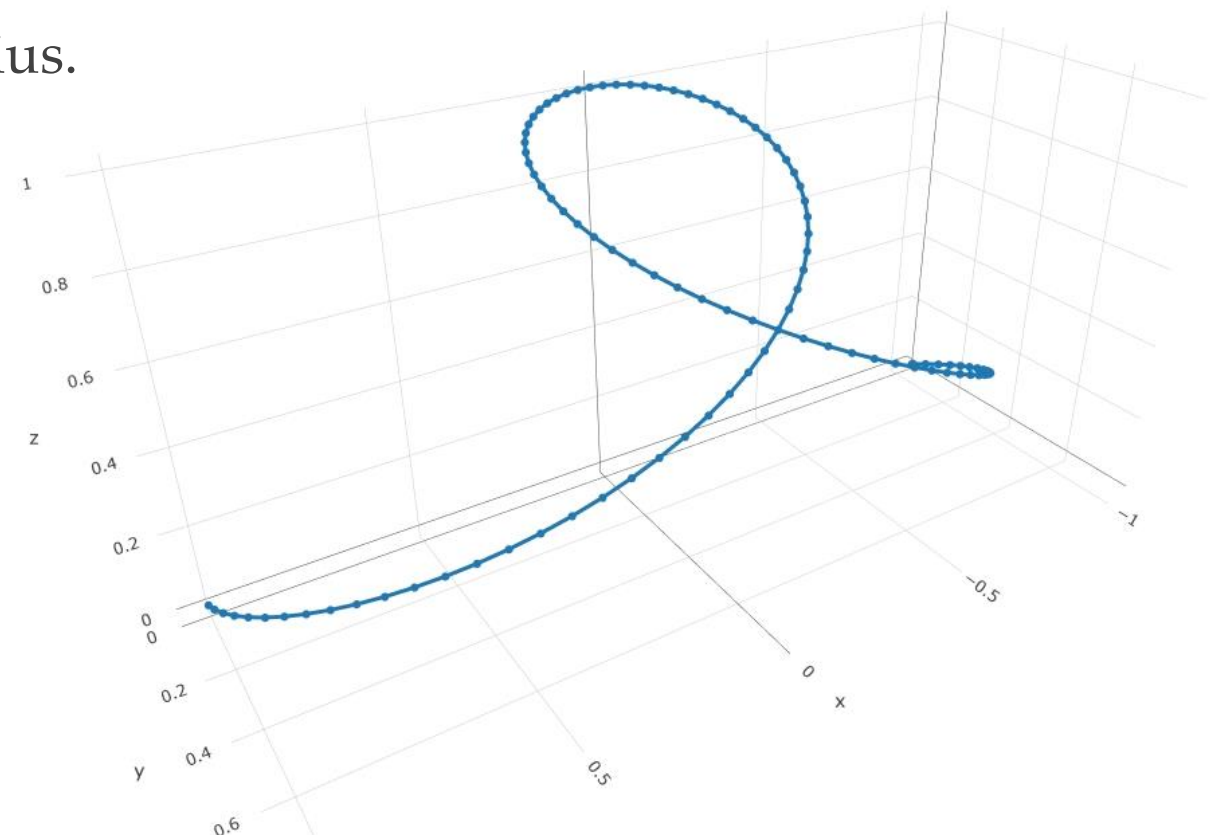
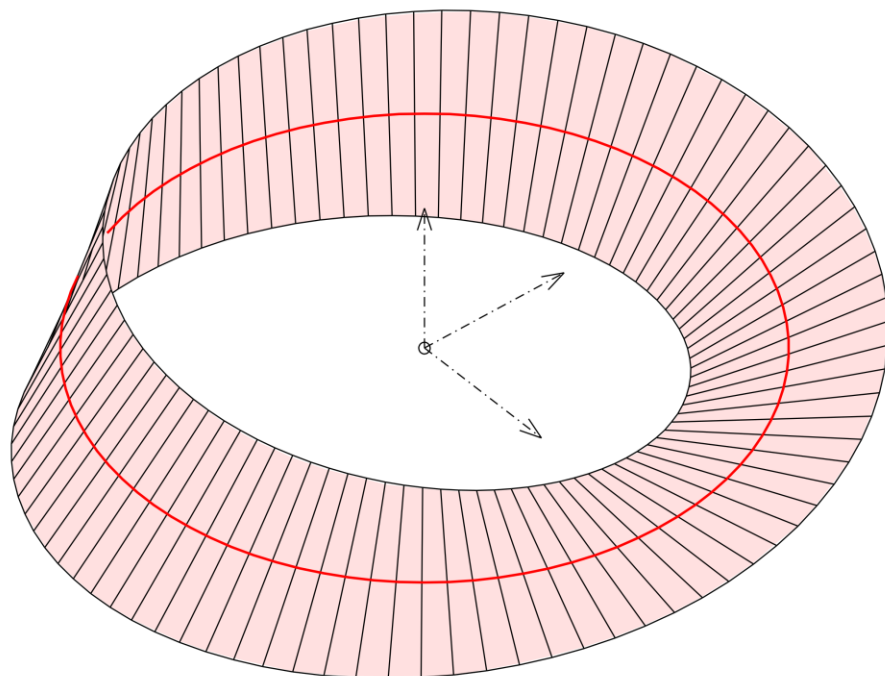
et la courbe

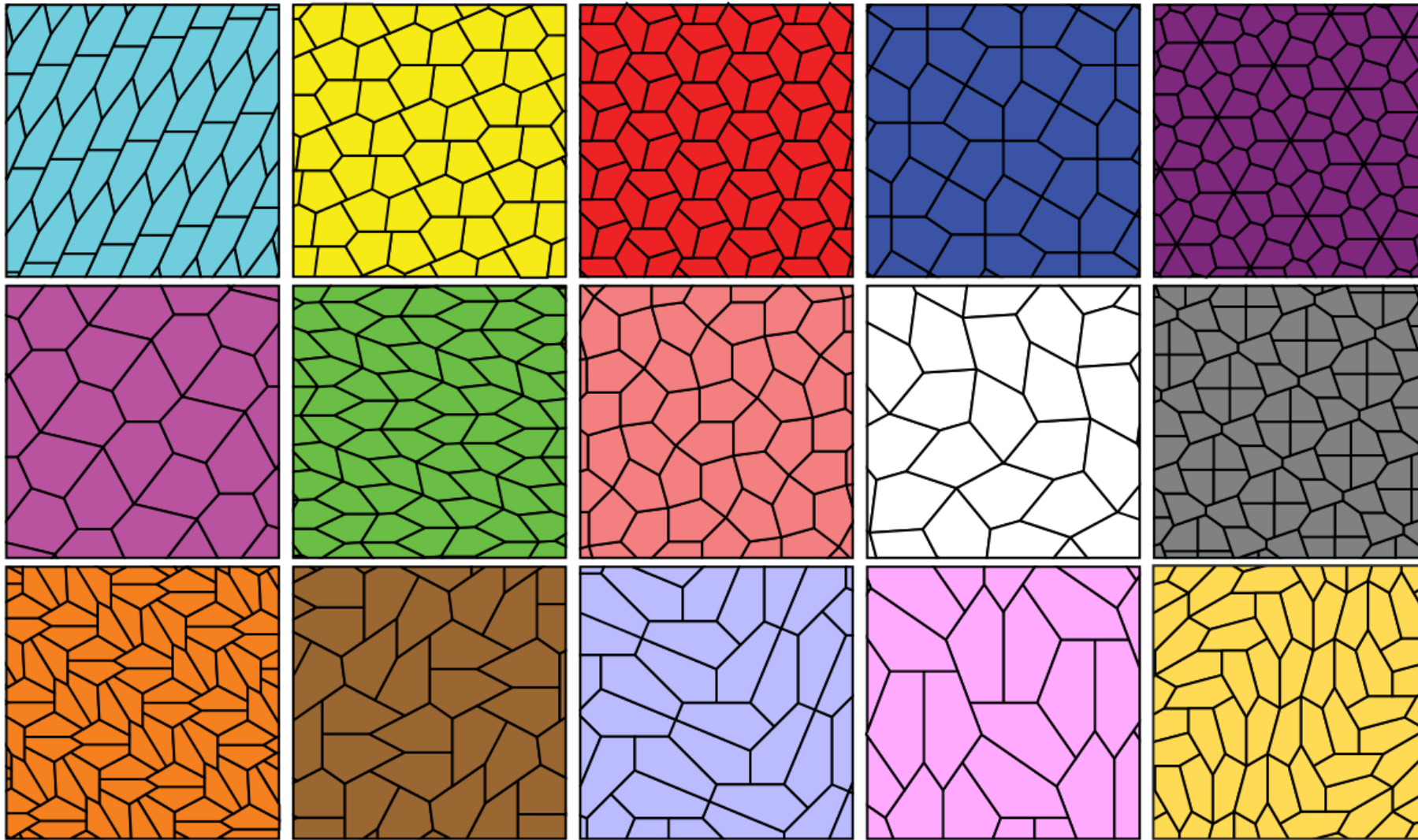
$$d(t) = (\cos(t)\cos(2t), \cos(t)\sin(2t), \sin(t))$$

via l'expression

$$r(t, s) = c(t) + s \cdot d(t)$$

où $t \in [0, \pi]$ et $s \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ est un ruban de Möbius.





Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Conclusion

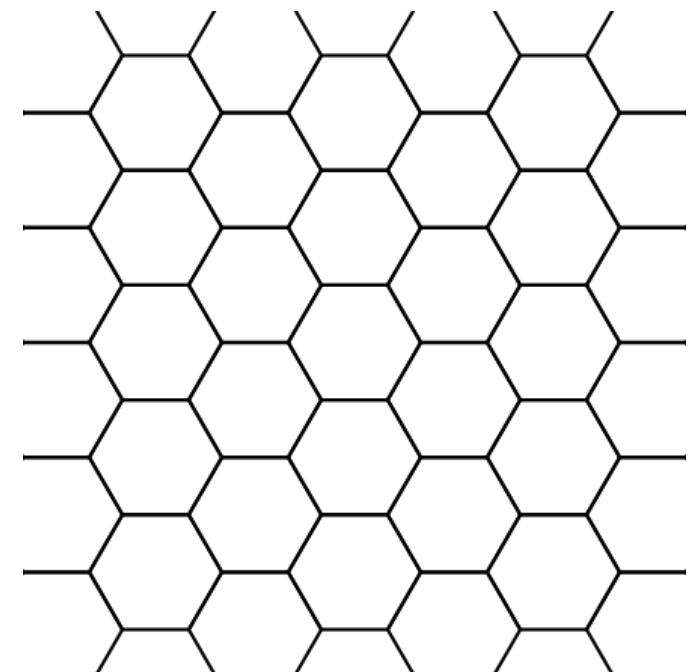
Mathématiques et
architecture

Quel polygone choisir pour paver au mieux le plan?

Comment remplir le plan en utilisant uniquement des polygones d'aire égale mais de périmètre moyen minimal ?

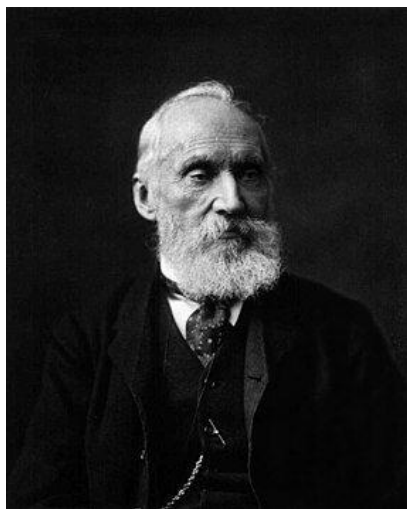
La réponse à cette question a été devinée il y a des siècles : en utilisant des *hexagones réguliers*, mais ce n'est qu'en 1999 que Thomas C. Hales a démontré le théorème suivant :

Théorème (Honeycomb conjecture). En deux dimensions, la subdivision du plan en cellules de surface égale avec un périmètre moyen minimal est donnée par le pavage hexagonal.



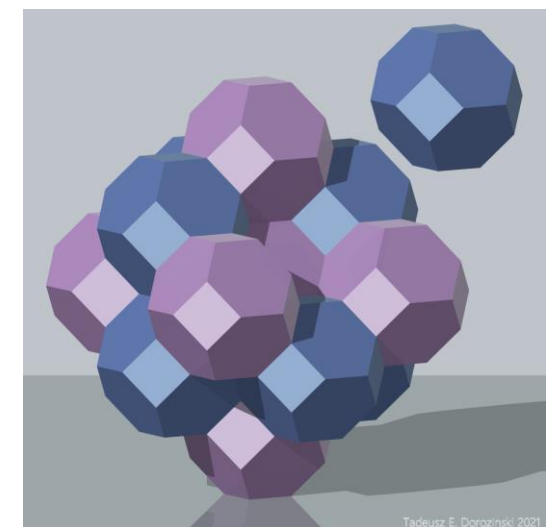
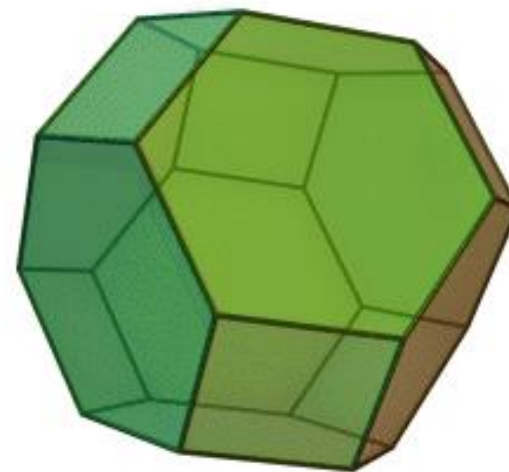
Comment occuper au mieux l'espace ?

Conjecture de Kelvin (1887) : comment l'espace tridimensionnel peut-il être divisé en cellules de volume égal qui minimisent la surface de contact entre elles ?



William Thomson
1er Baron Kelvin
1824 - 1907

Lord Kelvin, ne s'est pas contenté de soulever le problème, mais a également proposé sa solution : un réseau construit à l'aide d'*octaèdres tronqués* à 14 côtés.

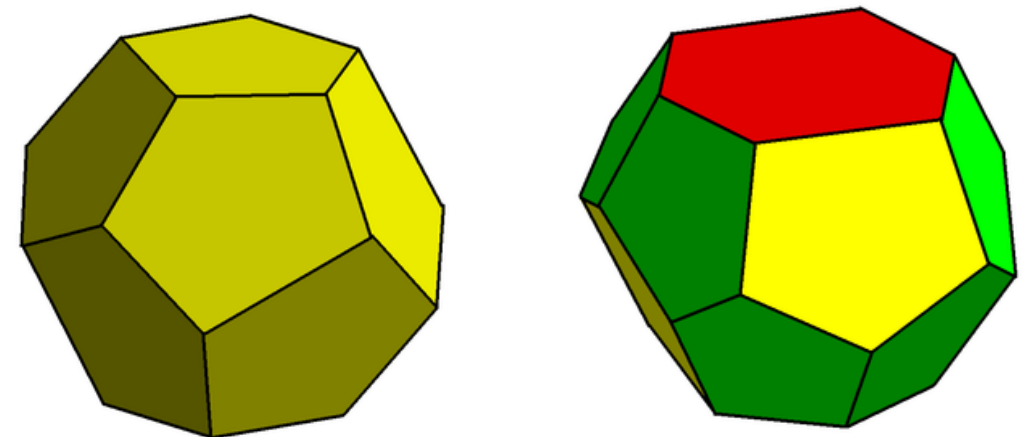
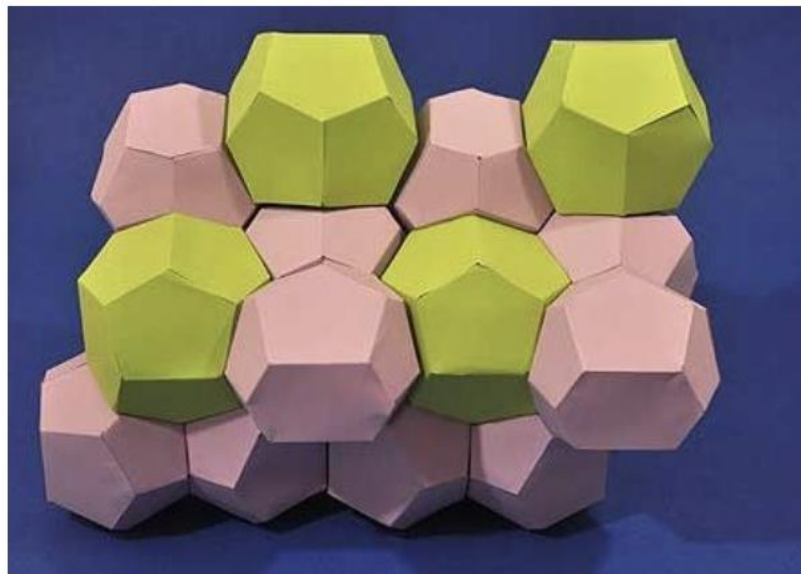
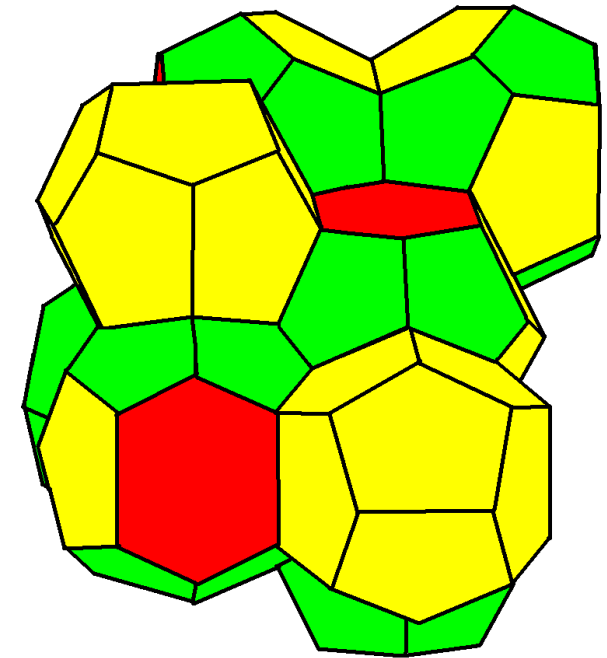


Structure de Weaire–Phelan

En 1994, *Denis Weaire* et *Robert Phelan* ont révélé une forme unitaire remplissant l'espace, composée de six polyèdres à 14 côtés et de deux polyèdres à 12 côtés aux faces irrégulières.

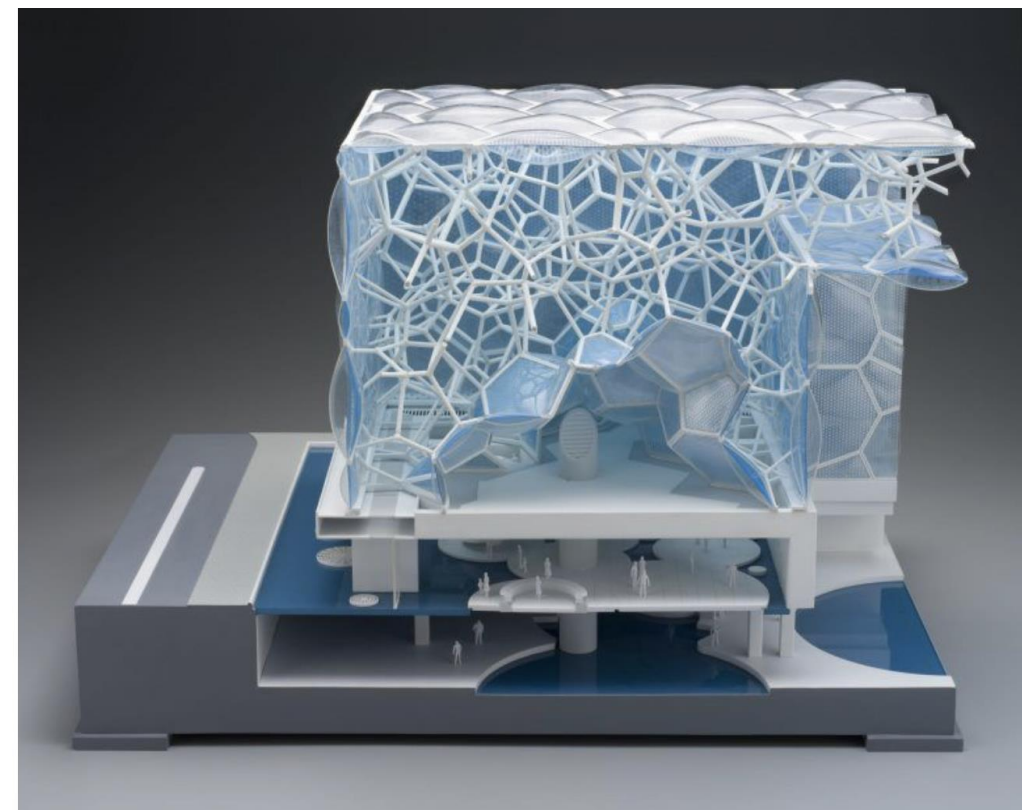
Waire et Phelan ont utilisé des simulations logicielles de la mousse de savon pour découvrir la nouvelle structure.

Leur pavage possède en effet une plus petite surface de contact que celle que l'on obtient avec l'octaèdre de Kelvin (même si le gain réalisé est à peine de 0,3% !)



Dodécaèdre régulier et *trapézoèdre hexagonal tronqué*

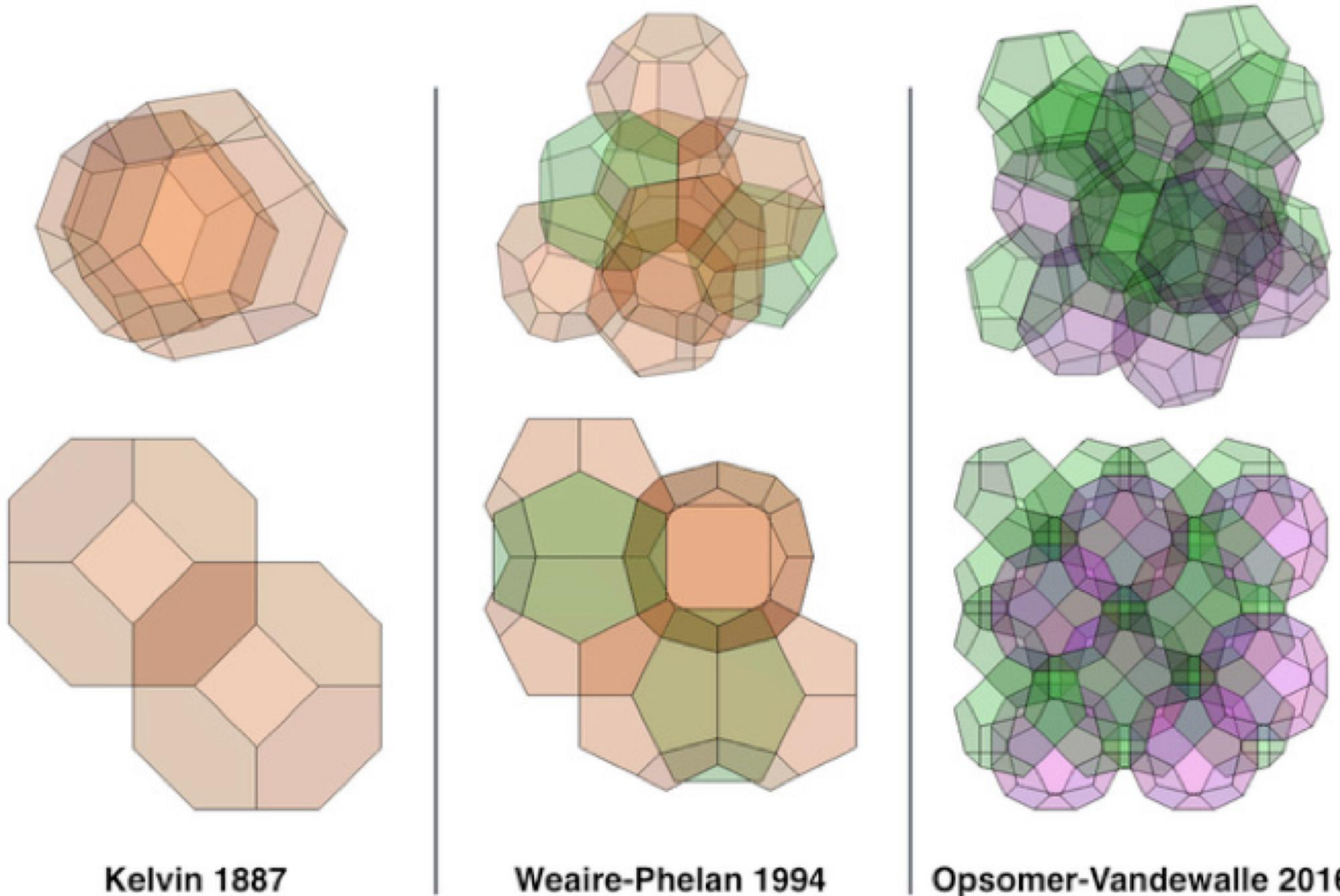
Centre national de natation de Pékin



Structure de Opsomer-Vandewalle

« Si Weaire et Phelan ont inspiré des architectes,
pourquoi ne serait-ce pas le cas de notre structure ? »

*Novel structures for optimal space partitions, E. Opsomer et N. Vandewalle,
New Journal of Physics 18 (2016).*



Depuis l'antiquité, les mathématiques sont un partenaire indissociable de l'architecture. Ces liens reposent aujourd'hui sur des considérations pratiques et scientifiques, mais autrefois le mysticisme jouait un rôle important. Dans le domaine de proportions, l'utilisation du nombre d'or en est un exemple connu. De nos jours, la conception des constructions a été totalement bouleversée par l'arrivée de l'outil informatique et des puissants algorithmes sous-jacents derrière lesquels les mathématiques sont omniprésentes. Pourtant, dans leur cursus, les nouveaux architectes étudient peu de maths s'ils ne complètent pas leur formation par un diplôme d'ingénieur.

Bertrand Hauchecorne