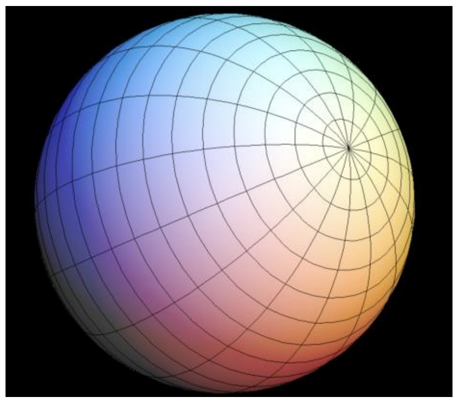
Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Surfaces et courbes dans l'espace

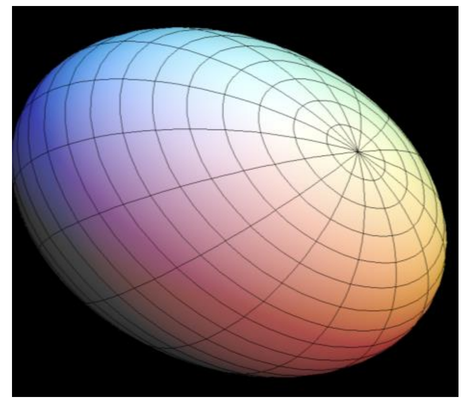
Philippe Chabloz

Exemples

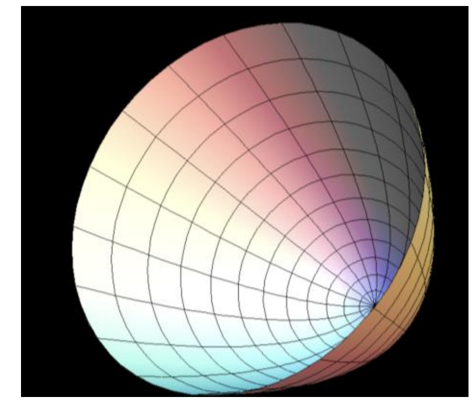
(pour le plaisir des yeux..)



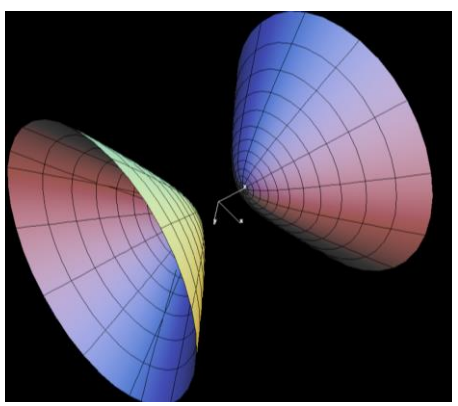
Sphère



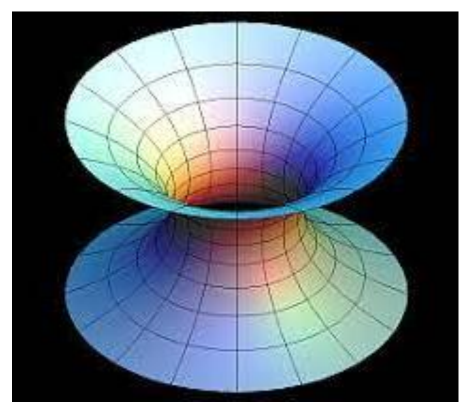
Ellipsoïde



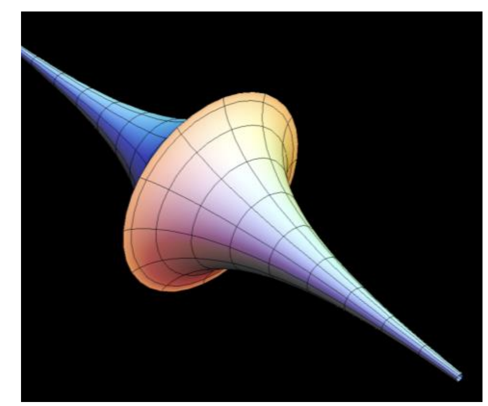
Paraboloïde de révolution



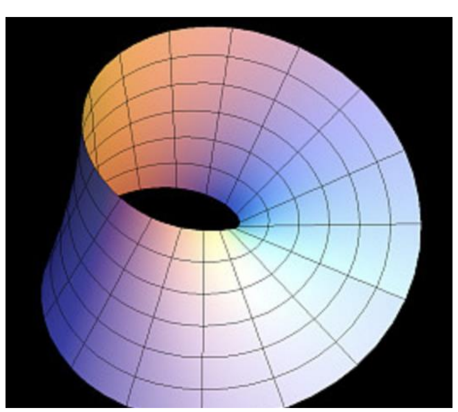
Hyperboloïde à deux nappes



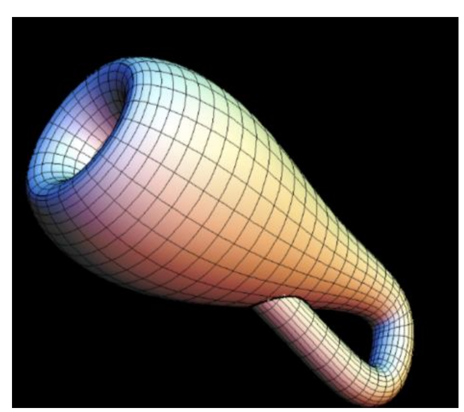
Hyperboloïde à une nappe



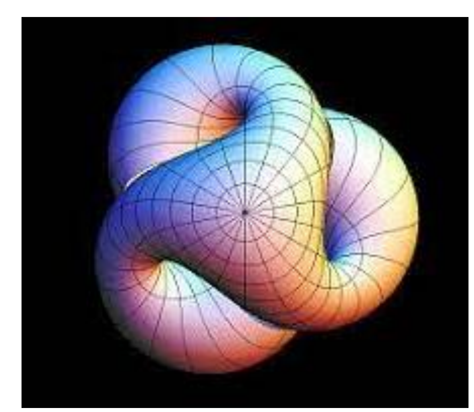
Pseudosphère



Ruban de Möbius



Bouteille de Klein



Surface de Boy

La materia del tiempo
Richard Serra

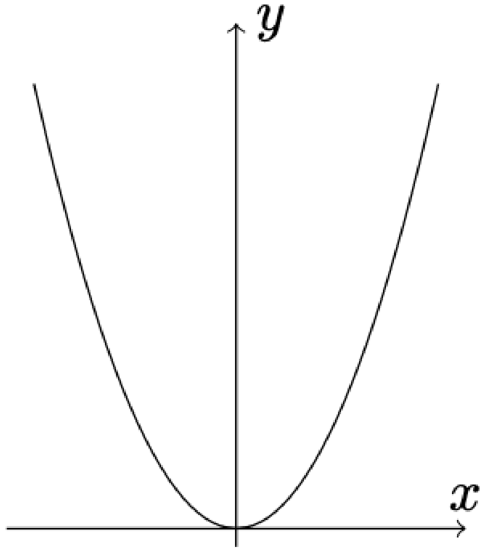
Exemples introductifs

Il existe une très forte analogie entre les courbes dans le plan et les surfaces dans l'espace.

Équations explicites :
Une courbe dans le plan ($\mathbb{R}^2$) peut être donnée par $y = f(x)$ où f est une fonction à *une* variable.
Une surface dans l'espace ($\mathbb{R}^3$) peut être donnée par $z = f(x, y)$ où f est une fonction à *deux* variables.

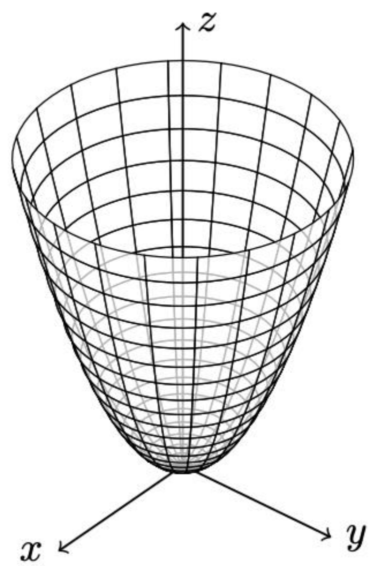
Exemple :

L'expression $y = x^2$ décrit une *parabole.*



$f(x) = x^2$

L'expression $z = x^2 + y^2$ décrit un *paraboloïde de révolution.*



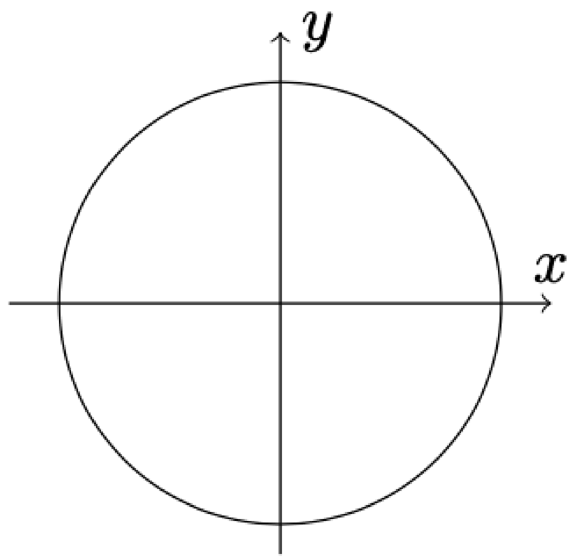
$f(x, y) = x^2 + y^2$

Exemples introductifs

Équations implicites :
Une courbe dans le plan ($\mathbb{R}^2$) peut être donnée par $F(x, y) = 0$ où F est une fonction à *deux* variables.
Une surface dans l'espace ($\mathbb{R}^3$) peut être donnée par $F(x, y, z) = 0$ où F est une fonction à *trois* variables.

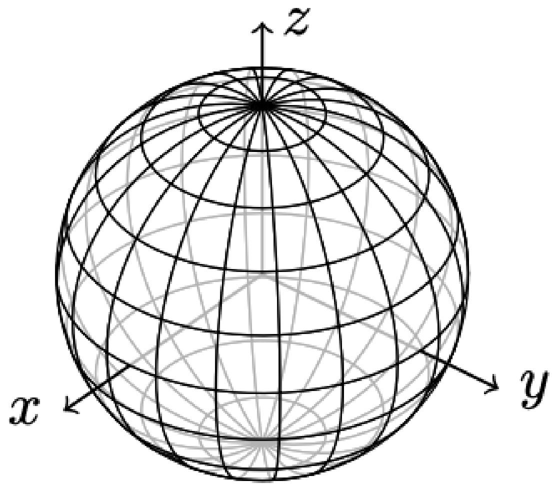
Exemple :

L'expression $x^2 + y^2 - 4 = 0$ décrit un *cercle* centré dans l'origine de rayon 2 :



$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$$

L'expression $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ décrit une *sphère* centrée dans l'origine de rayon 2 :



$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

Équations cartésiennes

Forme cartésienne explicite :

Nous représentons une surface dans l'espace via l'équation cartésienne explicite :

$$z = f(x, y)$$

c'est-à-dire comme de graphe d'une fonction à deux variables. À chaque valeur de x et de y correspond une valeur z tel que le point (x, y, z) appartient à la surface.

Forme cartésienne implicite :

Une surface dans l'espace peut également être représentée avec une équation implicite :

$$F(x, y, z) = 0$$

c'est-à-dire comme l'ensemble des zéros d'une fonction de trois variables.

Remarque : toute équation explicite d'une surface dans l'espace

$$z = f(x, y)$$

peut être vue comme équation implicite où $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.

L'inverse de cette affirmation n'est pas si évident, pour certaines surfaces données sous forme implicite, l'équation explicite n'est pas si triviale à déterminer.

Exercice

On considère les fonctions :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 9 \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 9.$$

a. Quelle est la courbe dans le plan décrite par l'équation $f(x,y) = 0$?

b. Quelle est la surface dans l'espace décrite par l'équation $g(x,y,z) = 0$?

c. Et l'équation $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 9 = 0$ que décrit-elle ?

Équations paramétriques d’une surface

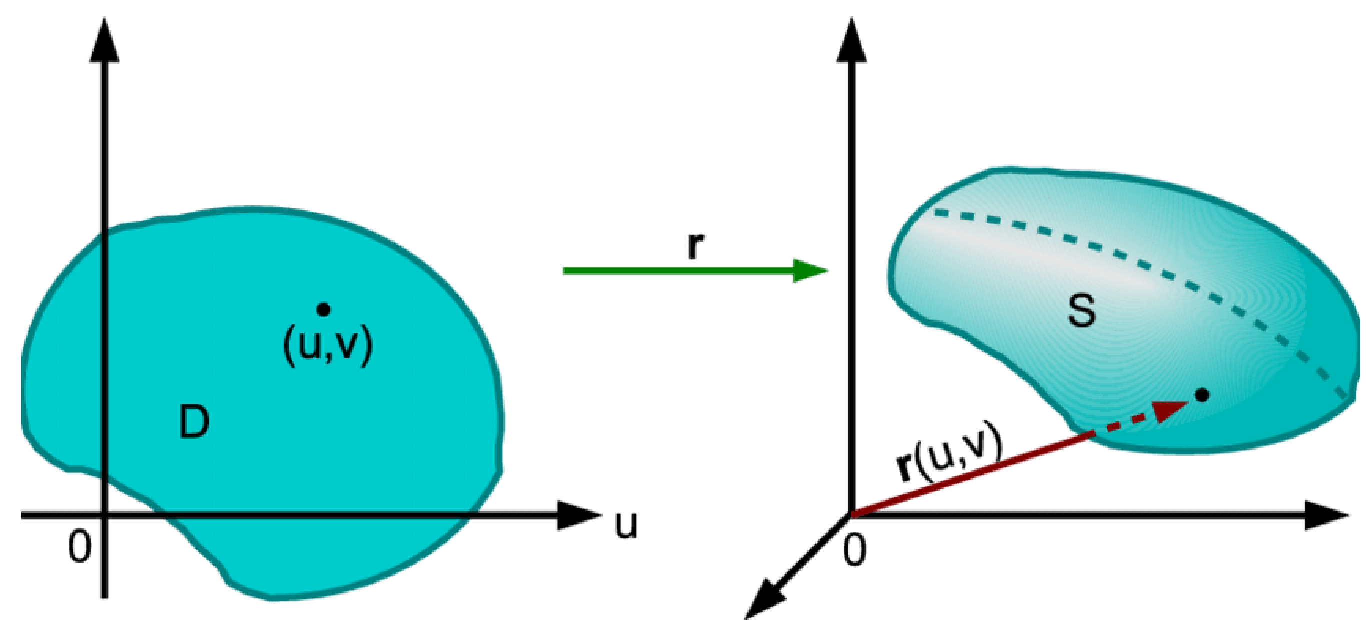
Les équations paramétriques d’**une surface S dans l’espace** sont un triplet de fonctions à deux paramètres :

$$\Sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

où $(u,v) \in D$ sont appelées paramètres et D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On considère que les fonctions x, y, z sont continues et différentiables sur D.

Remarque :

- Pour tout point $M \in D$ dans le plan de coordonnées (u,v), on peut associer un point P sur la surface des coordonnées $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.
- Les équations paramétriques d’une surface ne sont pas uniques.



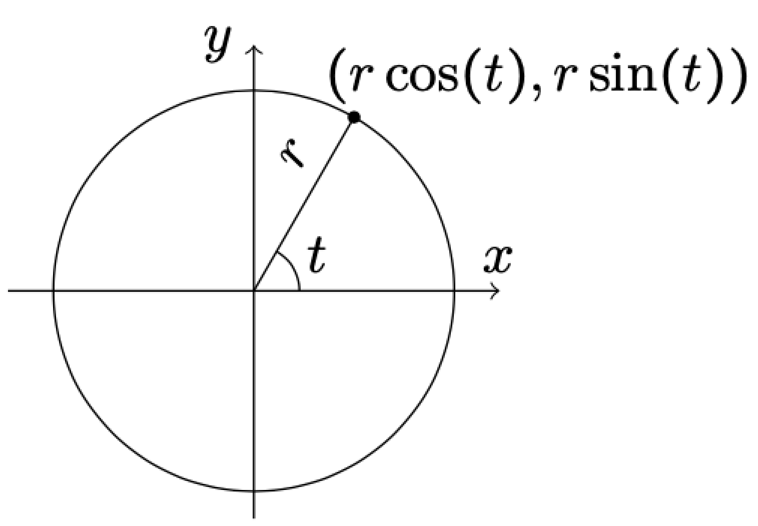
Exemples

Exemple : soit $r > 0$ une constante.

Les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = r\cos(t) \\ y(t) = r\sin(t) \end{cases}, t \in [0,2\pi]$$

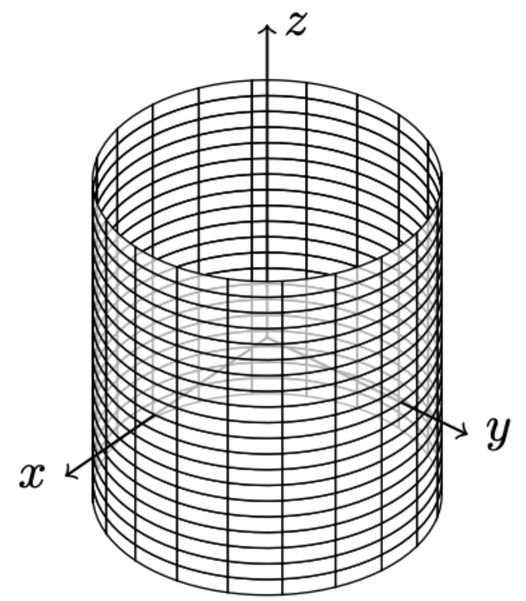
décrivent un *cercle* centré dans l'origine de rayon $r > 0$.



Les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(u,v) = r\cos(u) \\ y(u,v) = r\sin(u), u \in [0,2\pi], v \in \mathbb{R} \\ z(u,v) = v \end{cases}$$

décrivent un *cylindre* centré dans l'origine de rayon $r > 0$.



Vecteurs tangents et vecteur normal

Soit une surface Σ donnée sous forme paramétrique

$$\Sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

- Si on dérive les 3 fonctions par rapport à $\boldsymbol{u}$ en considérant v comme constant on obtient un vecteur tangent:

$$\Sigma_u(u, v) = \left(\frac{\partial}{\partial u} x(u, v), \frac{\partial}{\partial u} y(u, v), \frac{\partial}{\partial u} z(u, v)\right)$$

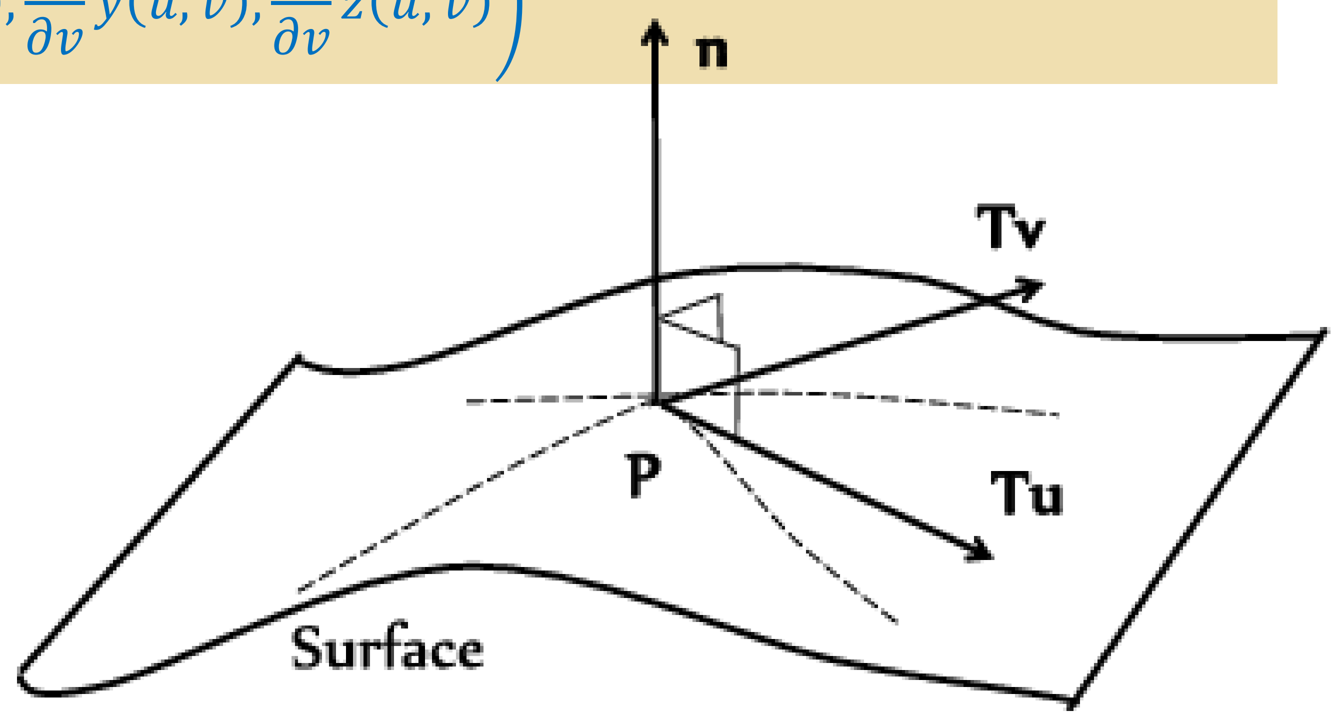
- Si on dérive par rapport à $\boldsymbol{v}$ en considérant u comme constant on obtient un autre vecteur tangent:

$$\Sigma_v(u, v) = \left(\frac{\partial}{\partial v} x(u, v), \frac{\partial}{\partial v} y(u, v), \frac{\partial}{\partial v} z(u, v)\right)$$

Si les vecteurs $\Sigma_u(u, v)$ et $\Sigma_v(u, v)$ ne sont pas colinéaires alors ils forment une base du plan tangent à la surface.

De plus leur produit vectoriel est un **vecteur normal** au plan tangent et donc à la surface.

$$\vec{n}_\Sigma = \Sigma_u(u, v) \times \Sigma_v(u, v)$$



Exemple : vecteur normal à un cône

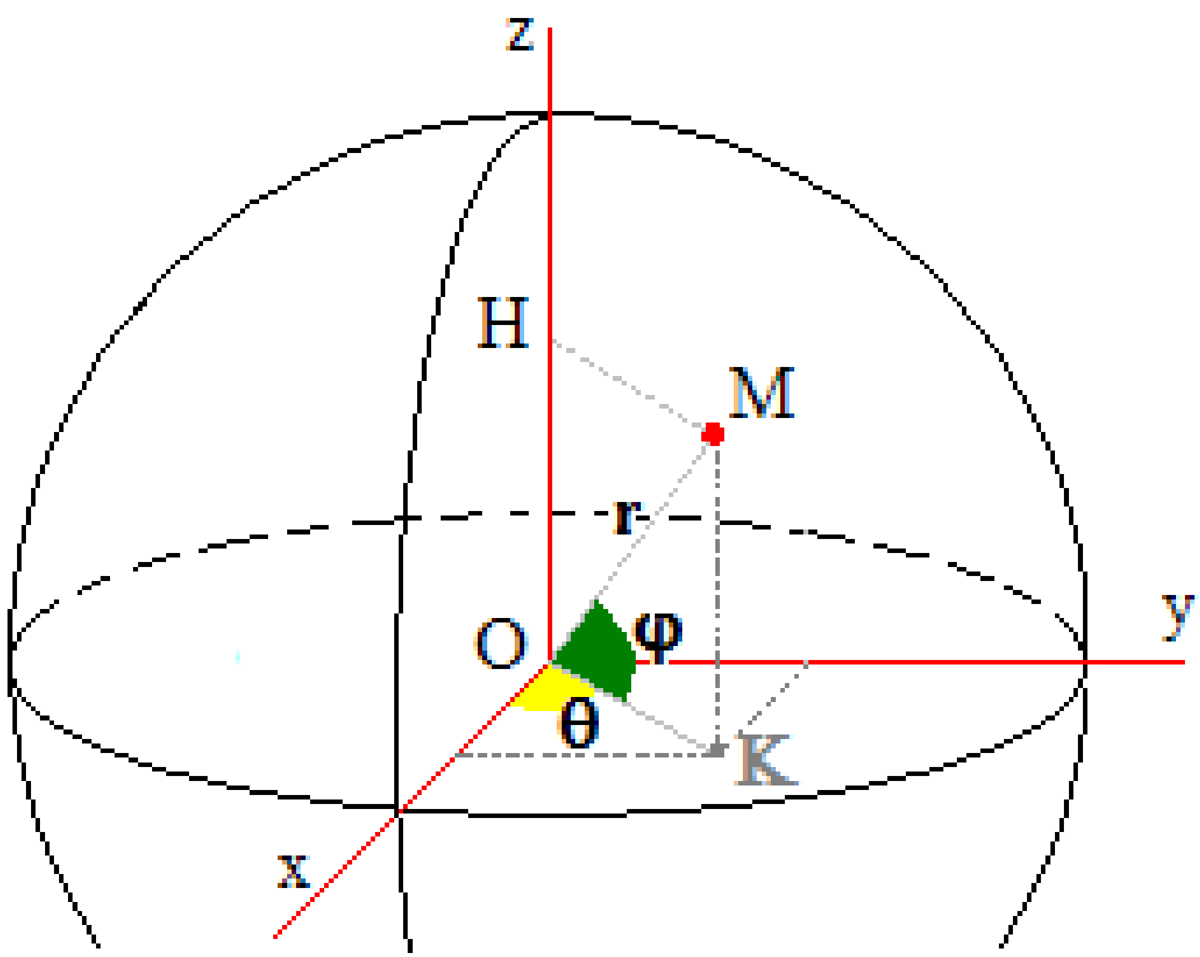
$$\Sigma(\mathrm{u},\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} u\cos t \\ u\sin t \\ u \end{pmatrix} \qquad 0 \le u \le h \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\Sigma_u(u,t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_t(u,t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{u}\sin t \\ \mathrm{u}\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_u \times \Sigma_t = \begin{vmatrix} e_1 & \cos t & -u\sin t \\ e_2 & \sin t & u\cos t \\ e_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -u\cos t \\ -u\sin t \\ u \end{pmatrix}$$

Exemple : paramétrisation de la sphère



$$\boldsymbol{z = \overline{OH} = r \cdot \sin(\varphi)}$$

$$\boldsymbol{\overline{OK} = r \cdot \cos(\varphi)}$$

$$\boldsymbol{x = \overline{OK} \cdot \cos(\theta) = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta)}$$

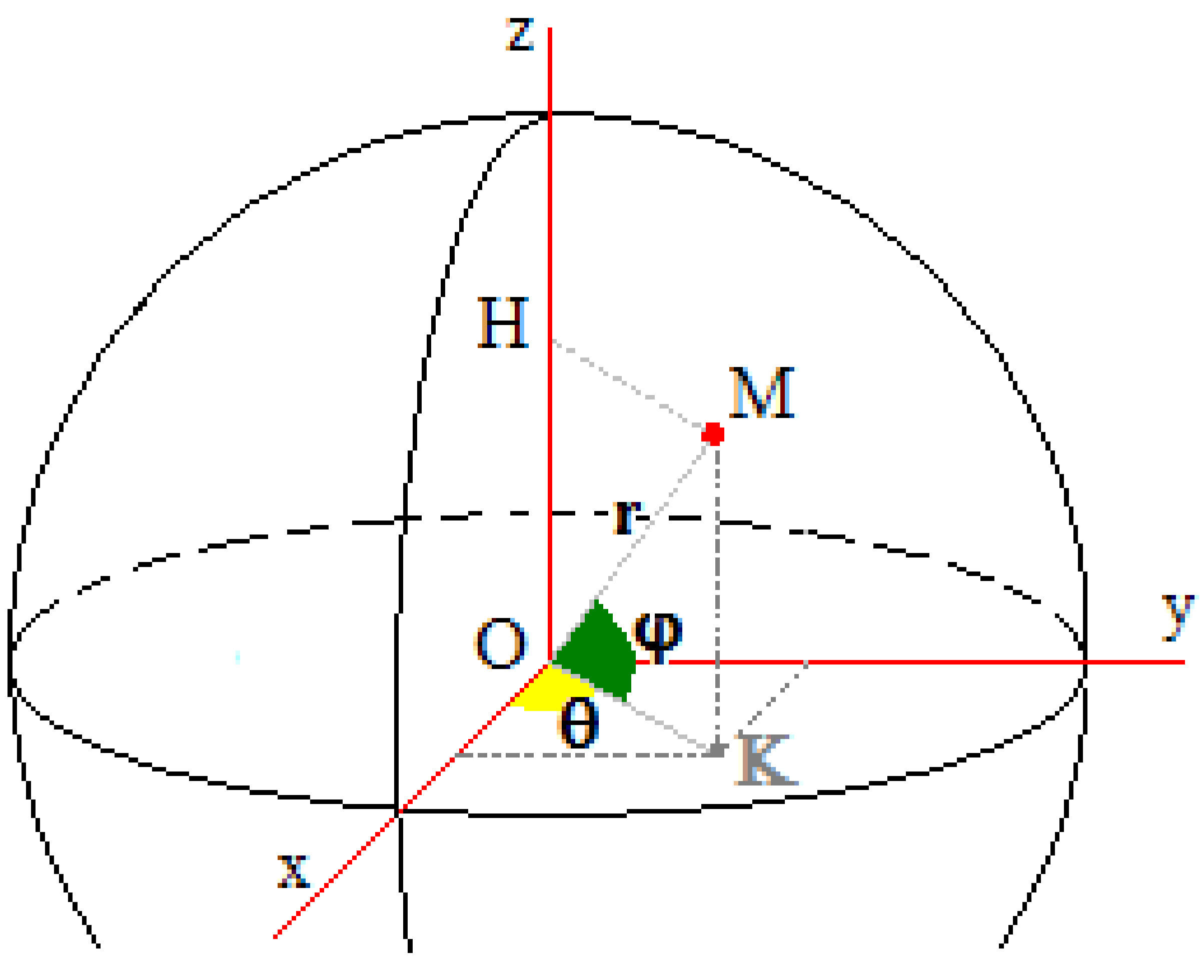
$$\boldsymbol{\mathrm{y} = \overline{OK} \cdot \sin(\theta) = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\theta)}$$

$\boldsymbol{\varphi}$ est la latitude du point M

$\boldsymbol{\theta}$ est la longitude du point M

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \qquad \theta \in [-\pi; \pi]$$

Exemple : paramétrisation de la sphère



$$\Sigma(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_\theta = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{n} = \Sigma_\theta \times \Sigma_\varphi = \begin{vmatrix} e_1 & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ e_2 & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ e_3 & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r^2\cos\varphi\cos^2\theta \\ r^2\cos\varphi\cos\theta\sin\theta \\ r^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Courbes de l'espace

- Une courbe dans l'espace est rarement donnée par une équation explicite et n'admet pas une seule équation implicite, car une équation implicite de la forme $F(x, y, z) = 0$ représente une surface.
- Une courbe de l'espace peut être vue comme intersection de deux surfaces dans l'espace. Ainsi si S_1 et S_2 sont deux surfaces d'équations

$$F_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad F_2(x, y, z) = 0,$$

alors l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

décrit une courbe de l'espace. On dira que les **équations implicites de la courbe dans l'espace** sont données par le système d'équations :

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

Équations paramétriques d'une courbe dans l'espace

Rappel : une courbe dans le plan peut être donnée par un couple d'équations paramétriques

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

où $t \in I$ est le paramètre, $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions de la variable réelle et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Les équations paramétriques d'une **courbe dans l'espace** sont un triplet de fonctions à un paramètre :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

où $t \in I$ est le paramètre. On considère que les fonctions x, y et z sont continues et différentiables sur I.

Remarque :

- Pour tout point $M \in I$, on peut associer un point P sur la courbe des coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$.
- Les équations paramétriques d'une courbe ne sont pas uniques !

Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ une constante. Considérons la courbe de l'espace C donnée implicitement par le système :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ y = x^2 + z^2 \end{cases}$$

Donnez les équations paramétriques de la courbe C.

Vecteur tangent à une courbe

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe dans l'espace.

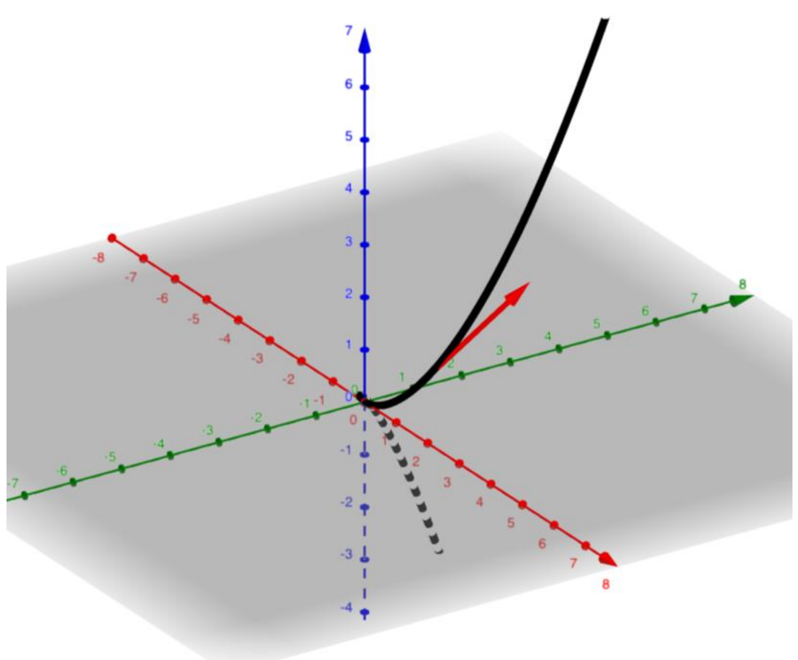
Le vecteur tangent à la courbe dans le point $P = \gamma(t_0)$ est le vecteur

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Exemple :

Le vecteur tangent à la cubique tordue d'équation $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ est

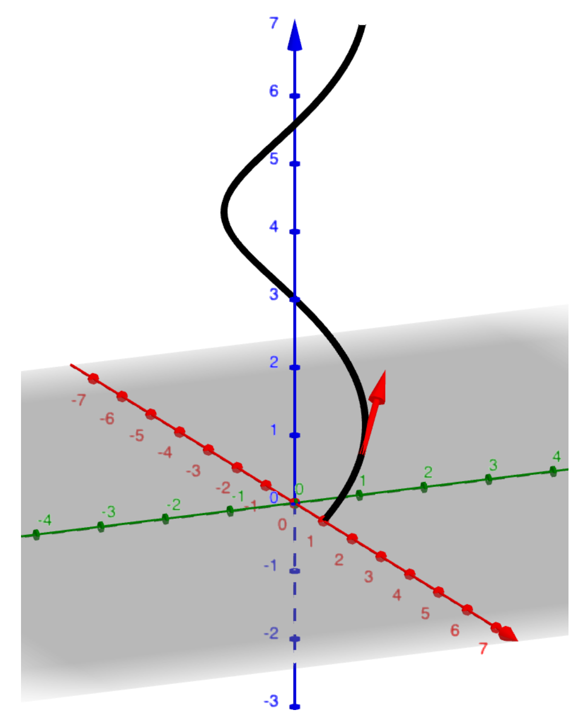
$$\gamma'(t_0) = (1,\ 2t_0,\ 3t_0^2).$$



Exemple :

Le vecteur tangent à l'hélice de rayon 1 d'équation $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ est

$$\gamma'(t_0) = (-\sin(t_0), \cos(t_0), 1).$$



Longueur d'un arc de courbe dans l'espace

Considérons la courbe de l'espace donnée sous forme paramétrique

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad \text{où } t \in I.$$

Alors la longueur d'un élément infinitésimal est donnée (Pythagore) par

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\ dt = \|\gamma'(t)\|\ dt$$

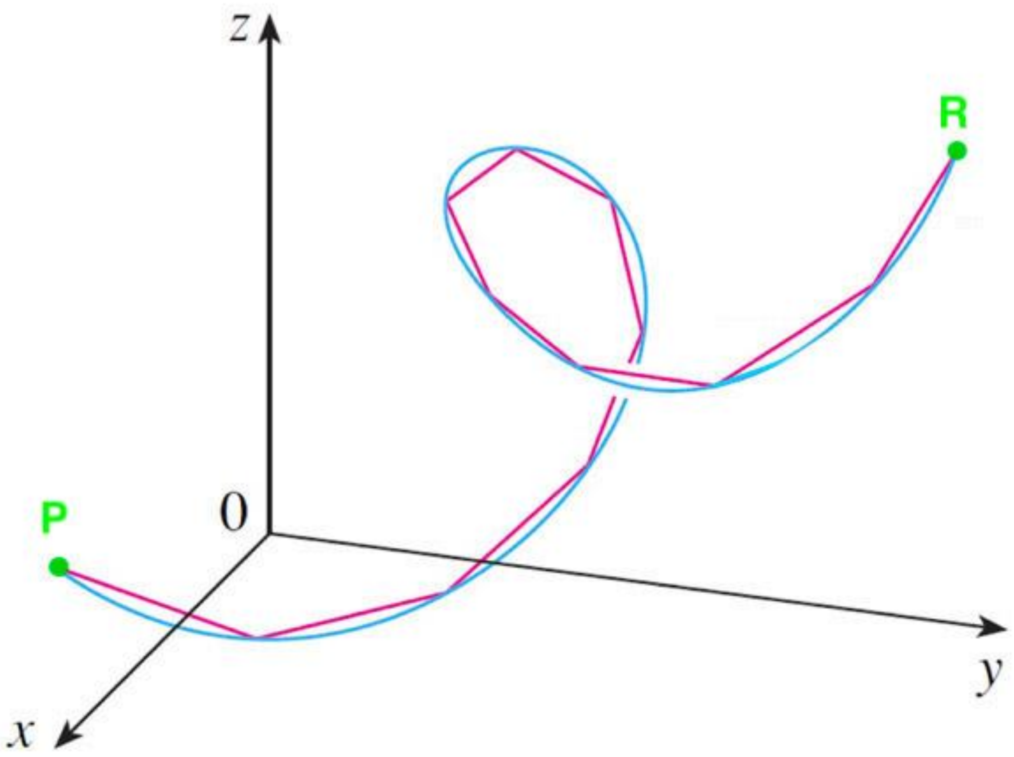
Où $\boldsymbol{\gamma'(t)}$ est le **vecteur tangent** à la courbe.

La longieur d'un arc de courbe entre deux points P et R est alors donnée par l'intégrale

$$L = \int_{t_P}^{t_R} \|\gamma'(t)\|\ dt = \int_{t_P}^{t_R} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\ dt$$

avec

- t_P est la valeur du paramètre t qui donne le point P
- t_R est la valeur du paramètre t qui donne le point R

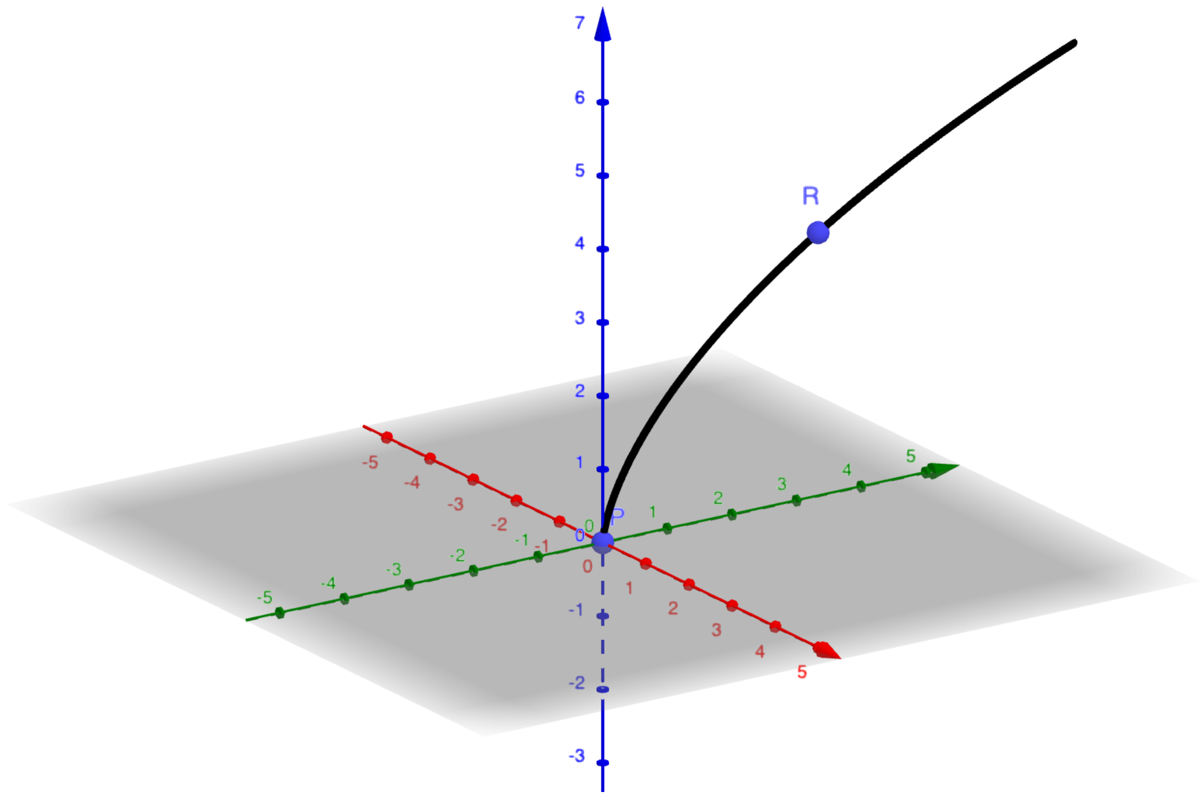


Exercice

Calculer la longueur d'arc de la courbe d'équations paramétriques

$$\gamma(t) = \left(t^2, \frac{8}{3}t^{3/2}, 4t\right), t \in \mathbb{R}^+$$

entre les points $P = \gamma(0)$ et $R = \gamma(1)$.



Courbure

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe dans l'espace et $P = \gamma(t_0)$ un point de cette courbe.

Le vecteur tangent est $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

Si l'on dérive encore une fois on trouve

$$\boldsymbol{\gamma''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0))}$$

que l'on peut appeler **le vecteur-accélération** (si le paramètre t est considéré comme le temps).

Définition : La courbure de γ au point P est alors donnée par

$$\boldsymbol{\kappa(t_0) = \frac{\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\|}{\|\gamma'(t_0)\|^3}}$$

On peut interpréter la courbure comme la rotation par unité de distance du vecteur tangent.

Si on parcourt la courbe à vitesse constante $\gamma'(t) = 1$ on peut montrer que $\gamma''(t_0)$ est orthogonal à $\gamma'(t)$ (l'accélération est centripède) et la courbure se simplifie en

$$\kappa(t_0) = \|\gamma''(t_0)\|$$

Rappel : la courbure d'une courbe plane est donnée par $\kappa(t_0) = \dfrac{\det(\gamma'(t_0) \quad \gamma''(t_0))}{\|\gamma'(t_0)\|^3}$

Dans les 2 formules, le numérateur est égal à l'aire du parallélogramme construit sur γ' et γ''
Ainsi ces deux formules sont tout à fait analogues pour ne pas dire les mêmes !!!

Torsion

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe dans l'espace et $P = \gamma(t_0)$ un point de cette courbe.

Le vecteur tangent est $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

Le vecteur accélération est $\gamma''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0))$

Si l'on dérive encore une fois on obtient

$$\gamma'''(t_0) = (x'''(t_0), y'''(t_0), z'''(t_0))$$

Définition : La torsion de γ au point P est alors donnée par

$$\boldsymbol{\tau(t_0) = \frac{[\gamma'(t_0)\ ,\ \gamma''(t_0)\ ,\ \gamma'''(t_0)]}{\|\gamma'(t_0)\ \times \gamma''(t_0)\|^2} = \frac{\gamma'''(t_0) \cdot \big(\gamma'(t_0)\ \times \gamma''(t_0)\big)}{\|\gamma'(t_0)\ \times \gamma''(t_0)\|^2}}$$

On peut interpréter la torsion comme la « vitesse » avec laquelle la courbe quitte le plan osculateur au point P

Comme le produit mixte a un signe, **la torsion a un signe**.

- Si la torsion est nulle, la courbe reste dans le plan osculateur
- Si la torsion est > 0 alors la courbe quitte le plan osculateur dans la direction du produit vectoriel $\gamma' \times \gamma''$
- Si la torsion est < 0 alors la courbe quitte le plan osculateur dans la direction opposée au produit vectoriel $\gamma' \times \gamma''$

Exemple : l'hélice

On considère la courbe

$$\gamma(t) = (R\cos t\,,\ R\sin t\,,\ a\cdot t) \qquad R>0,\quad a\in\mathbb{R}$$

$$\gamma'(t) = (-R\sin t\,,\ R\cos t\,,\ a)$$

$$\gamma''(t) = (-R\cos t\,,\ -R\sin t\,,\ 0)$$

$$\gamma'''(t) = (R\sin t\,,\ -R\cos t\,,\ 0)$$

Et donc $\qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + a^2} = \sqrt{R^2+a^2}$

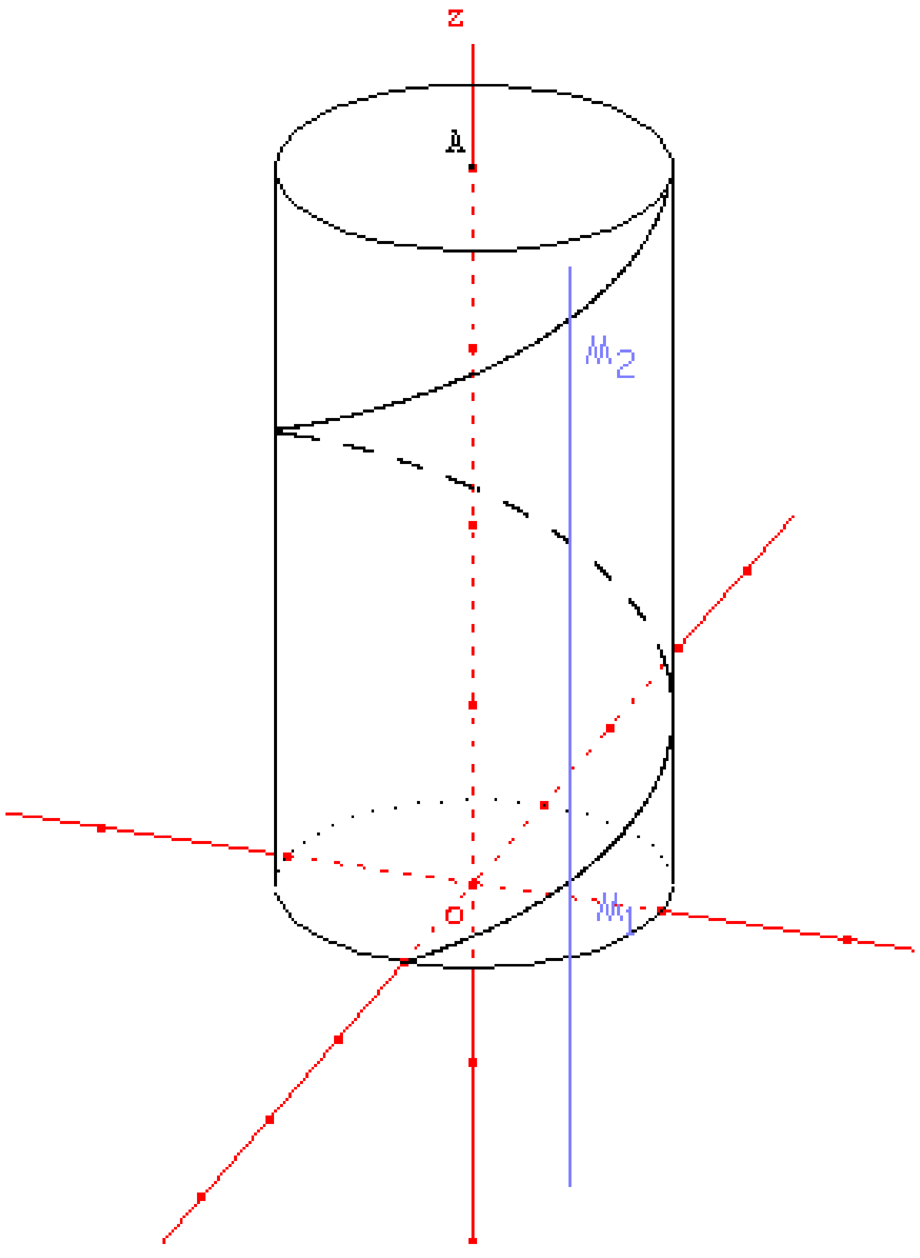
$$\gamma'(t_0)\times\gamma''(t_0) = \begin{vmatrix} e_1 & -R\sin t & -R\cos t \\ e_2 & R\cos t & -R\sin t \\ e_3 & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} aR\sin t \\ -aR\cos t \\ R^2 \end{pmatrix}$$

Sa norme vaut

$$\|\gamma'(t_0)\times\gamma''(t_0)\| = \sqrt{a^2R^2\sin^2 t + a^2R^2\cos^2 t + R^4} = R\cdot\sqrt{a^2+R^2}$$

La courbure vaut alors

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t_0)\times\gamma''(t_0)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = R\cdot\frac{\sqrt{a^2+R^2}}{(R^2+a^2)^{3/2}} = \frac{R}{(R^2+a^2)}$$



Hélice sur un cylindre

Exemple : l'hélice

Le produit mixte

$$[\gamma', \gamma'', \gamma''']$$

est égal à $[\gamma''', \gamma', \gamma''] = \gamma''' \cdot (\gamma' \times \gamma'')$ ce qui fait ici:

$$\gamma'''(t) \cdot \big(\gamma'(t) \times \gamma''(t)\big) = \begin{pmatrix} R\sin t \\ -R\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} aR\sin t \\ -aR\cos t \\ R^2 \end{pmatrix} = aR^2 \sin^2 t + aR^2 \cos^2 t = aR^2$$

La torsion vaut alors

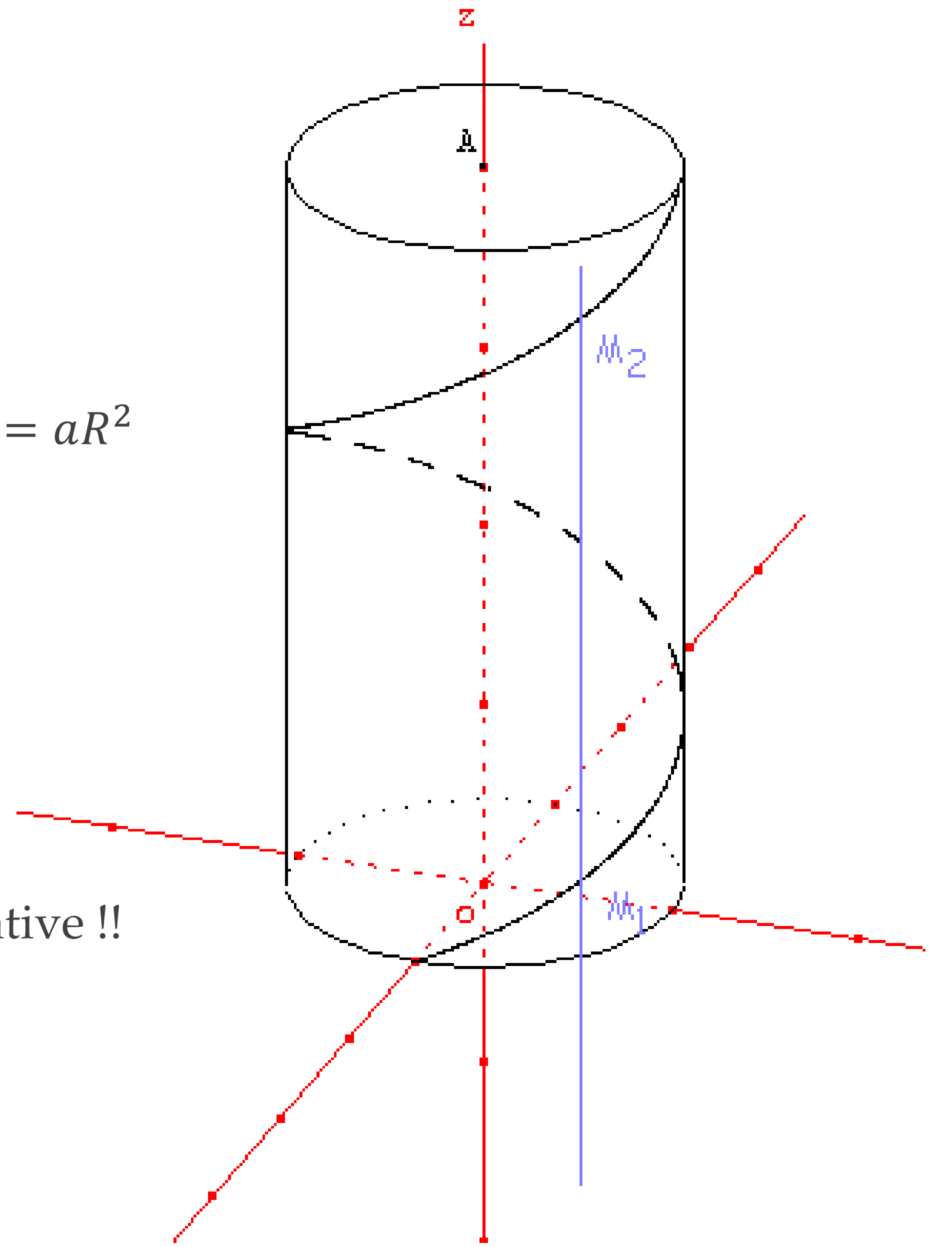
$$\tau(t) = \frac{aR^2}{a^2 + R^2}$$

Si $a > 0$ l'hélice monte le long de Oz et la torsion est positive.

Si $a < 0$ l'hélice descend dans le sens inverse de l'axe Oz et la torsion est négative !!

Pour R et a fixé la torsion est <u>**constante tout le long de l'hélice**</u>.

Pour R fixé, la torsion est maximale pour $a = \pm R$



Hélice sur un cylindre

Résumé

équations des courbes et des surfaces

	Équation cartésienne explicite	Équation cartésienne implicite	Équations paramétriques
Courbes dans le plan	$y = f(x)$	$F(x, y) = 0$	$\gamma(t) = \big(x(t),\ y(t)\big)$ $t \in I \subset \mathbb{R}$
Courbes dans l'espace		$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$	$\gamma(t) = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$ $t \in I \subset \mathbb{R}$
Surfaces (dans l'espace)	$z = f(x, y)$	$F(x, y, z) = 0$	$r(u, v) =$ $\big(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\big)$ $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$

Exemples

	Équation cartésienne explicite	Équation cartésienne implicite	Équations paramétriques
Courbes dans le plan	Cubique $y = x^3$	Cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$	Parabole avec axe horizontal $\gamma(t) = \left(t^2,\ t\right),\quad t \in \mathbb{R}$
Courbes dans l'espace		Droite $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z - 5 = 0 \end{cases}$	Hélice $\gamma(t) = \left(\cos(t),\ \sin(t), t\right),$ $t \in \mathbb{R}$
Surfaces (dans l'espace)	Paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$	Sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	Cylindre $r(u, v) = \left(r\cos(u), r\sin(u), v\right),$ $u \in [0,2\pi],\ v \in \mathbb{R}$