Le Heydar Aliyev Center (Bakou)

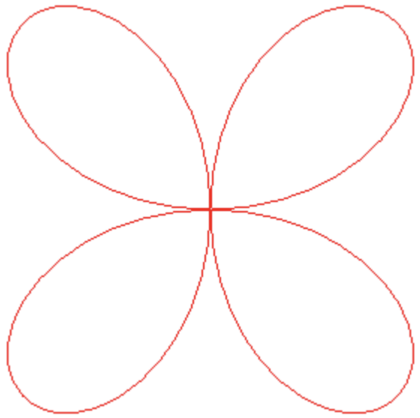
Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Courbes planes

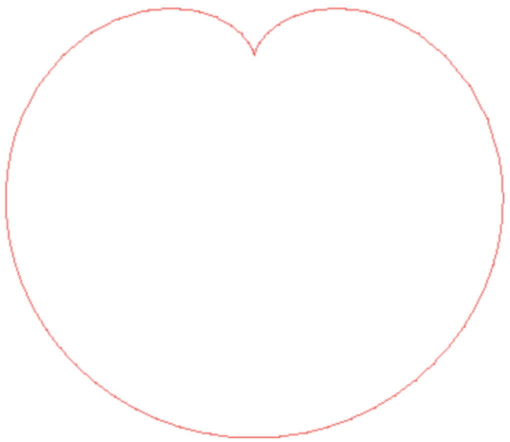
Philippe Chabloz

Exemples dans le plan

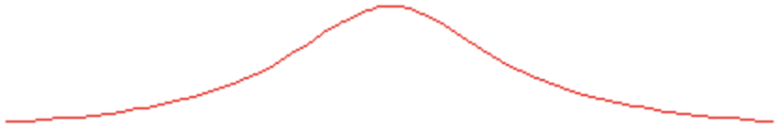
(pour le plaisir des yeux..)



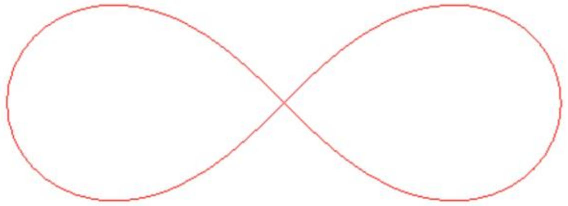
Trèfle à quatre feuilles



Cardioïde



Cubique d’Agnesi



Lemniscate de Bernoulli

Spirale d’Archimède

Parabole semi-cubique

Définition

Une **représentation paramétrique d'une courbe** (C) est un système d'équations où les coordonnées des points de la courbe sont exprimées en fonction d'un *paramètre* (souvent noté t, k, θ,…).

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions de la variable réelle $t \in I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. À tout réel t, on associe le point $M(t)$ défini par le vecteur $\overrightarrow{OM} = (x(t), y(t))$.

L'ensemble C des points $M(x, y)$ tels que

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in I,$$

est appelé **courbe paramétrée de paramètre t**.

Remarques :

- Les équations paramétriques d'une courbe ne sont pas uniques !
- Une courbe n'est pas nécessairement le graphe d'une fonction ; c'est pourquoi on parle de courbe paramétrée et non pas de fonction paramétrée.

Droites dans le plan

Soit un point $P(p_x, p_y)$ et un vecteur directeur de la droite $\vec{d} = (d_x, d_y)$. Une **représentation paramétrique de la droite qui passe par P de vecteur directeur $\vec{d}$** est donnée par le système suivant :

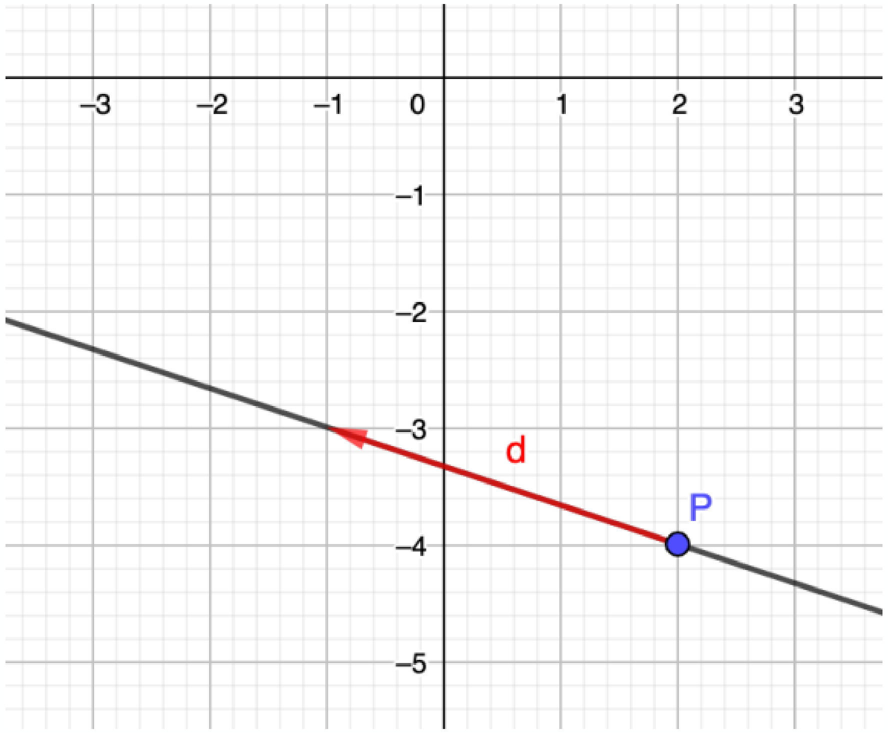
$$\begin{cases} x(t) = p_x + d_x\,t \\ y(t) = p_y + d_y\,t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

À chaque valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ correspond un point sur la droite.

Par exemple, le système d'équations

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 3t \\ y(t) = -4 + t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

représente une droite qui passe par le point $P(2, -4)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (-3,1)$.



Paraboles dans le plan

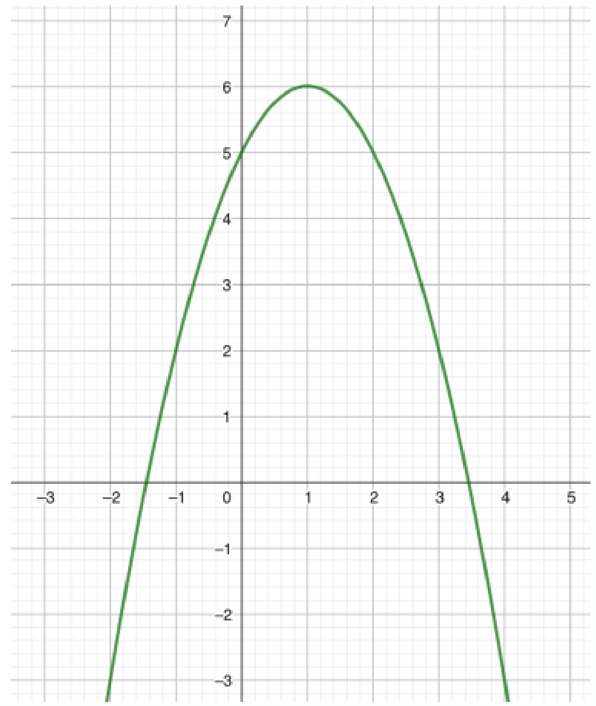
Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$ trois constantes réelles. Une **représentation paramétrique d'une parabole** est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = at^2 + bt + c \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

En général, toute fonction continue f peut être utilisée pour générer une représentation paramétrique d'une courbe en définissant le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

Pour chaque valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ on obtient un point situé sur la courbe.



Cercles dans le plan

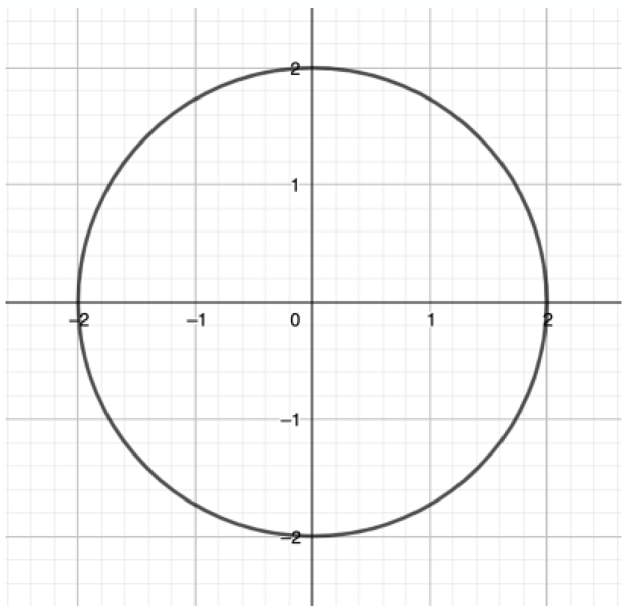
Une **représentation paramétrique d'un cercle centrée dans l'origine et de rayon** $r > 0$ est donnée par le système suivant :

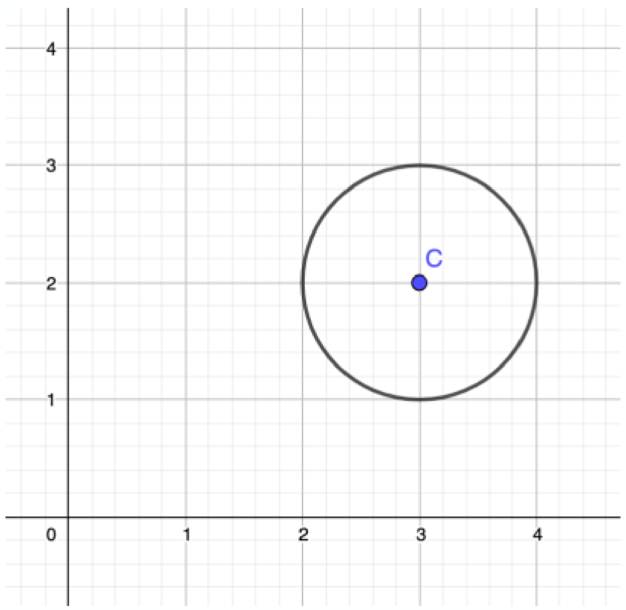
$$\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in [0,2\pi[\ .$$

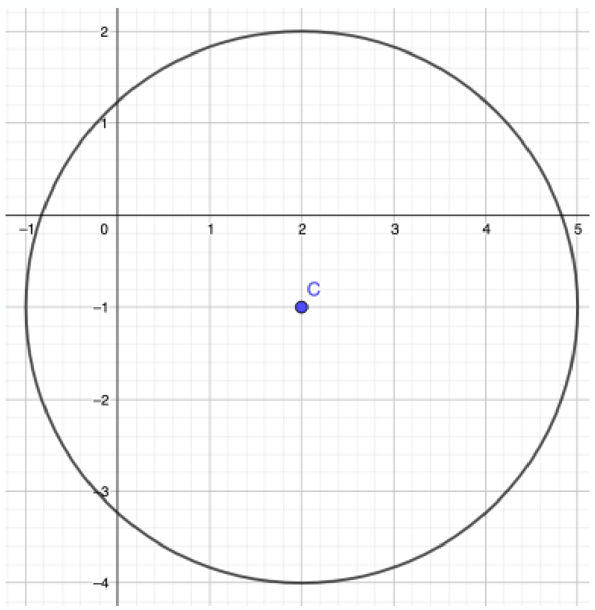
De même, une **représentation paramétrique d'un cercle centrée dans le point** $C(c_x, c_y)$ **et de rayon** $r > 0$ est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = c_x + r \cdot \cos(t) \\ y(t) = c_y + r \cdot \sin(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in [0,2\pi[\ .$$

Remarque : un cercle n'est pas le graphe d'une fonction !







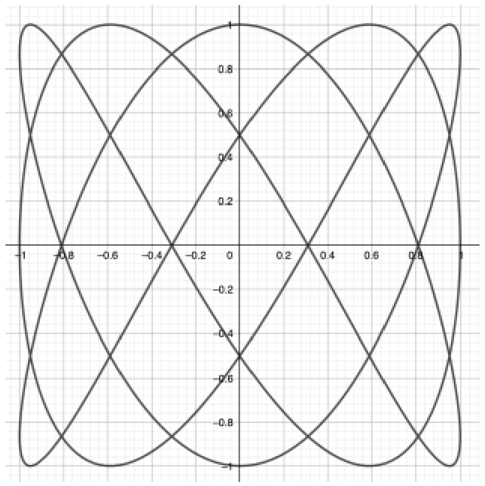
Exemples *exotiques*

Courbes de Lissajous

Les courbes de Lissajous (ou courbes de Bowditch) sont données par la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a\sin(\omega_x t + \phi_x) \\ y(t) = b\sin(\omega_y t + \phi_y) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0{,}2\pi[$$

où $a, b, \omega_x, \omega_y > 0$, $n \geq 1$ et $0 \leq \phi_x, \phi_y \leq \pi/2$. En électronique, on peut faire apparaître des figures de Lissajous sur un oscilloscope.



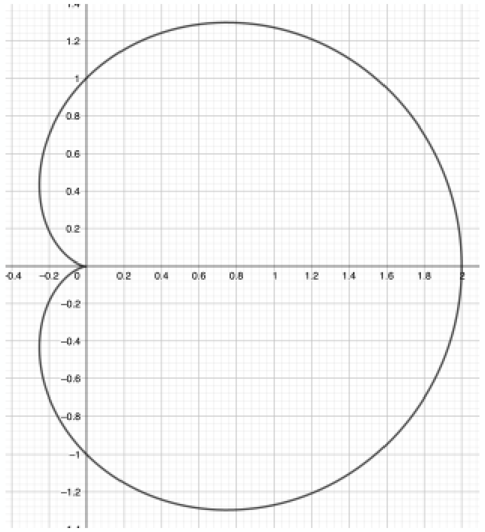
$$\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \sin(5t + \pi/2) \end{cases}$$

Cardioïde

La trajectoire d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur un second cercle de même diamètre décrit une courbe appelée cardioïde. Une paramétrisation de la cardioïde est :

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta(1 + \cos\theta) \\ y(\theta) = a\sin\theta(1 + \cos\theta) \end{cases} \quad \text{où } \theta \in [0{,}2\pi[$$

où $a > 0$.



$$\begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) \\ y(\theta) = \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) \end{cases}$$

Pour de nombreux autres exemples de courbes dans le plan, visitez le site web : https://mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml

Représentation par une forme cartésienne

On peut *parfois*, en éliminant le paramètre entre les deux équations du système qui définit la courbe, obtenir y comme fonction de x, et ramener l'étude de la courbe à celle d'une courbe définie par une fonction $y = f(x)$.

Forme cartésienne explicite :

Nous représentons une courbe plane via l'équation :

$$y = f(x)$$

c'est-à-dire comme fonction d'une variable indépendante. À chaque valeur x correspond une valeur y, tel que le point (x, y) appartient à la courbe.

Forme cartésienne implicite :

Une courbe peut également être représentée sous la forme :

$$F(x, y) = 0$$

c'est-à-dire comme fonction de deux variables indépendantes.

Cercles dans le plan

Obtenir l'expression cartésienne d'une courbe peut être difficile, voire impossible.

- Pr exemple, considérons les équations paramétriques d'un cercle centré en $C(c_x, c_y)$ et de rayon $r > 0$

$$\begin{cases} x = c_x + r \cdot \cos(t) \\ y = c_y + r \cdot \sin(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in [0,2\pi[\,.$$

- Nous ne pouvons pas facilement isoler le paramètre t, cependant en élevant les deux équations au carré nous pouvons utiliser une identité trigonométrique pour éliminer le paramètre :

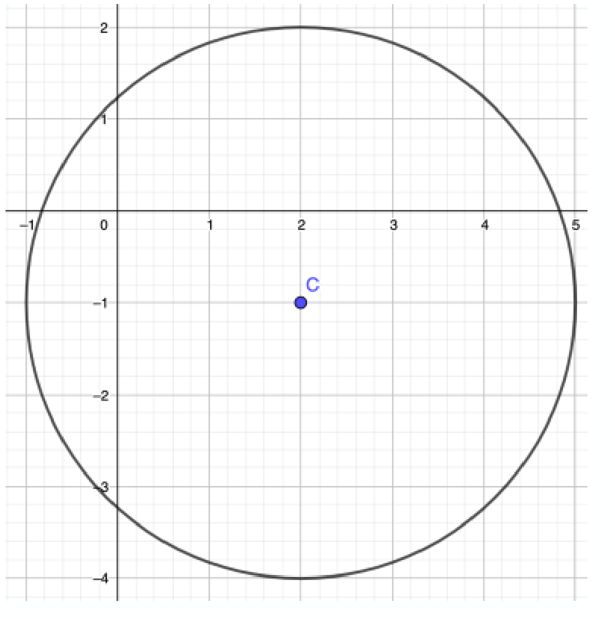
$$\begin{cases} (x - c_x)^2 = r^2 \cdot \cos^2(t) \\ (y - c_y)^2 = r^2 \cdot \sin^2(t) \end{cases}$$

- Ainsi, en additionnant les deux équations, nous obtenons **l'équation cartésienne implicite d'un cercle** :

$$(y - c_y)^2 + (x - c_x)^2 = r^2$$

- Puisque le cercle ne peut pas être représenté comme le graphe d'une fonction, nous ne pouvons pas trouver une expression unique pour **l'équation cartésienne explicite**, cependant nous pouvons obtenir deux fonctions décrivant la moitié supérieure et inférieure du cercle respectivement :

$$y = c_y + \sqrt{r^2 - (x - c_x)^2} \quad \text{et} \quad y = c_y - \sqrt{r^2 - (x - c_x)^2}$$

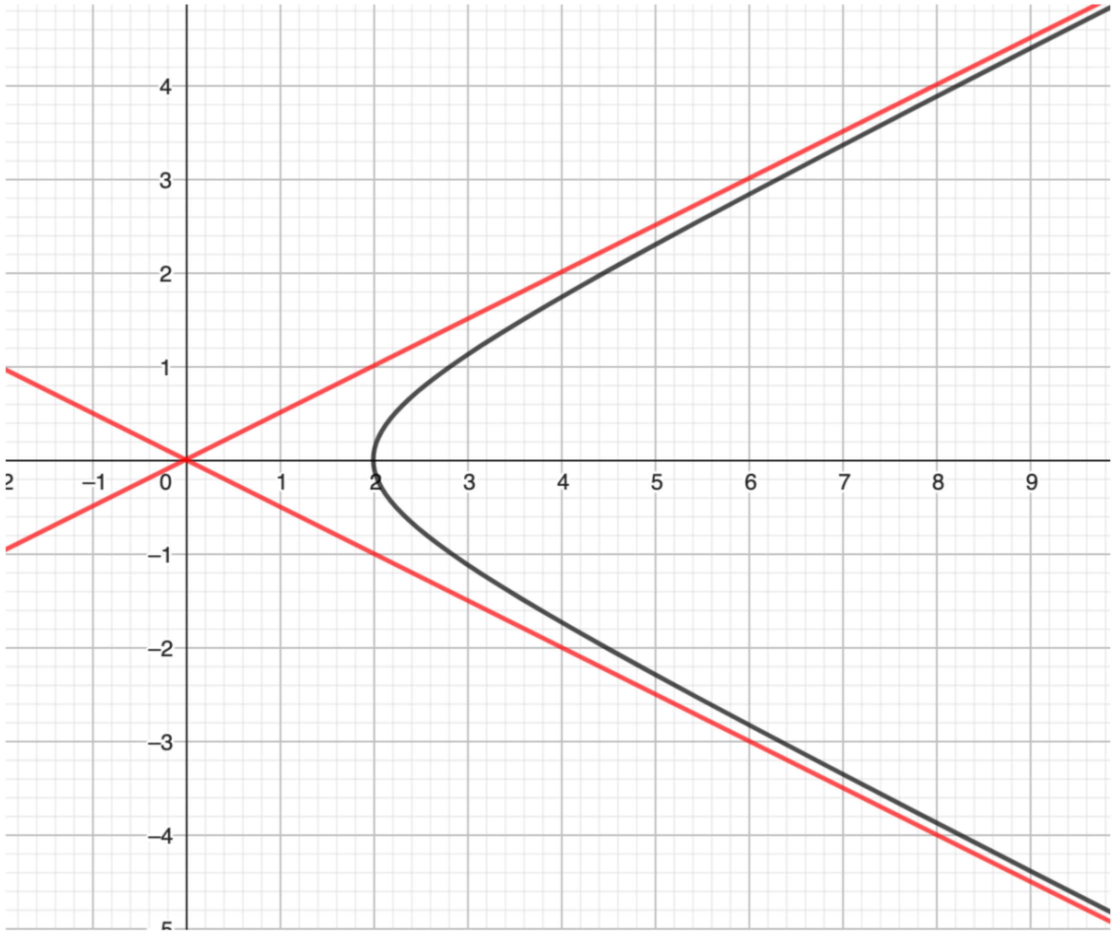


Exercice

a. On considère les fonctions suivantes : $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \cos(2t)$, où $t \in \mathbb{R}$.
Exprimer y en fonction de x et en déduire la *nature* de la courbe obtenue.

b. On considère les fonctions suivantes : $x(t) = 2\cosh(t)$ et $y(t) = \sinh(t)$, où $t \in \mathbb{R}$.
Exprimer y en fonction de x et en déduire la *nature* de la courbe obtenue.

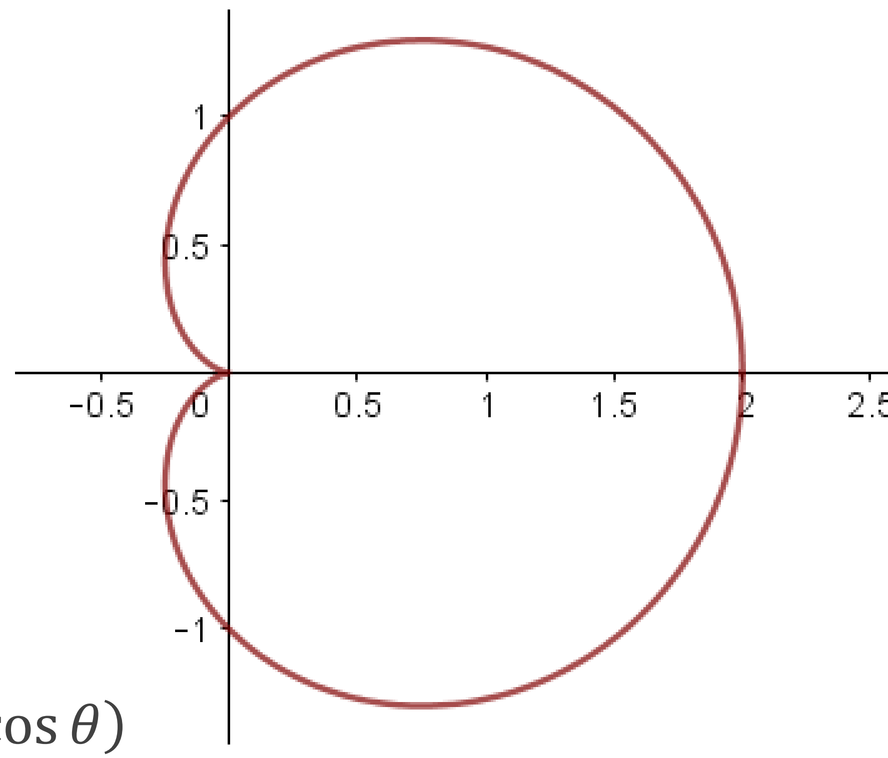
Exercice



Résumé des trois représentations

- La meilleure représentation est sans aucun doute la **représentation paramétrée**. Cette représentation est également utile pour étudier les problèmes dynamiques puisqu'elle a une notion de vitesse de déplacement le long de la courbe.
- La **représentation en forme implicite** est, selon certains points de vue, meilleure que la représentation explicite. Cependant, on peut rencontrer des problèmes quand il faut expliciter l'une des deux variables en fonction de l'autre : souvent, c'est très compliqué, quand ce n'est pas impossible.
- La **représentation en forme explicite** a de nombreuses limites géométriques, du fait que très souvent, une courbe a une description très complexe sous cette forme, qui n'est donc pas adaptée à l'étude des propriétés géométriques.

Cardioïde : forme cartésienne



La cardioïde est donnée sous forme paramétrique par

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot (1 + \cos\theta) \cdot \cos\theta \\ x(t) = a \cdot (1 + \cos\theta) \cdot \sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0{,}2\pi]$$

Pour trouver la forme cartésienne implicite (éliminer θ) on calcule:

$$x^2 = a^2 \cdot (1 + \cos\theta)^2 \cdot \cos^2\theta \qquad\qquad y^2 = a^2 \cdot (1 + \cos\theta)^2 \cdot \sin^2\theta$$

Donc $\quad x^2 + y^2 = a^2 \cdot (1 + \cos\theta)^2 \quad$ et alors

$$x^2 + y^2 - ax = a^2 \cdot (1 + \cos\theta)^2 - a^2 \cdot (1 + \cos\theta) \cdot \cos\theta = a^2 \cdot (1 + \cos\theta)$$

ce qui donne $\quad (x^2 + y^2 - ax)^2 = a^4 \cdot (1 + \cos\theta)^2 = a^2 \cdot (x^2 + y^2)$

L'équation cartésienne implicite de la cardioïde est donc $\quad \boxed{(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 \cdot (x^2 + y^2)}$

que l'on peut aussi écrire $\quad \boxed{(x^2 + y^2)^2 - 2ax \cdot (x^2 + y^2) - a^2\, y^2 = 0}$

Vecteur tangent

- Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrique :

$$c(t) = (x(t), y(t))$$

où $x: I \to \mathbb{R}$ et $y: I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables.

- Le **vecteur tangent à la courbe** en $P = \gamma(t_0)$ est défini comme le vecteur :

$$c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

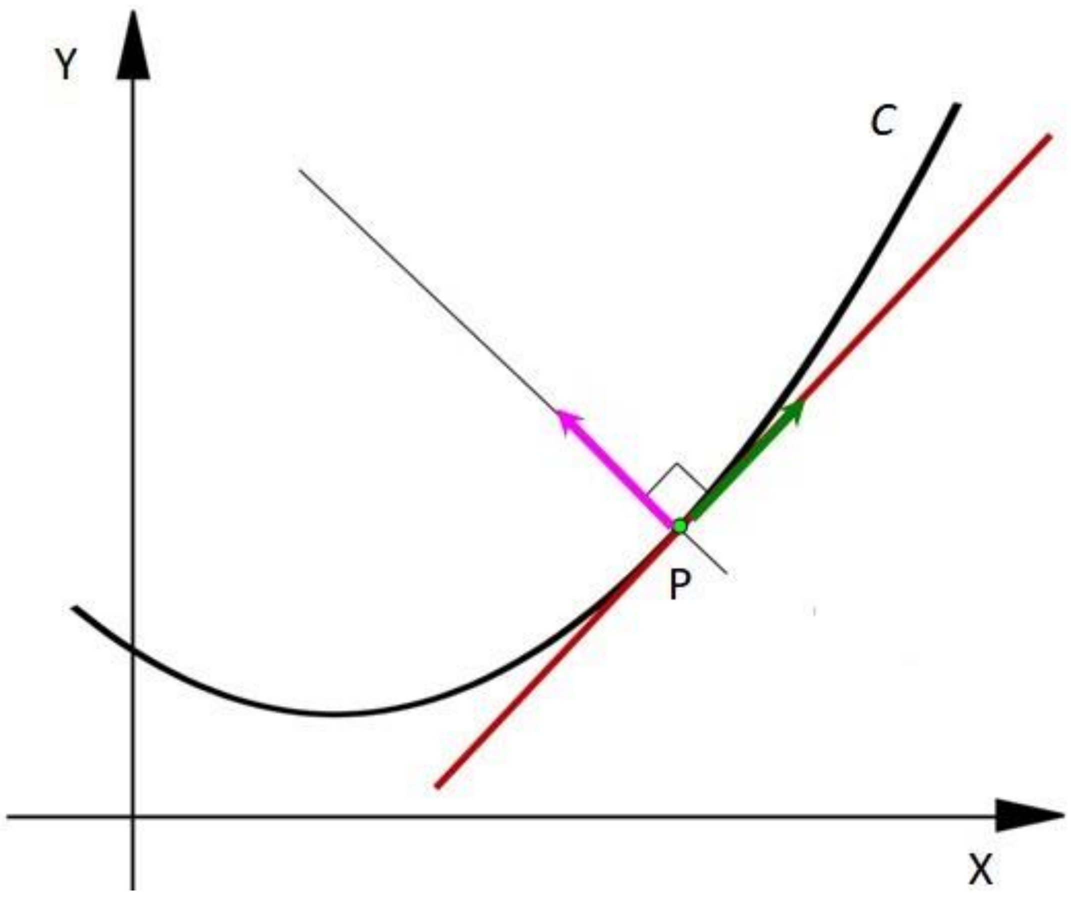
- Le **vecteur normal à la courbe** en $P = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^2$ est défini comme le vecteur :

$$n(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0))$$

- La **pente de la droite tangente** à la courbe en $P = \gamma(t_0)$ est donnée par

$$m(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \qquad \text{si} \quad x'(t_0) \neq 0$$

- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors le vecteur tangent (donc la tangente) est vertical !
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$ alors le vecteur tangent (donc la tangente) est horizontal !



Exemple

Courbe : $c(t) = (t^2, t^3)$

Différentiation d'une équation implicite

Soit γ une courbe donnée sous forme cartésienne implicite

$$(c) : F(x, y) = 0$$

Pour calculer la pente de la tangente à c, on considère y comme une fonction de variable x, c'est-à-dire $y = y(x)$, et on dérive l'équation implicite $F(x, y) = 0$ par rapport à x.

La dérivée de y devient alors y'. En isolant y' on obtient une formule qui donne y' en fonction des deux coordonnées x et y:

$$y' = y'(x, y)$$

Un vecteur tangent en un point $P(x_P, y_P)$ de la courbe est alors $c'(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_P, y_P) \end{pmatrix}$

Exemple

Soit la courbe $(\gamma) : x^3y^2 + y^3 + x^2 - 4x - 5y + 1 = 0$ et le point $P(1,2)$ qui est sur γ.

En considérant y comme fonction de x et en dérivant cette équation par rapport à x on obtient

$$3x^2y^2 + 2x^3 \cdot y \cdot y' + 3y^2 \cdot y' + 2x - 4 - 5y' = 0$$

En isolant y' ceci donne

$$y' \cdot (2x^3y + 3y^2 - 5) = 4 - 2x - 3x^2y^2 \qquad y' = \frac{4 - 2x - 3x^2y^2}{2x^3y + 3y^2 - 5}$$

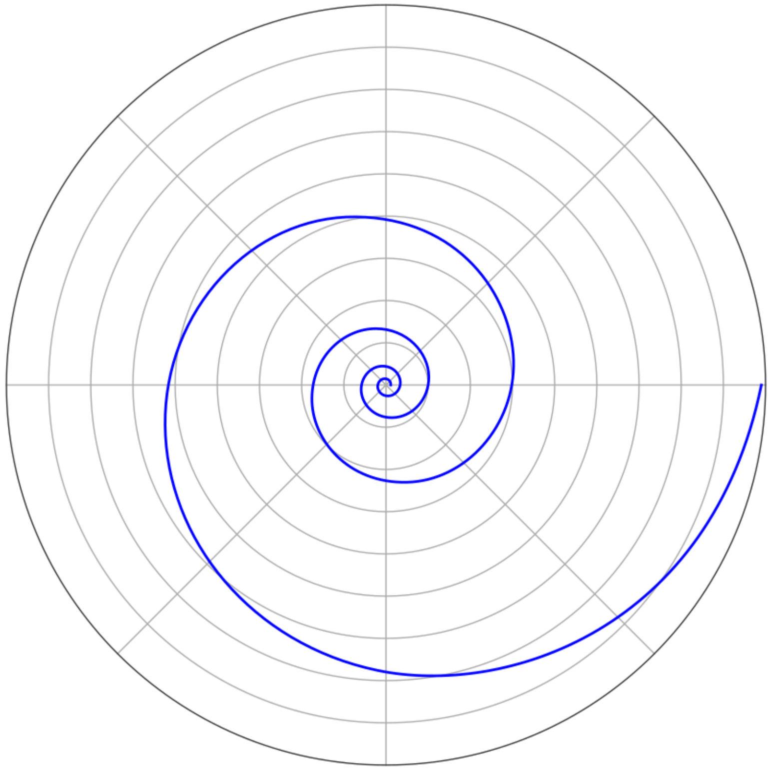
Au point $P(1,2)$ on trouve $y' = \frac{4-2-12}{4+12-5} = -\frac{10}{11}$. Un vecteur tangent est alors $c'(P) = (1, -\frac{10}{11})$.

L'équation de la tangente à γ en P est donc $\qquad y = -\frac{10}{11}x + \frac{32}{11}$

Spirales logarithmiques

La spirale logarithmique est donnée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = r\, e^{kt} \cos t \\ y(t) = r\, e^{kt} \sin t \end{cases} \qquad r > 0, \qquad k > 0, \qquad t \geq 0$$



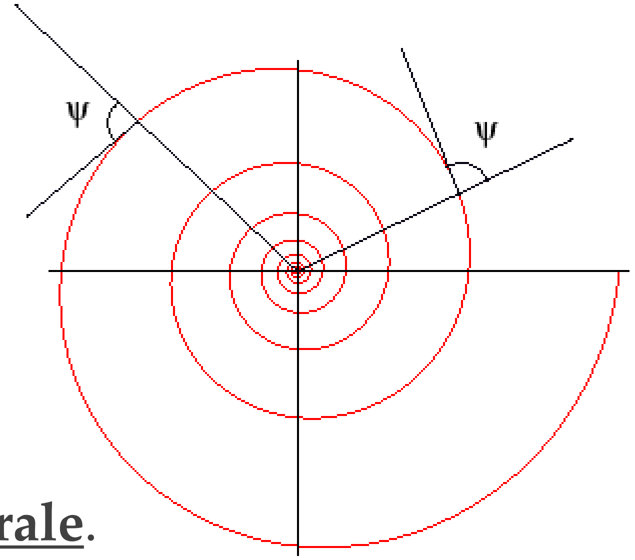
Le vecteur tangent est donné par

$$c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\, e^{kt} \cdot (\mathrm{k} \cos t - \sin t) \\ r\, e^{kt} \cdot (\mathrm{k} \sin t + \cos t) \end{pmatrix}$$

Si on fait le produit scalaire du vecteur position c(t) par le vecteur tangent c'(t) on trouve

$$c(t) \cdot c'(t) = re^{kt} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot re^{kt} \begin{pmatrix} k \cos t - \sin t \\ \mathrm{k} \sin t + \cos t \end{pmatrix} =$$

$$= r^2 \cdot e^{2kt} \cdot (k \cos^2 t - \cos t \sin t + \sin t \cos t + \mathrm{k} \sin^2 t) = k\, r^2 \cdot e^{2kt}$$



L'angle entre le vecteur tangent $c'(t)$ et le vecteur position c(t) vérifie donc

$$\cos \Psi = \frac{k\, r^2 \cdot e^{2kt}}{\|c(t) \cdot\| \cdot \|c'(t)\|} = \frac{k\, r^2 \cdot e^{2kt}}{re^{kt} \cdot \sqrt{1+k} \cdot\ r\, e^{kt}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \qquad \rightarrow \qquad \tan \Psi = \frac{1}{k}$$

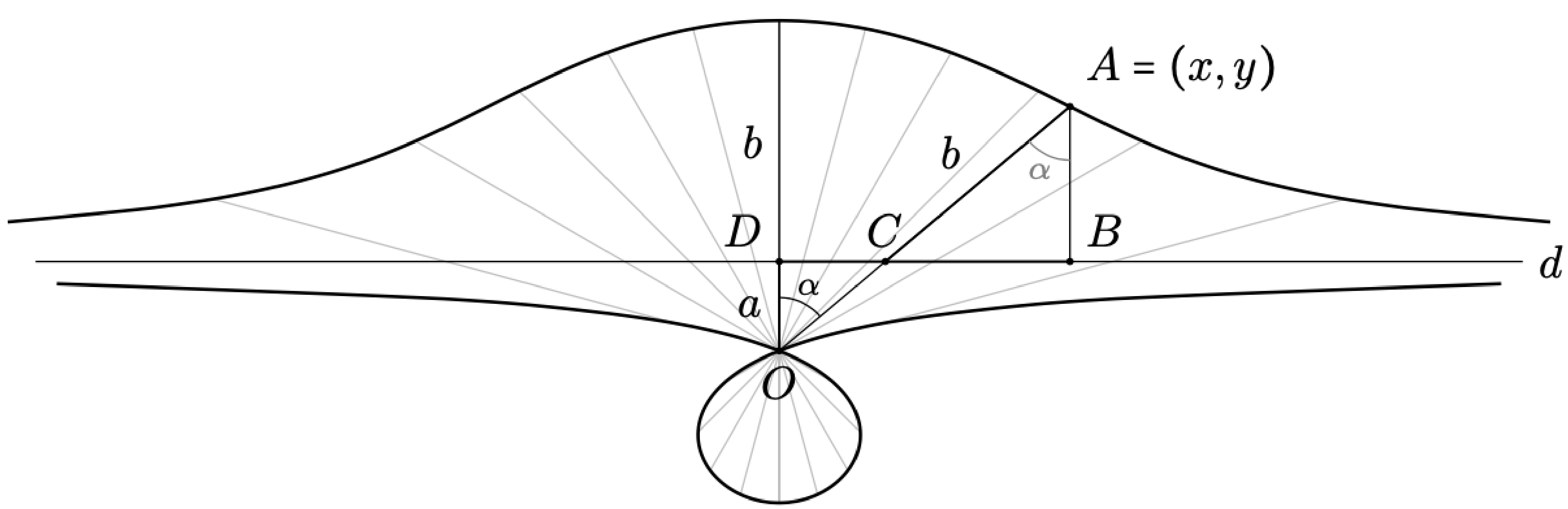
<u>L'angle *Ψ* est indépendant de *t*</u> et est donc le **<u>même pour tous les points de la spirale</u>**.
Ces spirales sont appelées des **spirales équiangles.**

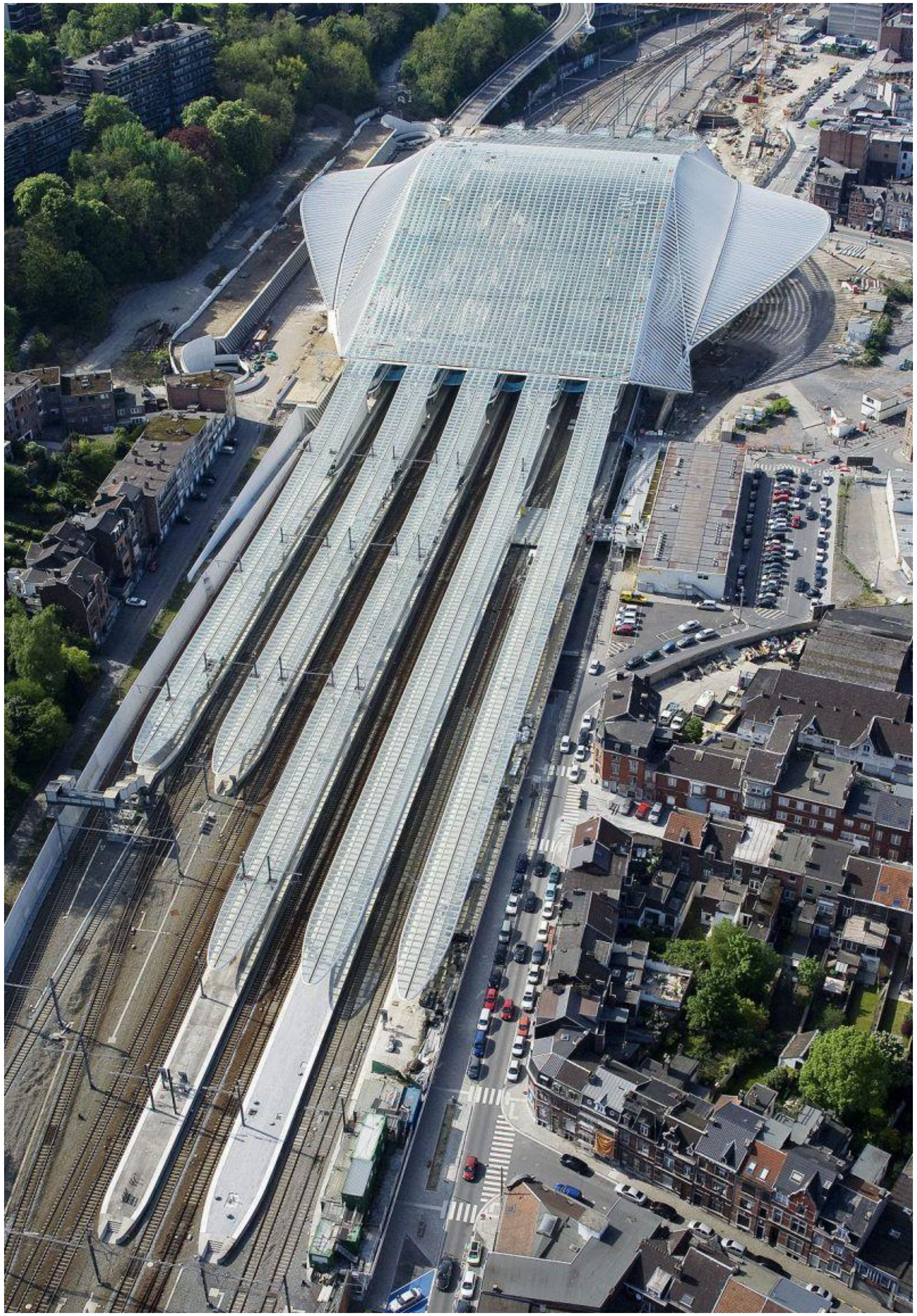
Exemple

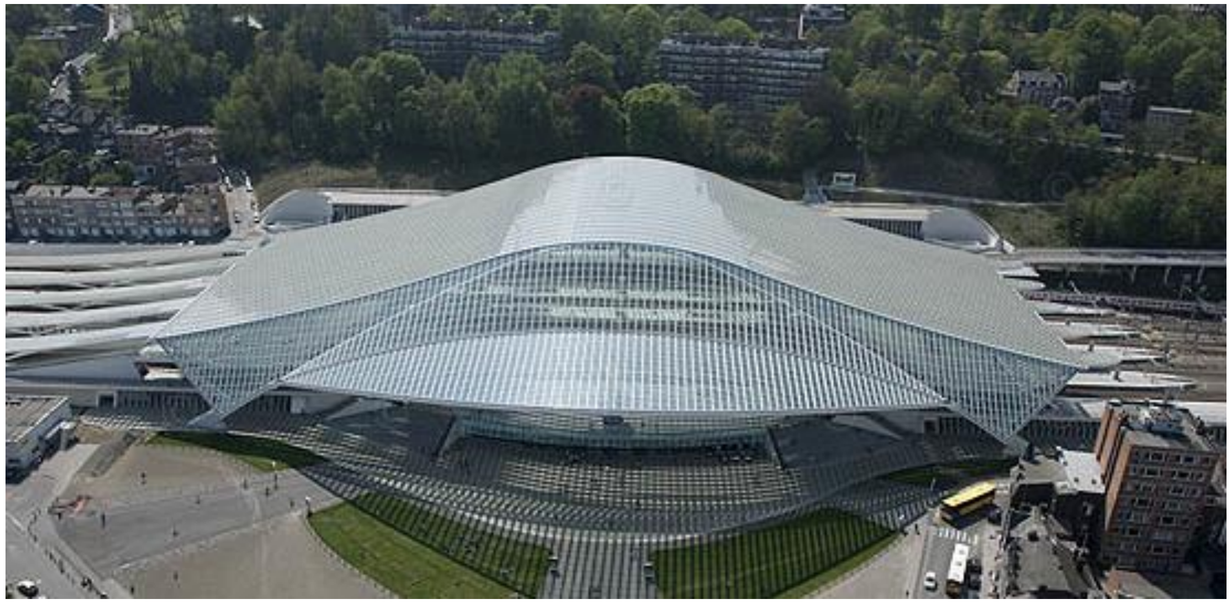
- Hyperbole : $x^2 - 2y^2 = 4$

Conchoïde de Nicomède

- Donnés deux nombres $a, b > 0$ on considère un point O qui, pour simplifier l'exposé, sera considéré comme coïncidant avec l'origine.
- Soit d une droite horizontale à une distance a de O et s une demi-droite issue de O qui forme un angle de α avec la verticale.
- Soit C le point d'intersection de la demi-droite s avec la droite d.
- Depuis C on mesure une distance de b le long de la demi-droite s pour obtenir un point A.
- Le lieu des points A déterminé en faisant varier l'angle α est la conchoïde de Nicomède.
- Lorsque l'angle $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ la distance b sur la demi-droite s est prise dans la direction de O.







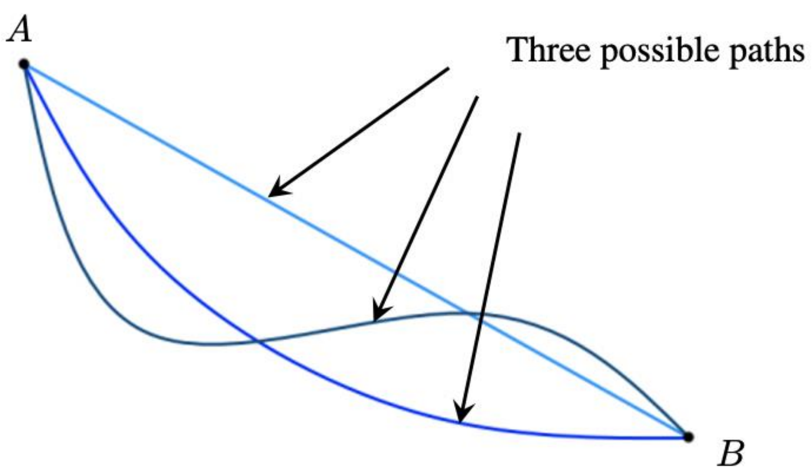
Gare de Liège-Guillemins

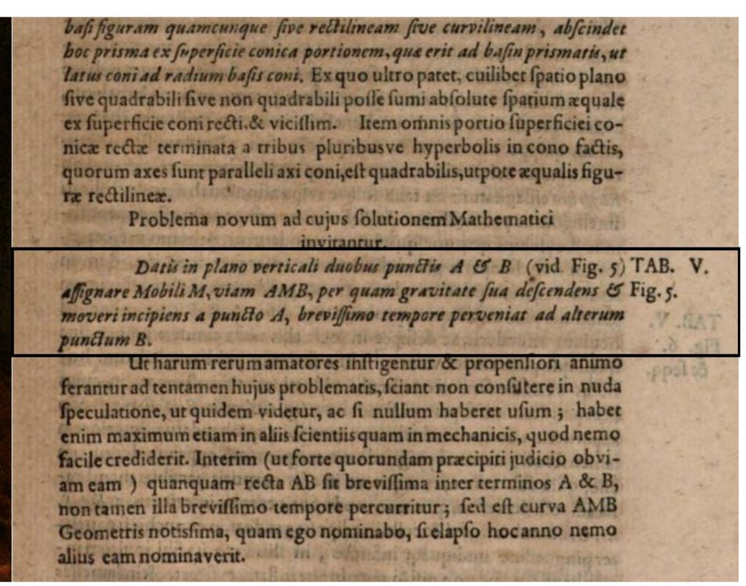
œuvre de l'architecte espagnol Santiago Calatrava

La brachistochrone

En juin 1696, le célèbre mathématicien *Johann Bernoulli* a publié dans les *Acta Eruditorum*, le premier périodique scientifique allemand, le problème suivant :

Étant donné deux points A et B dans un plan vertical, quelle est la courbe tracée par un point soumis à la seule gravité, qui part de A et atteint B dans le temps le plus court.





bafi figuram quamcunque five rectilineam five curvilineam, abfcindet hoc prisma ex fuperficie conica portionem, quæ erit ad bafin prismatis, ut latus coni ad radium bafis coni. Ex quo ultro patet, cuilibet fpatio plano five quadrabili five non quadrabili poffe fumi abfolute fpatium æquale ex fuperficie coni recti, & viciffim. Item omnis portio fuperficiei conicæ rectæ terminata a tribus pluribusve hyperbolis in cono factis, quorum axes funt paralleli axi coni, eft quadrabilis, utpote æqualis figuræ rectilineæ.

Problema novum ad cujus folutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) *affignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate fua defcendens & moveri incipiens a puncto A, breviffimo tempore perveniat ad alterum punctum B.* TAB. V. Fig. 5.

Ut harum rerum amatores inftigentur & propenfiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, fciant non confiftere in nuda fpeculatione, ut quidem videtur, ac fi nullum haberet ufum; habet enim maximum etiam in aliis fcientiis quam in mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam præcipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB fit breviffima inter terminos A & B, non tamen illa breviffimo tempore percurritur; fed eft curva AMB Geometris notisfima, quam ego nominabo, fi elapfo hoc anno nemo alius eam nominaverit.

- Ce défi mathématique est connu sous le nom de problème de la brachistochrone. Même si *Johann Bernoulli* savait déjà comment le résoudre lui-même, il a lancé un défi aux autres mathématiciens d'Europe et leur a accordé six mois pour le résoudre.
- Après ce délai, aucune réponse n'a été donnée. Même *Gottfried Leibniz* a demandé une prolongation du délai. L'après-midi du 29.1.1697, *Isaac Newton* a trouvé le défi dans son courrier. Il l'a ensuite résolu pendant la nuit et a envoyé la solution de manière anonyme.
- Les équations paramétriques de la brachistochrone pour $A(0,0)$ et $B(\pi,-2)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \sin(\theta) \\ y(\theta) = -1 + \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{où} \quad \theta \in [0,\pi]$$

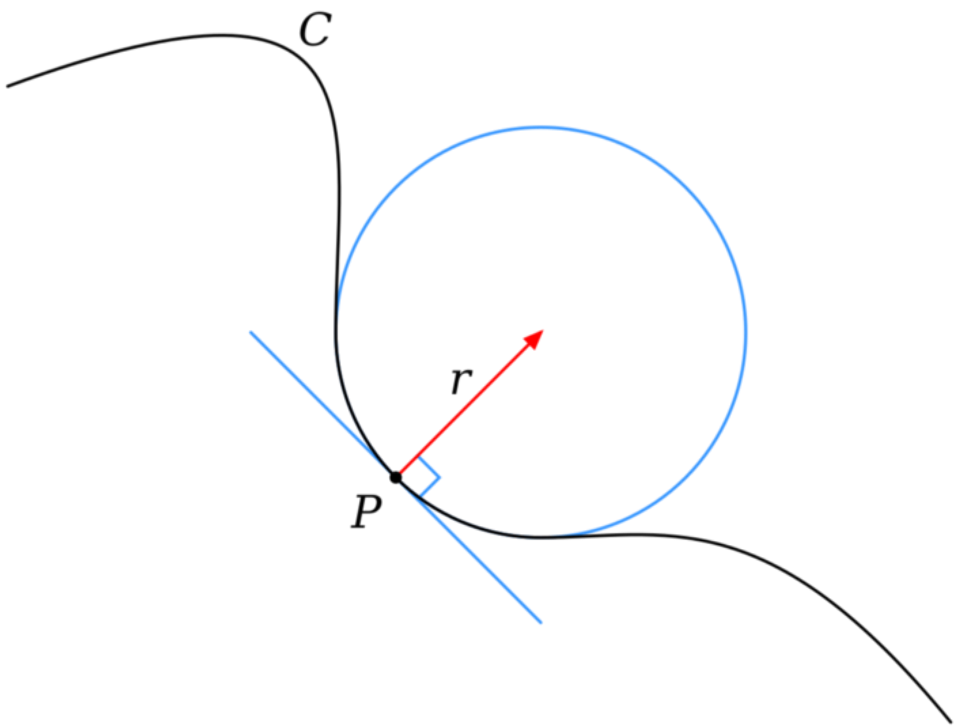
Courbure d’une courbe plane

- **La courbure mesure la manière dont une courbe s'éloigne localement d'une ligne droite.**
- La courbure évalue le rapport entre la variation de la direction de la tangente à la courbe et un déplacement *d’une longueur infinitésimale* sur celle-ci : plus ce rapport est important, plus la courbure est importante.
- *Intuitivement* : la courbure indique de combien il faut tourner le volant d'une voiture pour aborder un virage (volant tourné modérément pour une courbure faible et fortement pour une courbure forte).

Problème (Newton 1671) :

Étant donné une courbe C d’équation $y = f(x)$ et un point $P(a, f(a))$ sur la courbe, où $a \in \mathbb{R}$, trouver le *meilleur* cercle tangent à la courbe au point $P(a, f(a))$.

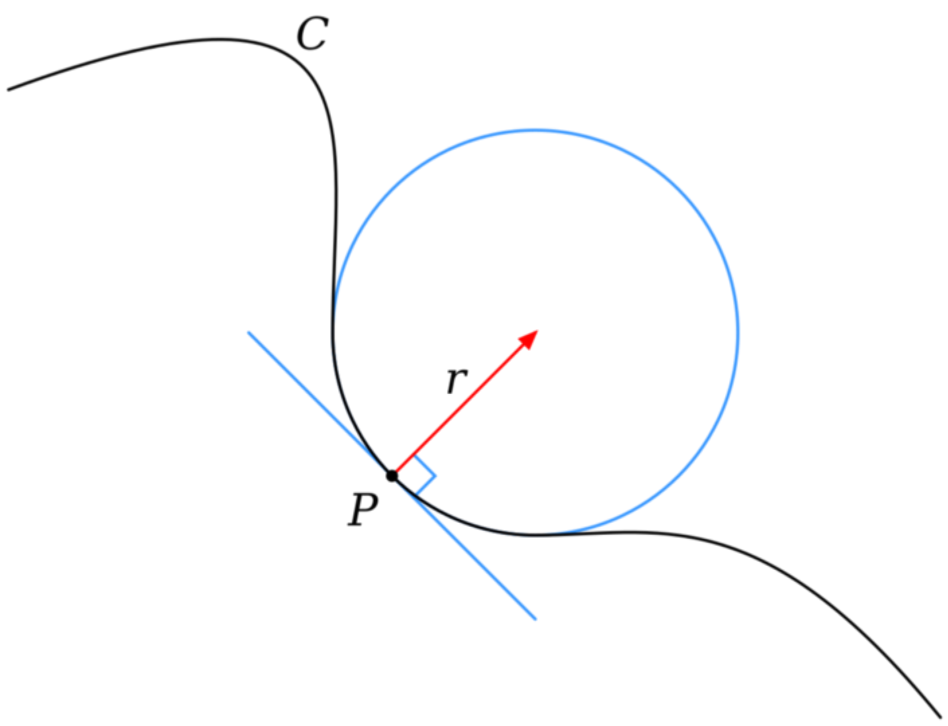
Nous assumerons que la fonction f est dérivable au moins deux fois.



Courbure d'une courbe plane

- **Problème (Newton 1671)** : étant donné une courbe C d'équation $y = f(x)$ et un point $P(a, f(a))$ sur la courbe, où $a \in \mathbb{R}$, trouver le *meilleur* cercle tangent à la courbe au point $P(a, f(a))$.

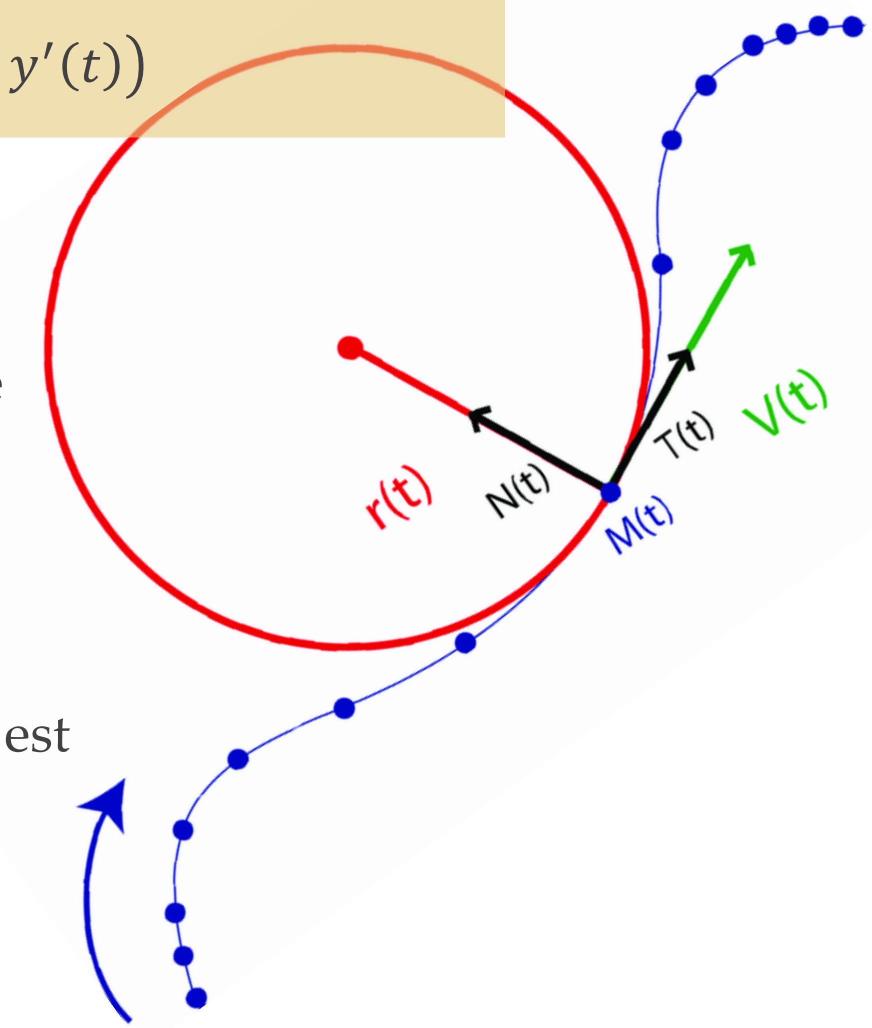
- Newton appelle ce cercle le **cercle osculateur** de la courbe au point $P(a, f(a))$, le centre du cercle est appelé **centre de courbure** et le rayon est appelé **rayon de courbure**.
- La **courbure** de la courbe $y = f(x)$ dans le point $P(a, f(a))$ est définie comme l'inverse du rayon de courbure : $\kappa = \frac{1}{r}$



Courbure d'une courbe plane

Soit c une courbe sous forme paramétrique $c(t) = \big(x(t), y(t)\big)$

Nous avons vu que le vecteur tangent (ou vecteur-vitesse) est $\boldsymbol{c}'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$



Sa norme vaut $\quad v = \|\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{t})\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

Soit $\quad \vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{c}'(\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}} \cdot \big(\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t})\big)$ le vecteur tangent unitaire

et $\quad \vec{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{v}} \cdot \big(-\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t})\big)$ le vecteur orthogonal à $\vec{T}(t)$

Le couple $\big(\vec{T}, \vec{N}\big)$ forme une base directe.

Si on dérive $\vec{T}(t)$ par rapport à $ds = v \cdot dt$ on trouve un vecteur qui est colinéaire à $\vec{N}(t)$.

La composante de $\frac{d}{ds}\vec{T}(t)$ selon $\vec{N}(t)$ est en fait la courbure au point. Après calculs on obtient

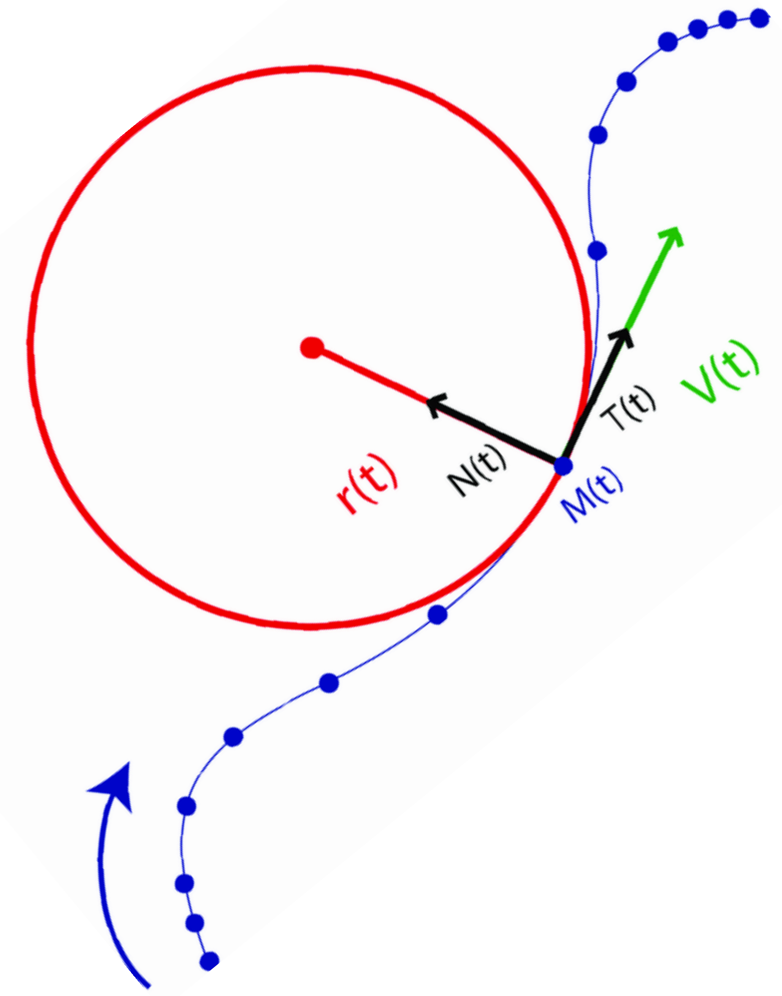
$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^2}\,\boldsymbol{c}'' \cdot \vec{N} = \frac{\det(c',\ c'')}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Courbure d'une courbe plane

$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^3}\,\boldsymbol{c}'' \cdot \vec{N} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

On peut démontrer que la valeur absolue de la courbure en un point c(t) est indépendant du paramétrage. C'est donc bien une **caractéristique intrinsèque à la courbe** qui ne dépendant pas de la « vitesse de parcours » de cette courbe.

C'est le terme en v^3 au dénominateur qui assure ceci !!



La courbure a un signe qui dépend du sens de parcours de la courbe !!

Si $\kappa > 0$ la courbe tourne dans le sens trigonométrique pour la paramétrisation donnée

Si $\kappa < 0$ la courbe tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique pour la paramétrisation donnée.

Si on change le sens de parcours, $\vec{T}$ et $\vec{N}$ change de sens et la courbure change de signe.

Exemple

Soit le cercle de centre $C(a, b)$ et de rayon R. Calculer la courbure en tout point du cercle

Ainsi pour n'importe quelle courbe, la courbure est l'inverse du rayon du cercle de courbure

$$r(a) = \left|\frac{1}{\kappa(a)}\right|$$

Courbure d'une courbe plane

Soit un arc de cercle de rayon r et un petit angle $d\theta$. La longueur de l'arc de cercle vaut alors

$$ds = r \cdot d\theta$$

Comme la courbure est l'inverse du rayon de courbure ceci donne

$$ds = \frac{1}{\kappa} \cdot d\theta$$

Et donc

$$\kappa \, ds = d\theta$$

et enfin

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

Ainsi la courbure peut être interprétée comme le taux de rotation du vecteur tangent par unité de longueur.

Exemple

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^2$ (parabole).

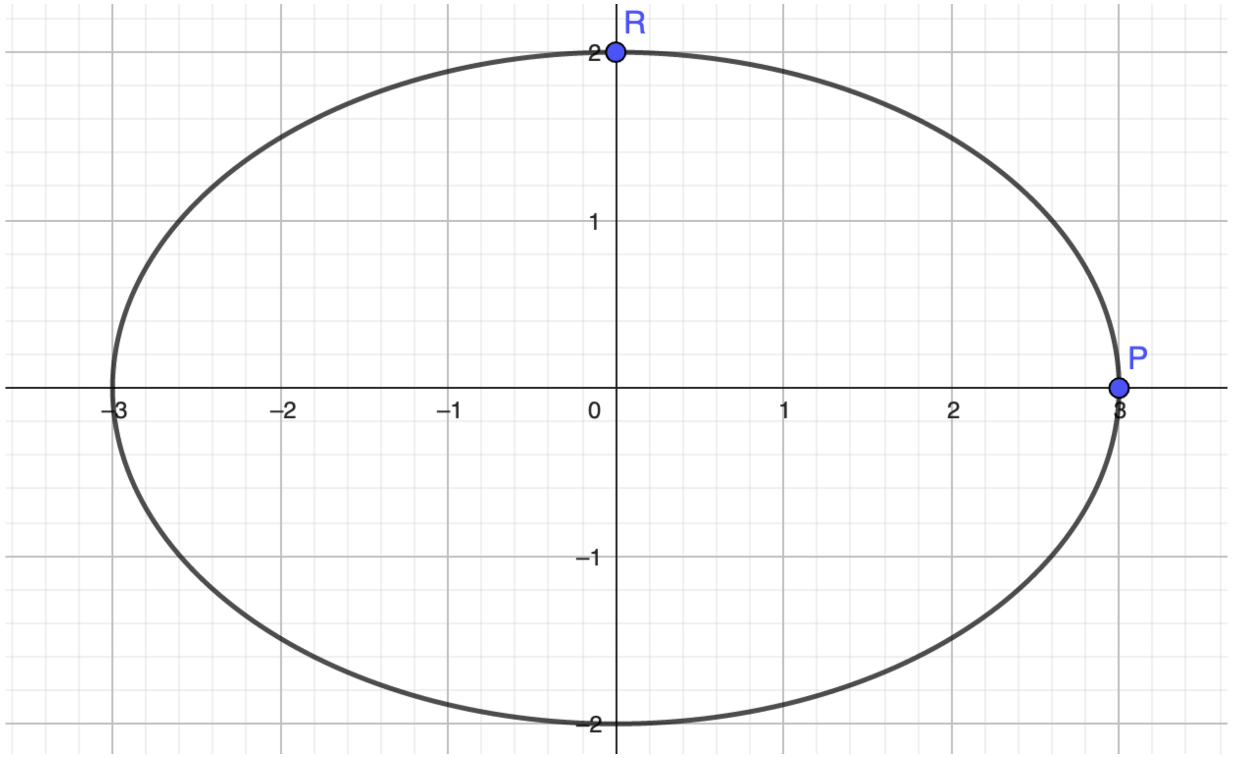
Calculer la courbure à l'origine $O(0,0)$ et au point $P(1,1)$.

Exercice

Soit l'ellipse définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = 3\cos(\theta) \\ y(\theta) = 2\sin(\theta) \end{cases} \qquad \text{où } \theta \in [0,2\pi].$$

Calculer la courbure aux points $P(3,0)$ et $R(0,2)$.



Courbure : forme cartésienne

$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^3}\,\boldsymbol{c}''\cdot\vec{N} = \frac{\det(c',c'')}{v^3} = \frac{x'y''-x''y'}{v^3} = \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

Si la courbe est donnée sous forme cartésienne explicite

$$y = f(x)$$

alors la paramétrisation standard (voir slide 5) $\quad c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

donne $\quad x'(t) = 1, \quad x''(t) = 0, \quad y'(t) = f'(t) \quad$ et $\quad y''(t) = f''(t)$

puis $\quad c'(t) = \big(1, f'(t)\big) \quad$ et donc $\quad v = \sqrt{1 + f'(t)^2}$

et enfin la courbure en un point $\mathrm{P}(a, f(a))$ vaut

$$\kappa(a) = \frac{f''(a)}{(1+f'(a)^2)^{3/2}}$$

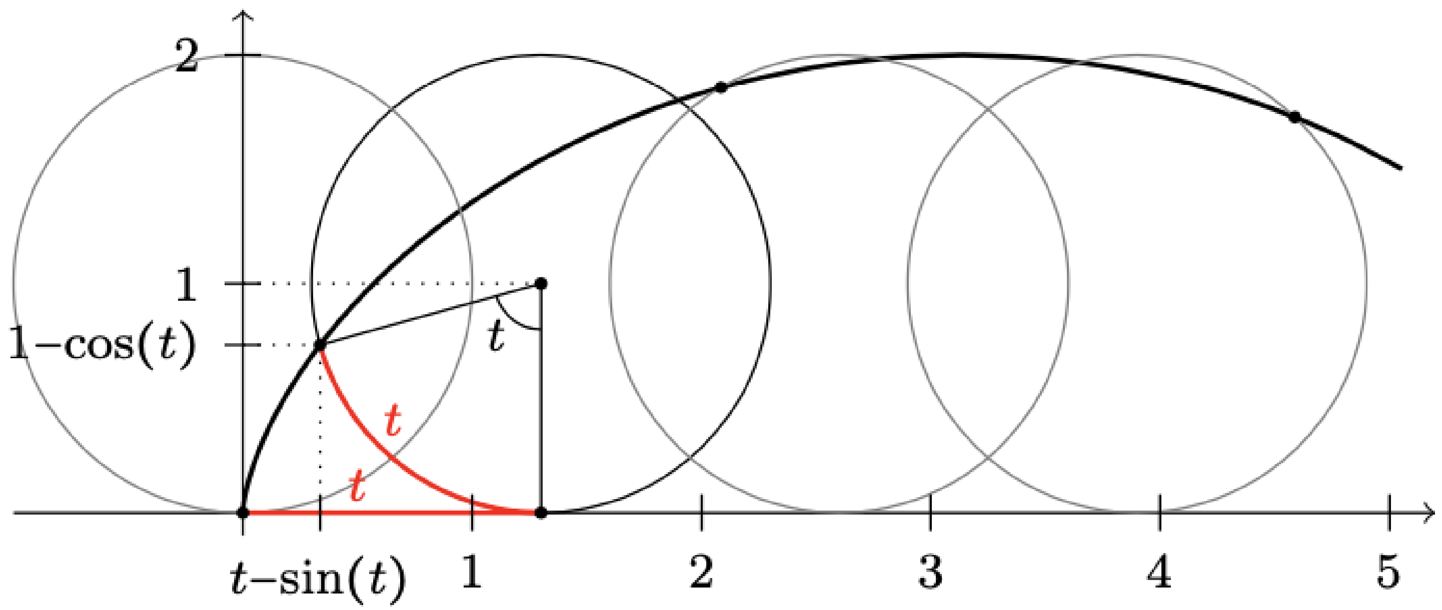
Exercice

Soit la droite définie par l'équation $y = x$. Calculer la courbure en un point $P(a, a)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^3$. Calculer la courbure, ainsi que les coordonnées du centre du cercle osculateur en un point sur la courbe $P(a, a^3)$, où $a \in \mathbb{R}$.

La cycloïde



- La cycloïde est une courbe plane, trajectoire d'un point fixé à un cercle (de rayon 1) qui roule sans glisser sur une droite.

- La courbe peut être définie paramétriquement par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}$$

ce qui correspond à l'équation cartésienne :

$$x = \arccos(1 - y) - \sin(\arccos(1 - y)).$$