*Le Heydar Aliyev Center (Bakou)*

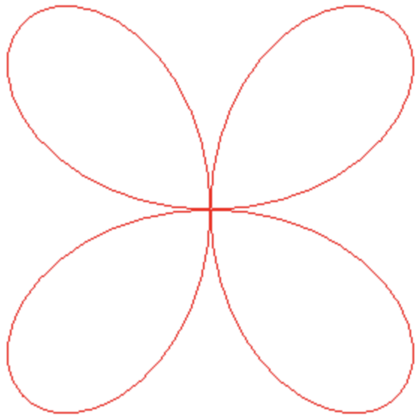
*Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1*

# Courbes planes

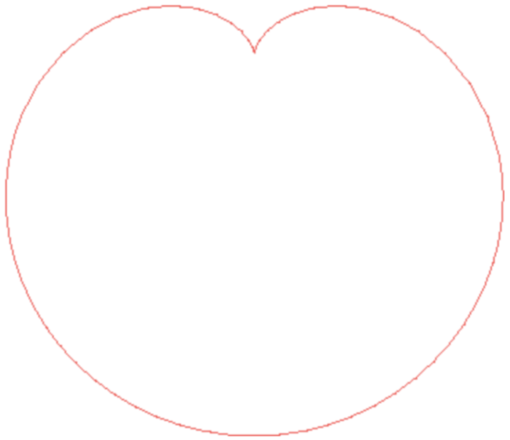
Philippe Chabloz

# Exemples dans le plan

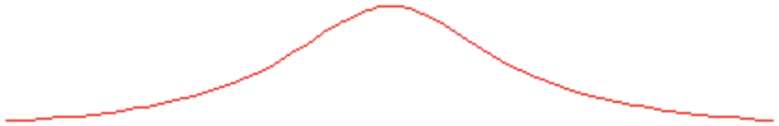
## (pour le plaisir des yeux..)



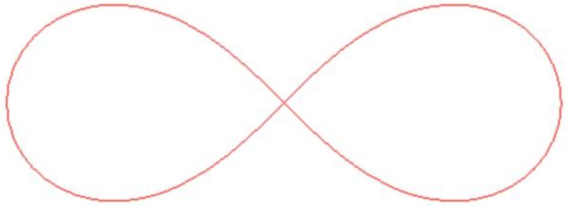
Trèfle à quatre feuilles



Cardioïde



Cubique d'Agnesi



Lemniscate de Bernoulli

Spirale d'Archimède

Parabole semi-cubique

# Définition

Une **représentation paramétrique d'une courbe** (C) est un système d'équations où les coordonnées des points de la courbe sont exprimées en fonction d'un *paramètre* (souvent noté $t, k, \theta$,...).

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions de la variable réelle $t \in I$ où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. À tout réel $t$, on associe le point $M(t)$ défini par le vecteur $\overrightarrow{OM} = (x(t), y(t))$.

L'ensemble $C$ des points $M(x, y)$ tels que

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in I,$$

est appelé **courbe paramétrée de paramètre $t$**.

**Remarques :**

- Les équations paramétriques d'une courbe ne sont pas uniques !
- Une courbe n'est pas nécessairement le graphe d'une fonction ; c'est pourquoi on parle de courbe paramétrée et non pas de fonction paramétrée.

# Droites dans le plan

Soit un point $P(p_x, p_y)$ et un vecteur directeur de la droite $\vec{d} = (d_x, d_y)$. Une **représentation paramétrique de la droite qui passe par $P$ de vecteur directeur $\vec{d}$** est donnée par le système suivant :

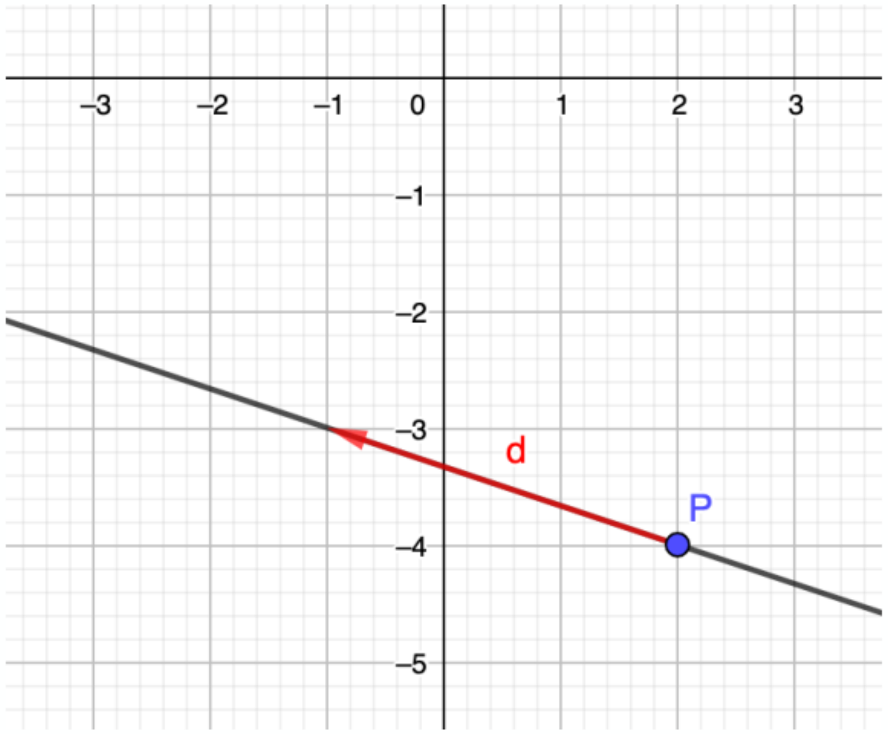
$$\begin{cases} x(t) = p_x + d_x\, t \\ y(t) = p_y + d_y\, t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

À chaque valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ correspond un point sur la droite.

*Par exemple,* le système d'équations

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 3t \\ y(t) = -4 + t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

représente une droite qui passe par le point $P(2, -4)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (-3,1)$.



# Paraboles dans le plan

Soient $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ trois constantes réelles. Une **représentation paramétrique d'une parabole** est donnée par le système suivant :

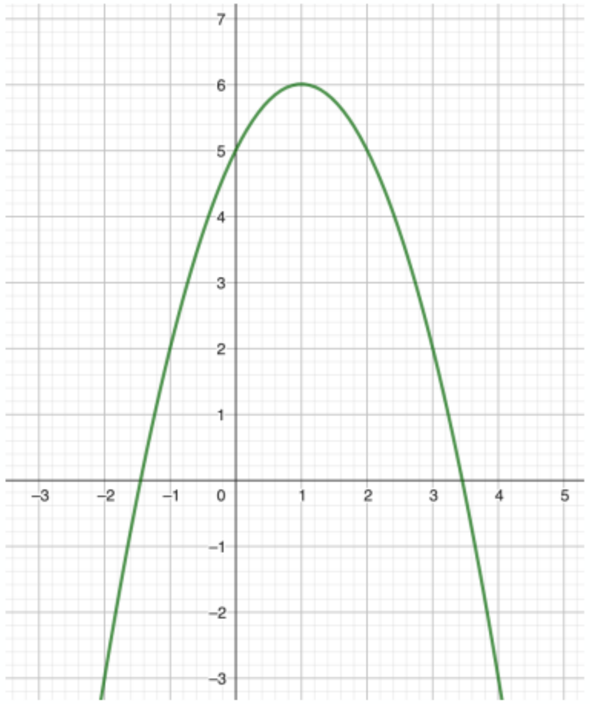
$y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = at^2 + bt + c \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

En général, toute fonction continue $f$ peut être utilisée pour générer une représentation paramétrique d'une courbe en définissant le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

Pour chaque valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ on obtient un point situé sur la courbe.

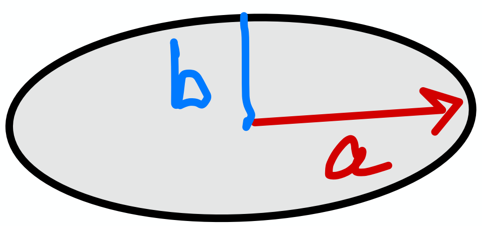


# Cercles dans le plan

Une **représentation paramétrique d'un cercle centrée dans l'origine et de rayon** $r > 0$ est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in [0,2\pi[\,.$$

De même, une **représentation paramétrique d'un cercle centrée dans le point** $C(c_x, c_y)$ **et de rayon** $r > 0$ est donnée par le système suivant :



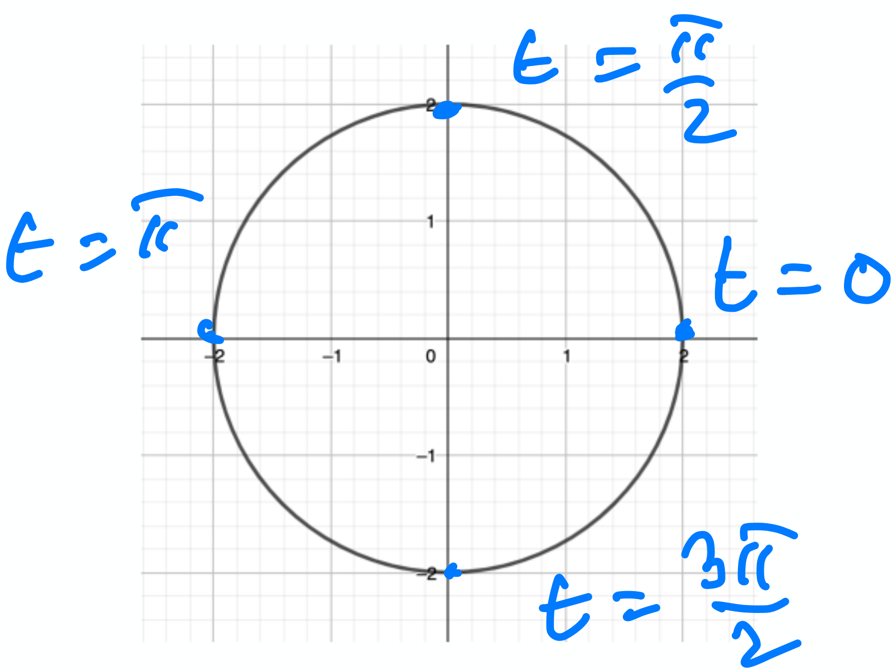

$$\begin{cases} x(t) = c_x + \overset{a}{r} \cdot \cos(t) \\ y(t) = c_y + \underset{b}{r} \cdot \sin(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in [0,2\pi[\,.$$

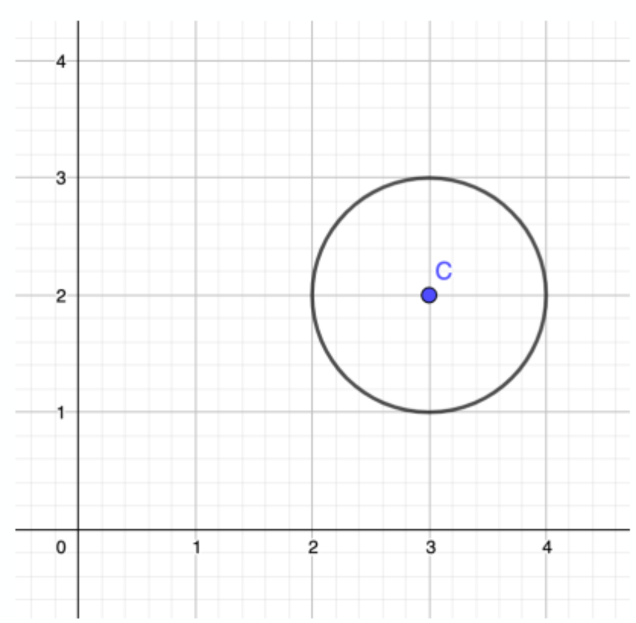
$a, b > 0$

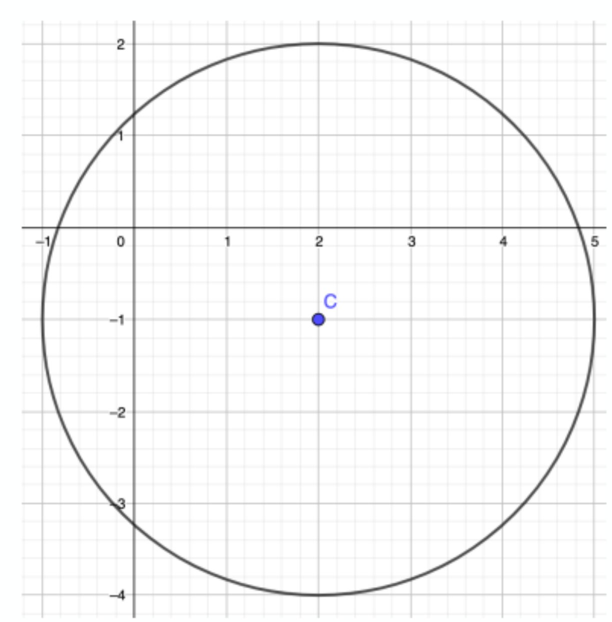
avec $a \neq b$

ellipse

**Remarque** : un cercle n'est pas le graphe d'une fonction !



EPFL

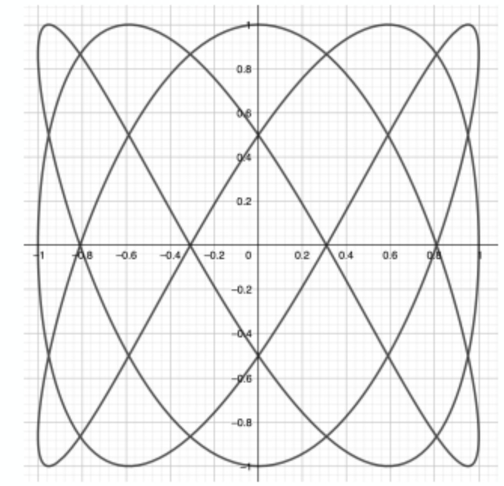
# Exemples *exotiques*

## Courbes de Lissajous

Les courbes de Lissajous (ou courbes de Bowditch) sont données par la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a\sin(\omega_x t + \phi_x) \\ y(t) = b\sin(\omega_y t + \phi_y) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0{,}2\pi[$$

où $a, b, \omega_x, \omega_y > 0$, $n \geq 1$ et $0 \leq \phi_x, \phi_y \leq \pi/2$. En électronique, on peut faire apparaître des figures de Lissajous sur un oscilloscope.



$$\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \sin(5t + \pi/2) \end{cases}$$

## Cardioïde

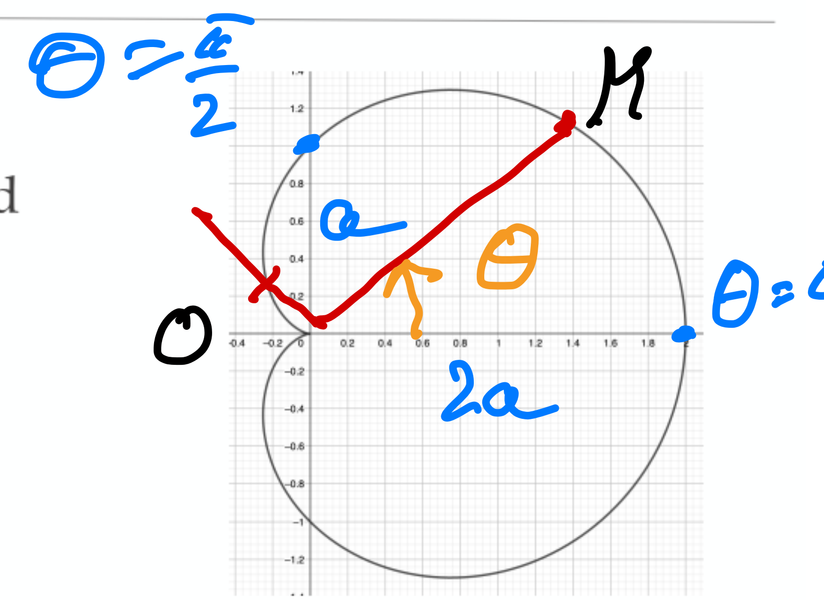
La trajectoire d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur un second cercle de même diamètre décrit une courbe appelée cardioïde. Une paramétrisation de la cardioïde est :

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta(1 + \cos\theta) \\ y(\theta) = a\sin\theta(1 + \cos\theta) \end{cases} \quad \text{où } \theta \in [0{,}2\pi[$$

où $a > 0$.

$$x^2 + y^2 = a^2(1 + \cos\theta)^2$$




$$\begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) \\ y(\theta) = \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) \end{cases}$$

Pour de nombreux autres exemples de courbes dans le plan, visitez le site web : https://mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml

# Représentation par une forme cartésienne

On peut *parfois*, en éliminant le paramètre entre les deux équations du système qui définit la courbe, obtenir $y$ comme fonction de $x$, et ramener l'étude de la courbe à celle d'une courbe définie par une fonction $y = f(x)$.

**Forme cartésienne explicite :**

Nous représentons une courbe plane via l'équation :

$$y = f(x) \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

c'est-à-dire comme fonction d'une variable indépendante. À chaque valeur $x$ correspond une valeur $y$, tel que le point $(x, y)$ appartient à la courbe.

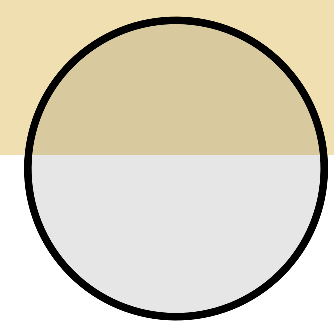
**Forme cartésienne implicite :**

Une courbe peut également être représentée sous la forme :

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$F(x, y) = 0$$

c'est-à-dire comme fonction de deux variables indépendantes.



$P(0,0)$ $\quad xy^2 + x^3 + e^{xy} + 4y = 1$

# Cercles dans le plan

**Obtenir l'expression cartésienne d'une courbe peut être difficile, voire impossible.**

- Pr exemple, considérons les équations paramétriques d'un cercle centré en $C(c_x, c_y)$ et de rayon $r > 0$

$$\begin{cases} x = c_x + r \cdot \cos(t) \\ y = c_y + r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0{,}2\pi[\,.$$

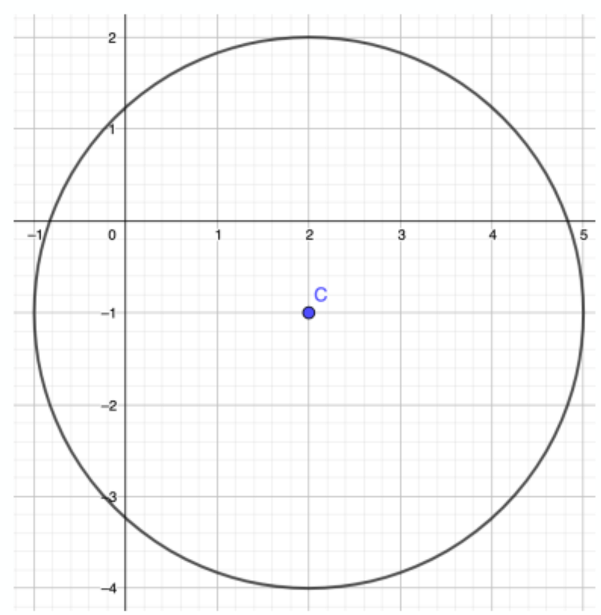
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

- Nous ne pouvons pas facilement isoler le paramètre $t$, cependant en élevant les deux équations au carré nous pouvons utiliser une identité trigonométrique pour éliminer le paramètre :

$$\begin{cases} (x - c_x)^2 = r^2 \cdot \cos^2(t) \\ (y - c_y)^2 = r^2 \cdot \sin^2(t) \end{cases}$$

- Ainsi, en additionnant les deux équations, nous obtenons **l'équation cartésienne implicite d'un cercle** :

$$(y - c_y)^2 + (x - c_x)^2 = r^2$$




- Puisque le cercle ne peut pas être représenté comme le graphe d'une fonction, nous ne pouvons pas trouver une expression unique pour **l'équation cartésienne explicite**, cependant nous pouvons obtenir deux fonctions décrivant la moitié supérieure et inférieure du cercle respectivement :

$$y = c_y + \sqrt{r^2 - (x - c_x)^2} \quad \text{et} \quad y = c_y - \sqrt{r^2 - (x - c_x)^2}$$

$$\begin{cases} x = c_x + a\cos t \\ y = c_y + b\sin t \end{cases}$$

$$\frac{x - c_x}{a} = \cos t \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{y - c_y}{b} = \sin t \quad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I})^2 + (\mathrm{II})^2$$

$$\left(\frac{x - c_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - c_y}{b}\right)^2 = 1 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

Equation cartésienne d'une ellipse de centre $C(c_x, c_y)$ et de demi-axes $a$ et $b$

# Exercice

$\in [-1;1]$ $\in [-1,1]$

a. On considère les fonctions suivantes : $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \cos(2t)$, où $t \in \mathbb{R}$.
Exprimer $y$ en fonction de $x$ et en déduire la *nature* de la courbe obtenue.

b. On considère les fonctions suivantes : $x(t) = 2\cosh(t)$ et $y(t) = \sinh(t)$, où $t \in \mathbb{R}$.
Exprimer $y$ en fonction de $x$ et en déduire la *nature* de la courbe obtenue.

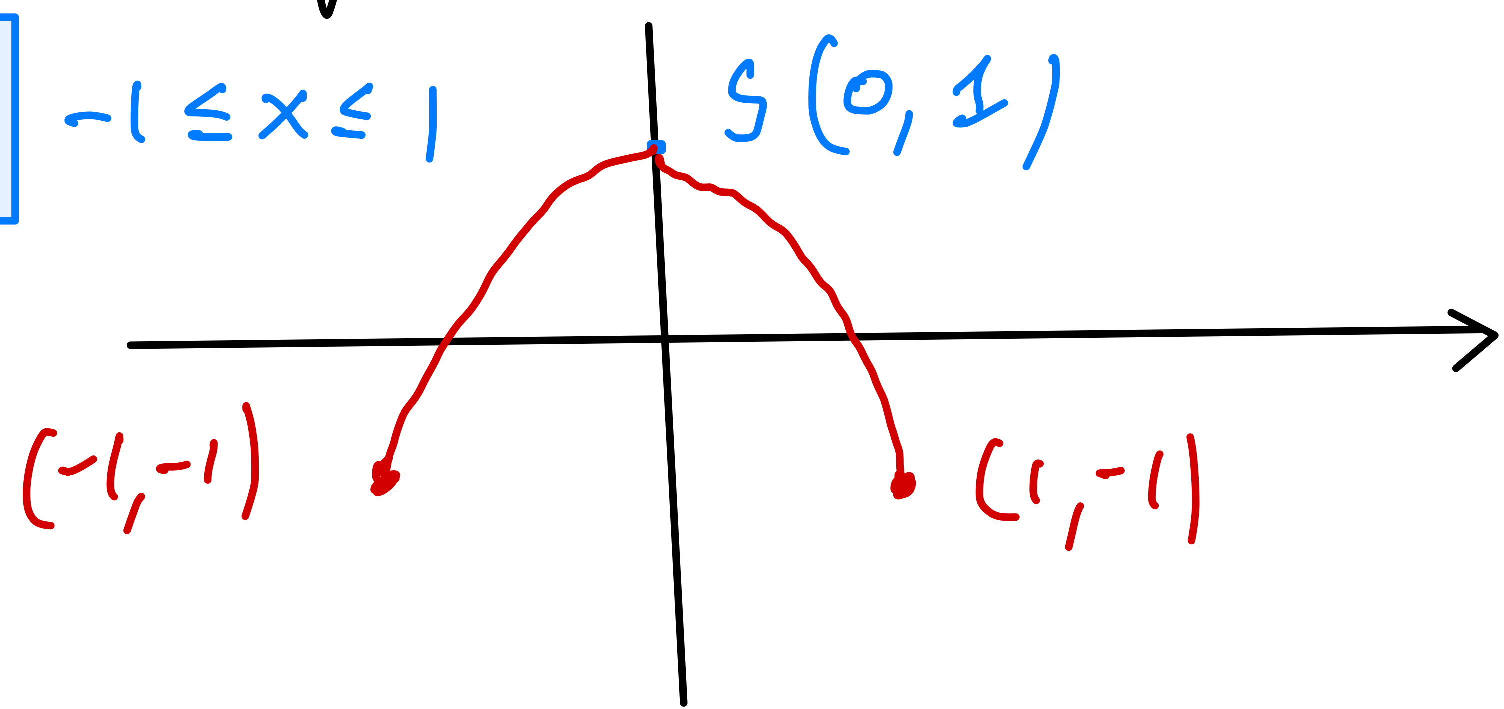
$$c(t) = (x(t), y(t)) = (\sin(t), \cos(2t))$$

$$x = \sin t \qquad y = \cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1 - 2x^2} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$x = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -1$$



# Exercice

$$\begin{cases} x = 2\cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

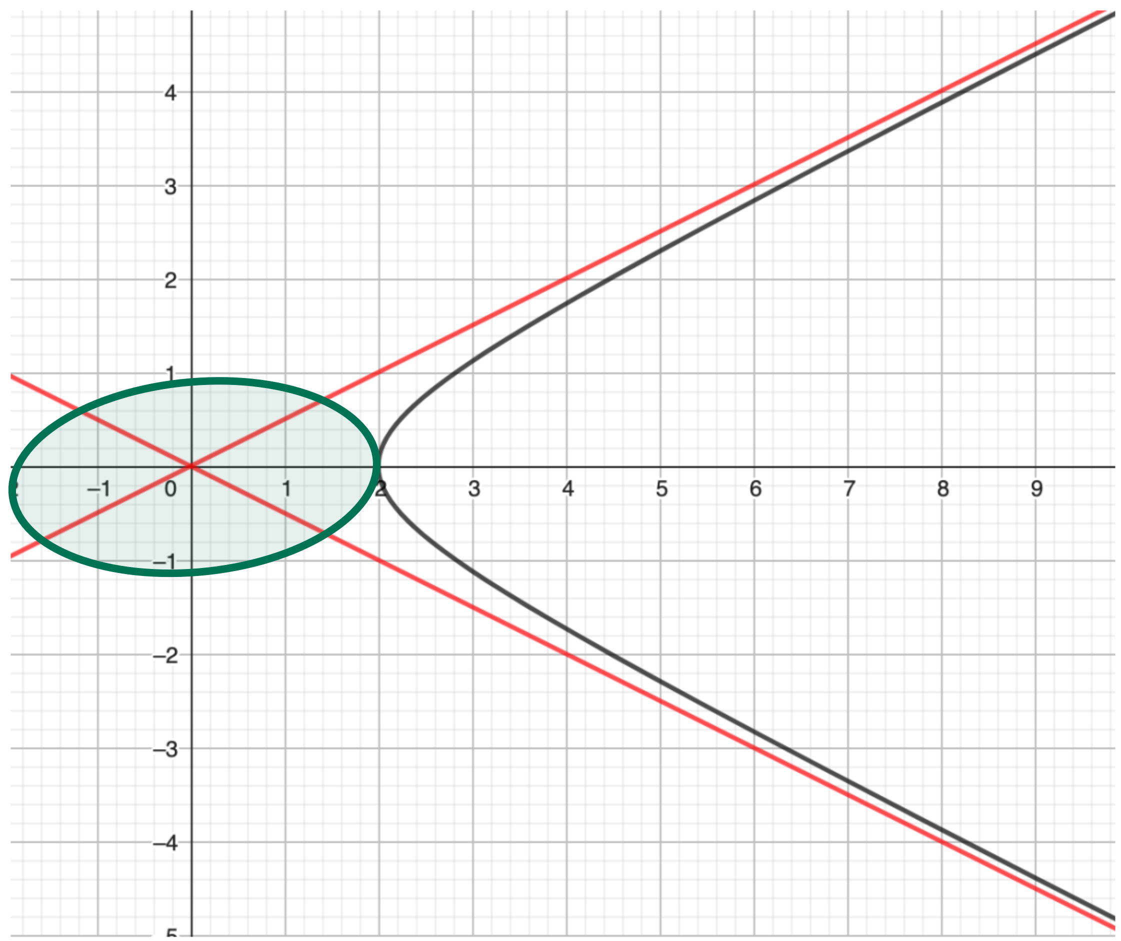
$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{x}{2} = \cosh t \qquad y = \sinh t$$

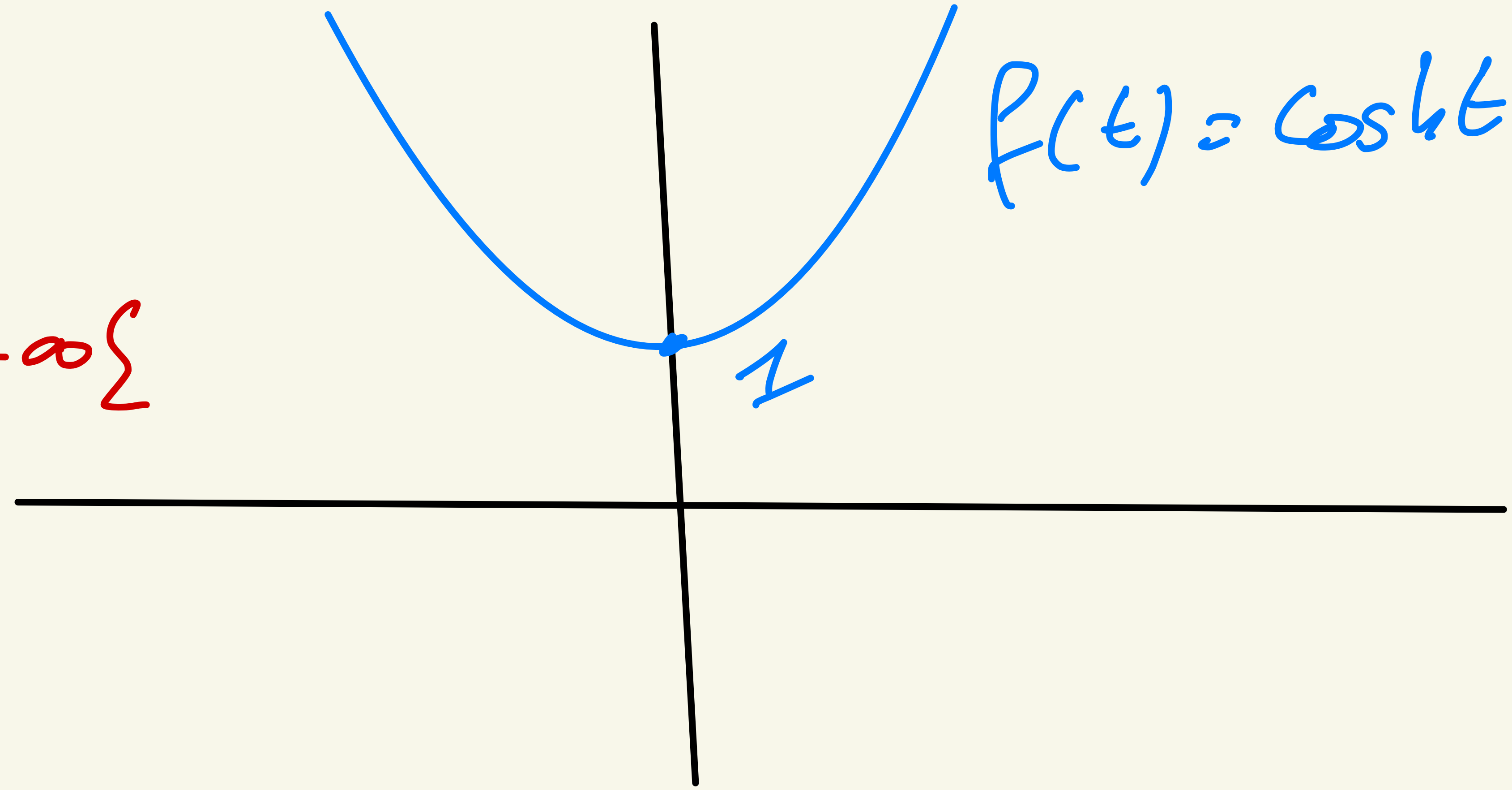
$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$$\boxed{x^2 - 4y^2 = 4} \qquad x \geq 2$$



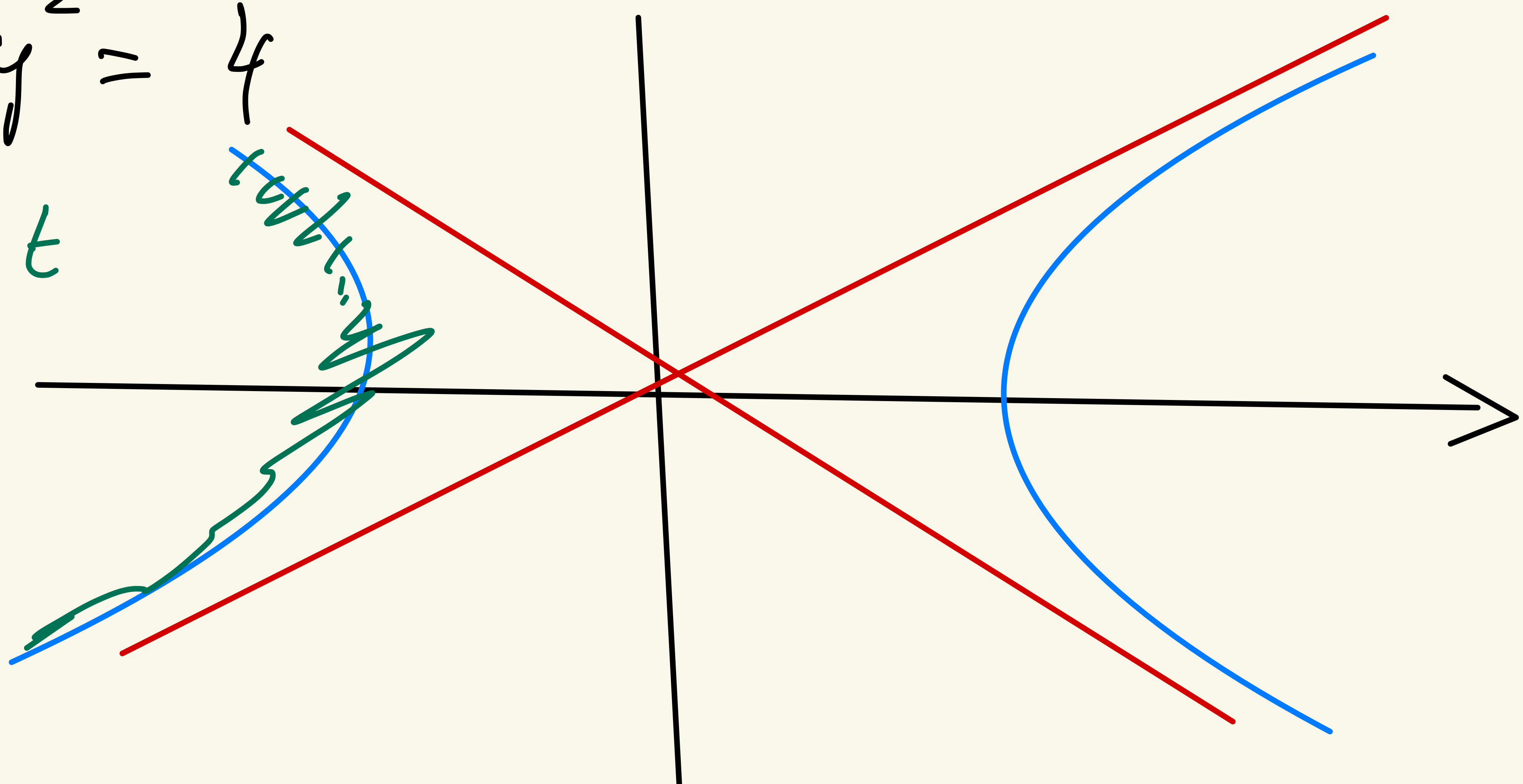
$$f(t) = \cosh t$$

$$\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$$
$$t \mapsto \cosh t$$




$$x^2 - 4y^2 = 4$$

$$x = 2\cosh t$$
$$\geq 2$$



# Résumé des trois représentations

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$$

- La meilleure représentation est sans aucun doute la **représentation paramétrée**. Cette représentation est également utile pour étudier les problèmes dynamiques puisqu'elle a une notion de vitesse de déplacement le long de la courbe.
- La **représentation en forme implicite** est, selon certains points de vue, meilleure que la représentation explicite. Cependant, on peut rencontrer des problèmes quand il faut expliciter l'une des deux variables en fonction de l'autre : souvent, c'est très compliqué, quand ce n'est pas impossible.

$$F(x, y) = 0$$

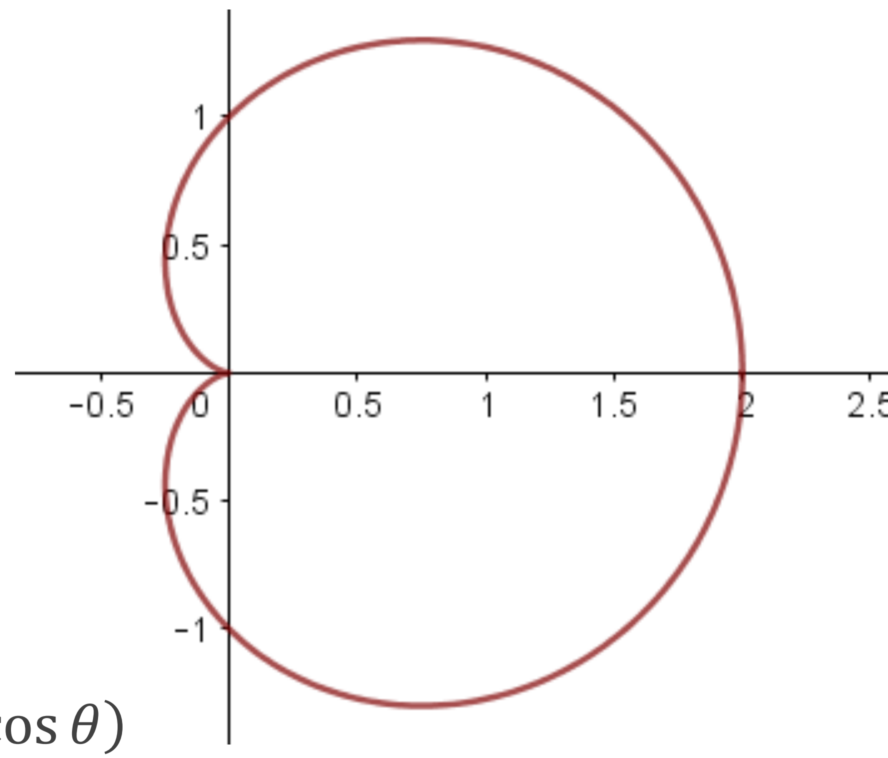
- La **représentation en forme explicite** a de nombreuses limites géométriques, du fait que très souvent, une courbe a une description très complexe sous cette forme, qui n'est donc pas adaptée à l'étude des propriétés géométriques.

$$y = f(x)$$

# Cardioïde : forme cartésienne

La cardioïde est donnée sous forme paramétrique par

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot (1 + \cos\theta) \cdot \cos\theta \\ x(t) = a \cdot (1 + \cos\theta) \cdot \sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi]$$




Pour trouver la forme cartésienne implicite (éliminer $\theta$) on calcule:

$$x^2 = a^2 \cdot (1 + \cos\theta)^2 \cdot \cos^2\theta \qquad y^2 = a^2 \cdot (1 + \cos\theta)^2 \cdot \sin^2\theta$$

Donc $\quad x^2 + y^2 = a^2 \cdot (1 + \cos\theta)^2 \quad$ et alors

$$x^2 + y^2 - ax = a^2 \cdot (1 + \cos\theta)^2 - a^2 \cdot (1 + \cos\theta) \cdot \cos\theta = a^2 \cdot (1 + \cos\theta)$$

ce qui donne $\quad (x^2 + y^2 - ax)^2 = a^4 \cdot (1 + \cos\theta)^2 = a^2 \cdot (x^2 + y^2)$

L'équation cartésienne implicite de la cardioïde est donc $\quad \boxed{(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 \cdot (x^2 + y^2)}$

que l'on peut aussi écrire $\quad \boxed{(x^2 + y^2)^2 - 2ax \cdot (x^2 + y^2) - a^2\, y^2 = 0}$

# Vecteur tangent

- Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrique :

$$\mathrm{c}(t) = (x(t), y(t))$$

où $x: I \to \mathbb{R}$ et $y: I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables.

- Le **vecteur tangent à la courbe** en $P = \gamma(t_0)$ est défini comme le vecteur :

$$\mathrm{c}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

- Le **vecteur normal à la courbe** en $P = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^2$ est défini comme le vecteur :

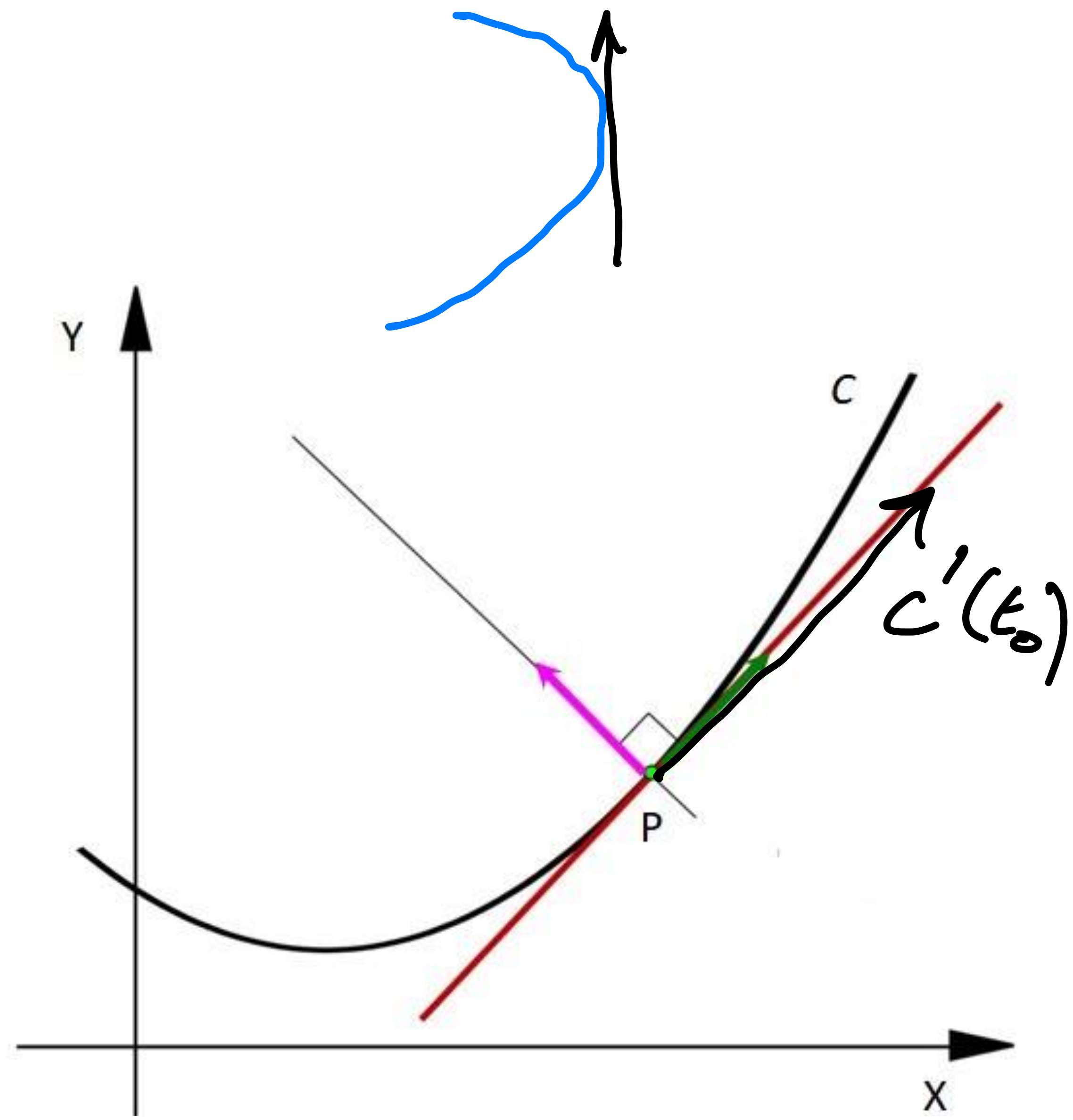
$$n(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0))$$

- La **pente de la droite tangente** à la courbe en $P = \gamma(t_0)$ est donnée par

$$m(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \qquad \text{si} \quad x'(t_0) \neq 0$$

> Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors le vecteur tangent (donc la tangente) est vertical !

> Si $x'(t_0) \neq 0$ et $\mathrm{y}'(\mathrm{t}_0) = 0$ alors le vecteur tangent (donc la tangente) est horizontal !




$c'(t_0) = (0 \quad 2)$

# Exemple

Courbe : $c(t) = (t^2, t^3)$

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \Rightarrow t = \sqrt{x}$$

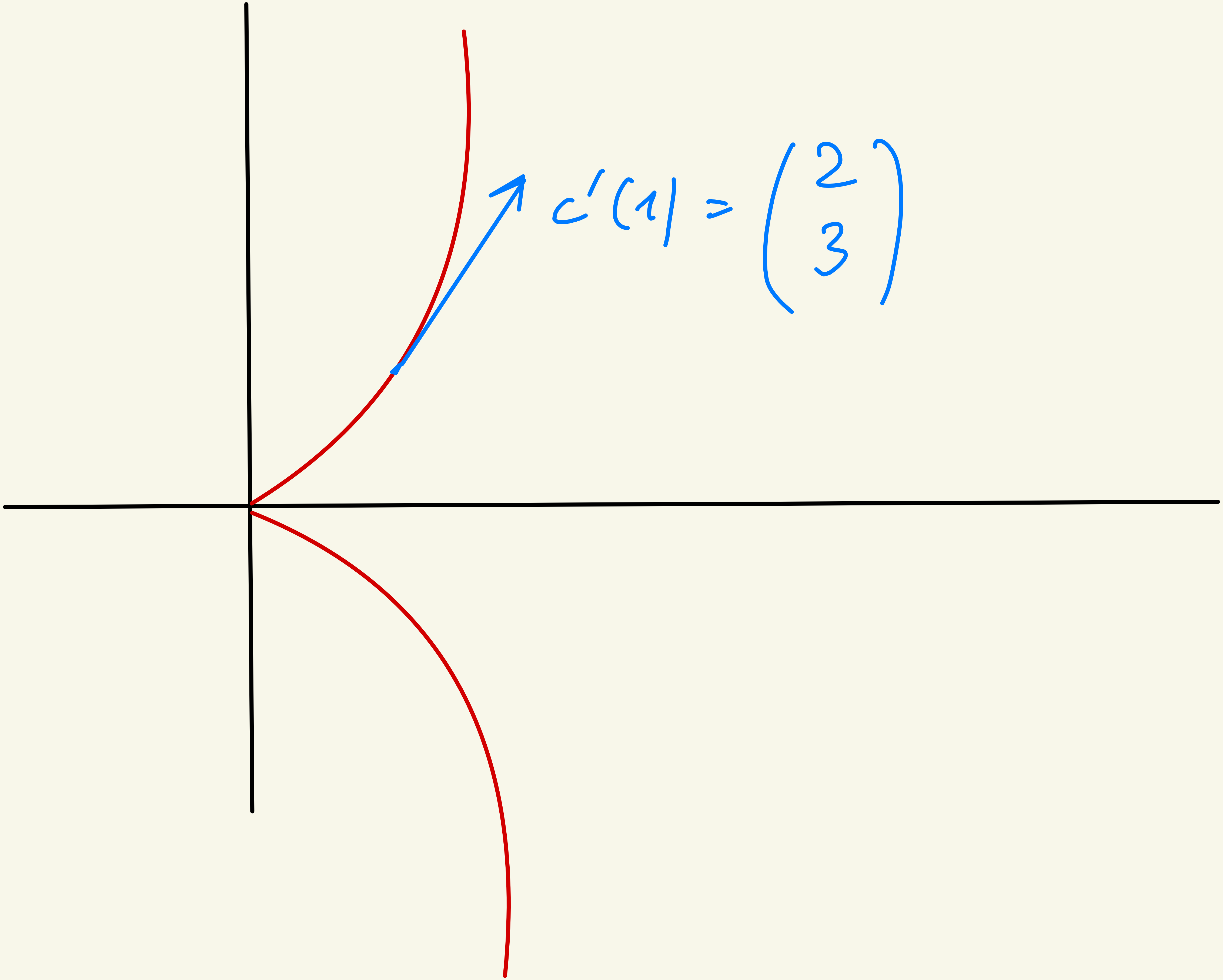
$$\Rightarrow y = t^3 = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$$

$$c'(t) = (2t, 3t^2)$$

$$t = 0 \Rightarrow P(0,0) \Rightarrow c'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{t = 1} \Rightarrow c(1) = (1, 1) \quad c'(1) = (2, 3)$$

$$t = 10 \Rightarrow c(10) = (100, 1000) \quad c'(10) = (20, 300)$$


$c'(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

# Différentiation d'une équation implicite

Soit $\gamma$ une courbe donnée sous forme cartésienne implicite

$$(c) : F(x,y) = 0$$

Pour calculer la pente de la tangente à $c$, on considère $y$ comme une fonction de variable $x$, c'est-à-dire $y = y(x)$, et on dérive l'équation implicite $F(x,y) = 0$ par rapport à $x$.
La dérivée de $y$ devient alors $y'$. En isolant $y'$ on obtient une formule qui donne $y'$ en fonction des deux coordonnées $x$ et $y$:

$$y' = y'(x,y)$$

Un vecteur tangent en un point $P(x_P, y_P)$ de la courbe est alors $c'(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_P, y_P) \end{pmatrix}$

**Exemple**
Soit la courbe $(\gamma) : \ x^3y^2 + y^3 + x^2 - 4x - 5y + 1 = 0$ et le point $P(1{,}2)$ qui est sur $\gamma$.

En considérant $y$ comme fonction de $x$ et en dérivant cette équation par rapport à $x$ on obtient

$$3x^2y^2 + 2x^3 \cdot y \cdot y' + 3y^2 \cdot y' + 2x - 4 - 5y' = 0$$

En isolant $y'$ ceci donne

$$y' \cdot (2x^3y + 3y^2 - 5) = 4 - 2x - 3x^2y^2 \qquad y' = \frac{4 - 2x - 3x^2y^2}{2x^3y + 3y^2 - 5}$$

Au point $P(1{,}2)$ on trouve $y' = \frac{4-2-12}{4+12-5} = -\frac{10}{11}$. Un vecteur tangent est alors $c'(P) = (1, -\frac{10}{11})$.

L'équation de la tangente à $\gamma$ en $P$ est donc $\qquad y = -\frac{10}{11}x + \frac{32}{11}$

**Exemple**

Soit la courbe $(\gamma)$ : $x^3y^2 + y^3 + x^2 - 4x - 5y + 1 = 0$ et le point $P(1,2)$ qui est sur $\gamma$.

$$\boxed{x^3y^2 + y^3 + x^2 - 4x - 5y + 1 = 0} \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$3x^2y^2 + 2x^3y.y' + 3y^2y' + 2x - 4 - 5y' = 0$$

$$y'(2x^3y + 3y^2 - 5) = 4 - 2x - 3x^2y^2$$

$$\boxed{y' = \frac{4 - 2x - 3x^2y^2}{2x^3y + 3y^2 - 5}}$$

$$\boxed{P(1,2) \in \gamma}$$

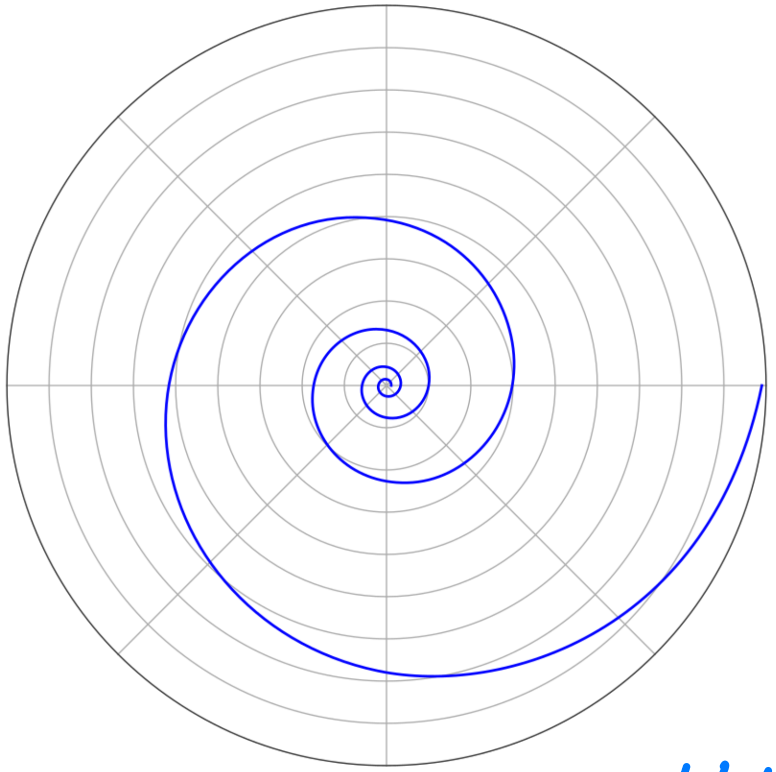
$$y'_P = \frac{4 - 2 - 12}{4 + 12 - 5} = -\frac{10}{11}$$

Eq. de la tangente à $\gamma$ en $P$ : $\boxed{y = -\frac{10}{11}x + \frac{32}{11}}$

# Spirales logarithmiques

La spirale logarithmique est donnée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = r\, e^{kt} \cos t \\ y(t) = r\, e^{kt} \sin t \end{cases} \qquad r > 0, \qquad k > 0, \qquad t \geq 0$$



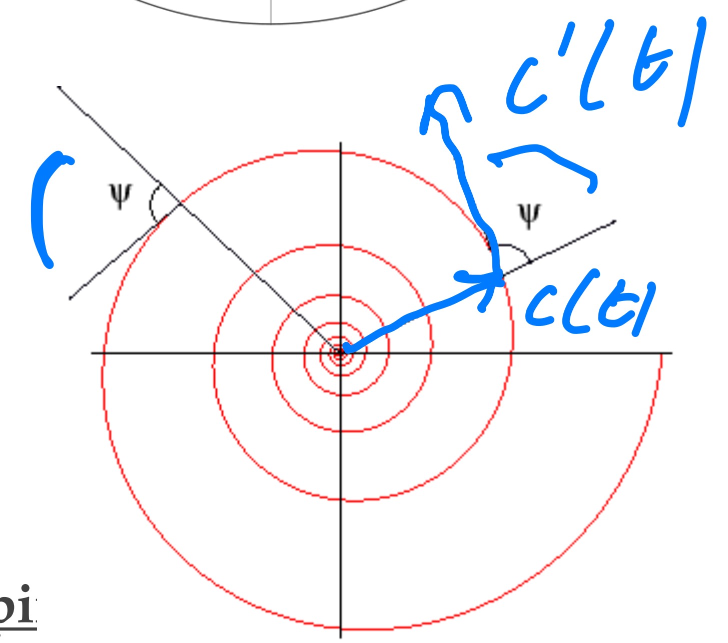
Le vecteur tangent est donné par

$$\boxed{c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\, e^{kt} \cdot (\mathrm{k} \cos t - \sin t) \\ r\, e^{kt} \cdot (\mathrm{k} \sin t + \cos t) \end{pmatrix}}$$

Si on fait le produit scalaire du vecteur position c(t) par le vecteur tangent c′(t) on trouve

$$c(t) \cdot c'(t) = re^{kt} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot re^{kt} \begin{pmatrix} k \cos t - \sin t \\ \mathrm{k} \sin t + \cos t \end{pmatrix} =$$

$$= r^2 \cdot e^{2kt} \cdot (k \cos^2 t - \cos t \sin t + \sin t \cos t + \mathrm{k} \sin^2 t) = k\, r^2 \cdot e^{2kt}$$




L’angle entre le vecteur tangent $c'(t)$ et le vecteur position c($t$) vérifie donc

$$\cos \Psi = \frac{k\, r^2 \cdot e^{2kt}}{\|\gamma(t) \cdot\| \cdot \|\gamma'(t)\|} = \frac{k\, r^2 \cdot e^{2kt}}{re^{kt} \cdot \sqrt{1+k} \cdot\ r\, e^{kt}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \qquad \rightarrow \qquad \tan \Psi = \frac{1}{k}$$

**<u>L’angle *Ψ* est indépendant de *t*</u>** et est donc le **<u>même pour tous les points de la spi</u>**
Ces spirales sont appelées des **spirales équiangles.**

# Exemple

- Hyperbole : $x^2 - 2y^2 = 4$

$P(2,0)$ $\quad Q\left(3, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

$$x^2 - 2y^2 = 4 \quad \Big| \ \frac{d}{dx} \qquad y = y(x)$$

$$2x - 4y \cdot y' = 0$$

$$2x = 4yy' \Rightarrow \boxed{y' = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}}$$

$$y'_P = \frac{2}{2 \cdot 0} = +\infty \Rightarrow \text{tangente est verticale}$$

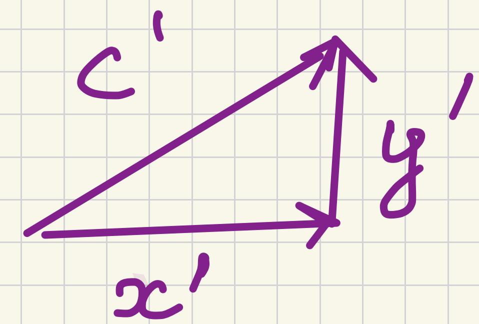
$$y'_Q = \frac{3}{2\sqrt{5/2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

# Résumé : vecteur tangent

1) Forme paramétrique : $c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

$x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$

$y'(t) = \dfrac{dy}{dt}$




2) Cartésienne explicite $\quad y = f(x)$

$$c'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \qquad f'(x) = \frac{df}{dx}$$

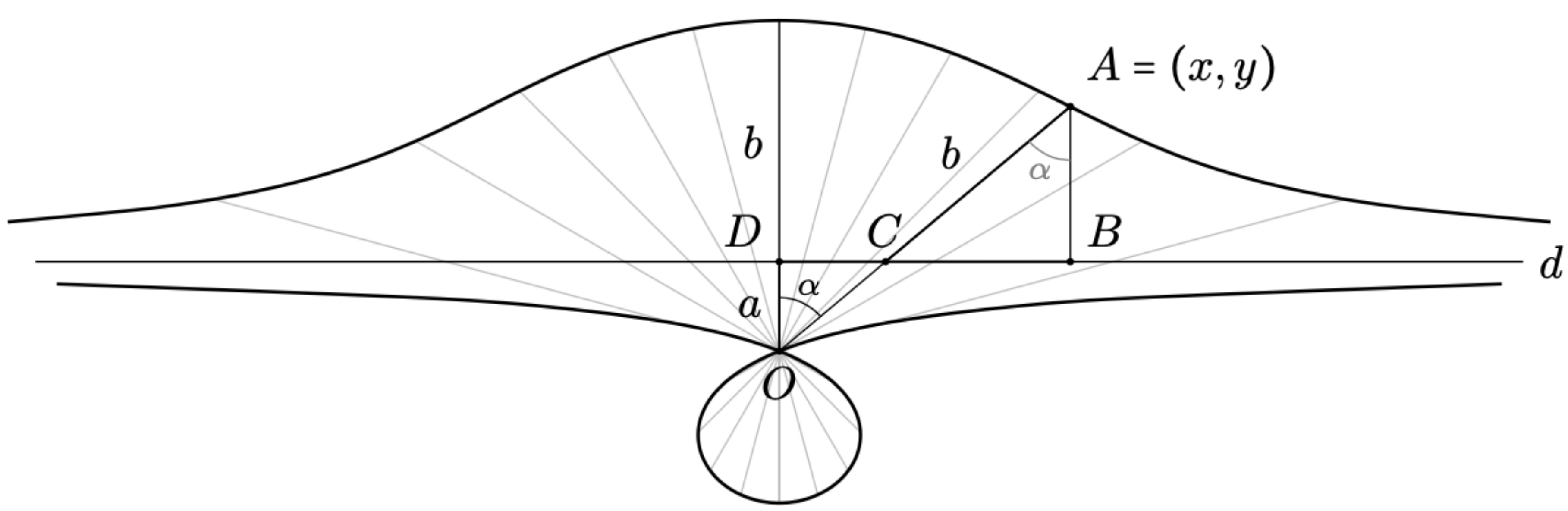
3) Cartésienne implicite $\quad F(x,y) = 0$

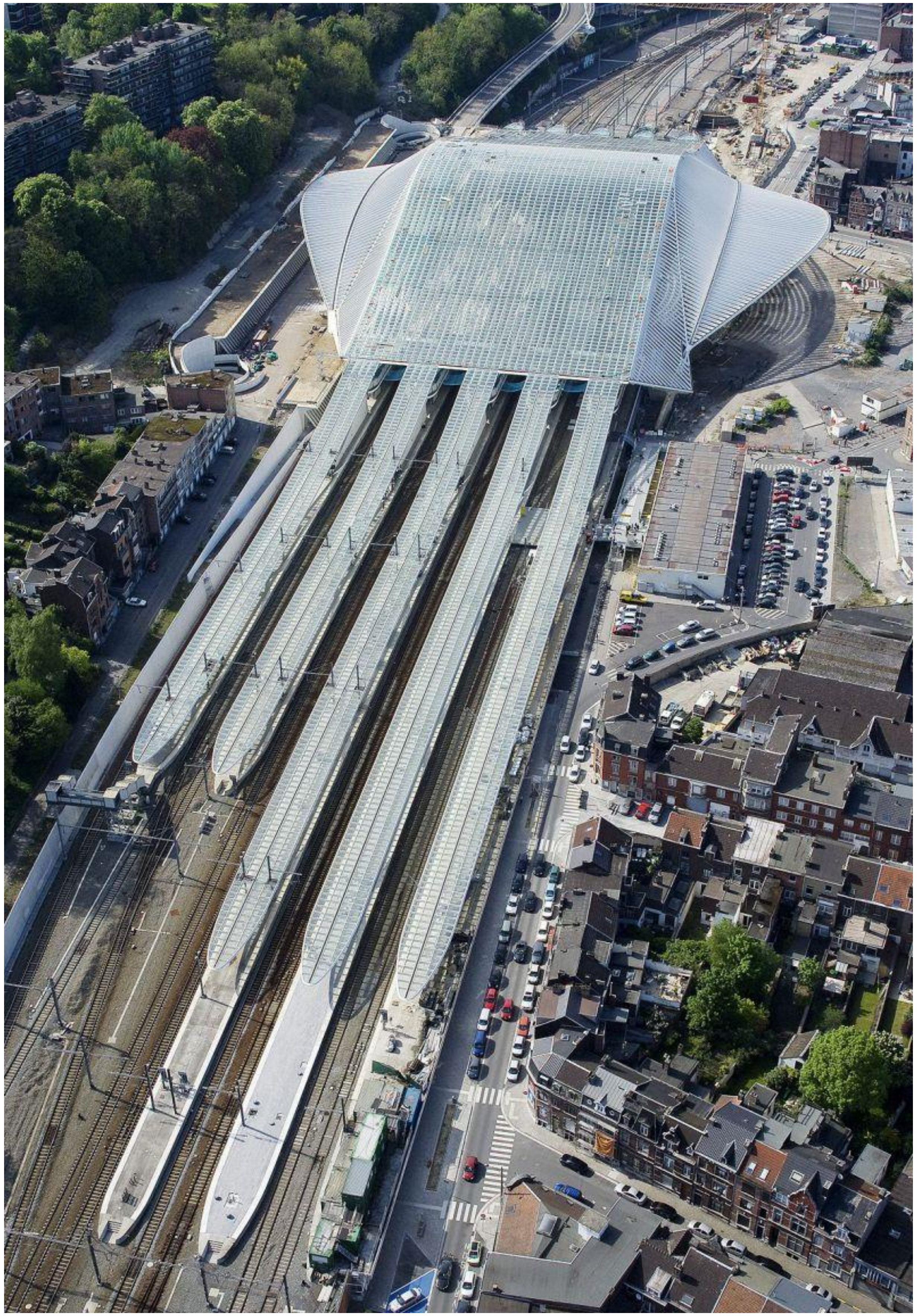
$$\frac{d}{dx} \Rightarrow y'(x,y) \Rightarrow c'_p = \begin{pmatrix} 1 \\ y'_p \end{pmatrix}$$

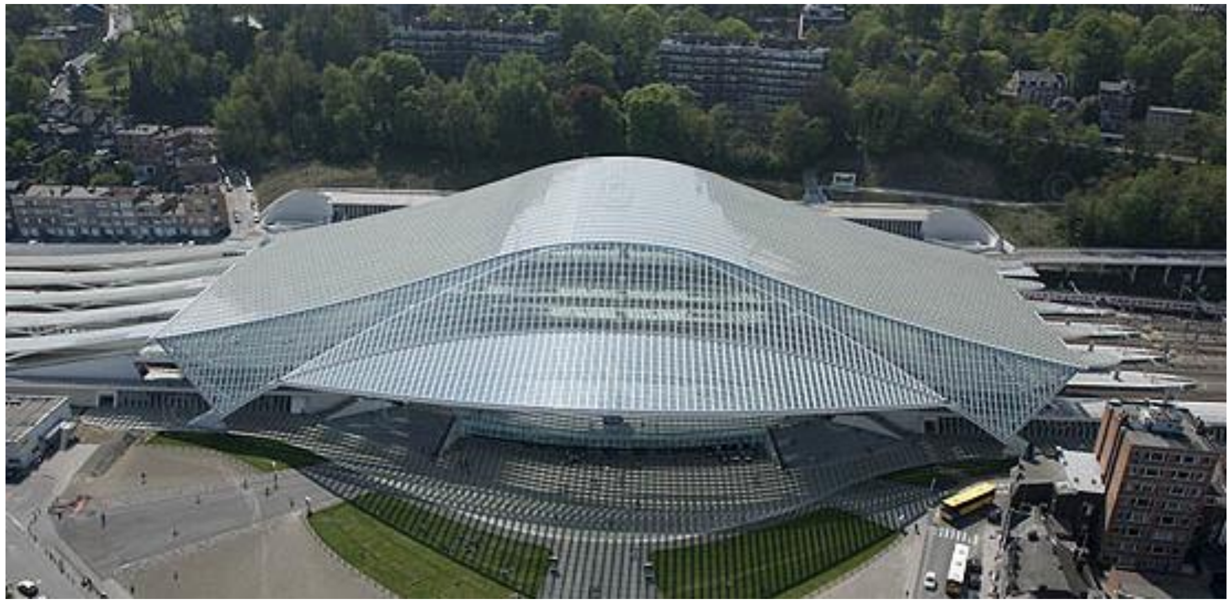
$y' := \dfrac{dy}{dx}$

# Conchoïde de Nicomède

- Donnés deux nombres $a, b > 0$ on considère un point $O$ qui, pour simplifier l'exposé, sera considéré comme coïncidant avec l'origine.
- Soit $d$ une droite horizontale à une distance $a$ de $O$ et $s$ une demi-droite issue de $O$ qui forme un angle de $\alpha$ avec la verticale.
- Soit $C$ le point d'intersection de la demi-droite $s$ avec la droite $d$.
- Depuis $C$ on mesure une distance de $b$ le long de la demi-droite $s$ pour obtenir un point $A$.
- Le lieu des points $A$ déterminé en faisant varier l'angle $\alpha$ est la conchoïde de Nicomède.
- Lorsque l'angle $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ la distance $b$ sur la demi-droite $s$ est prise dans la direction de $O$.







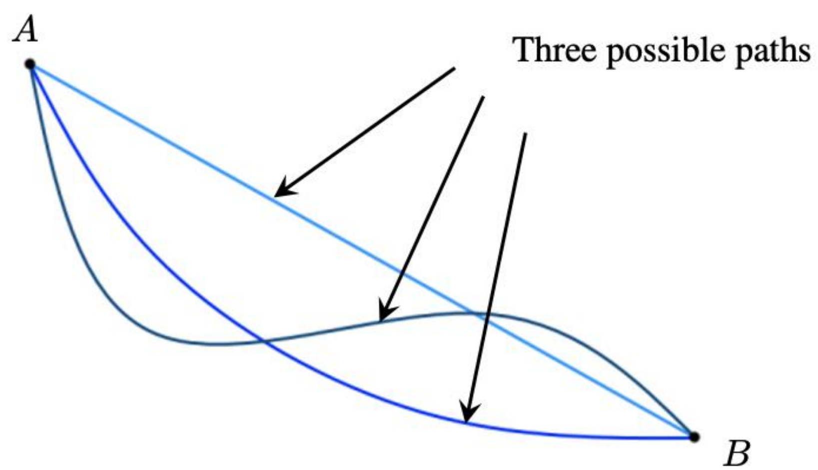
*Gare de Liège-Guillemins*

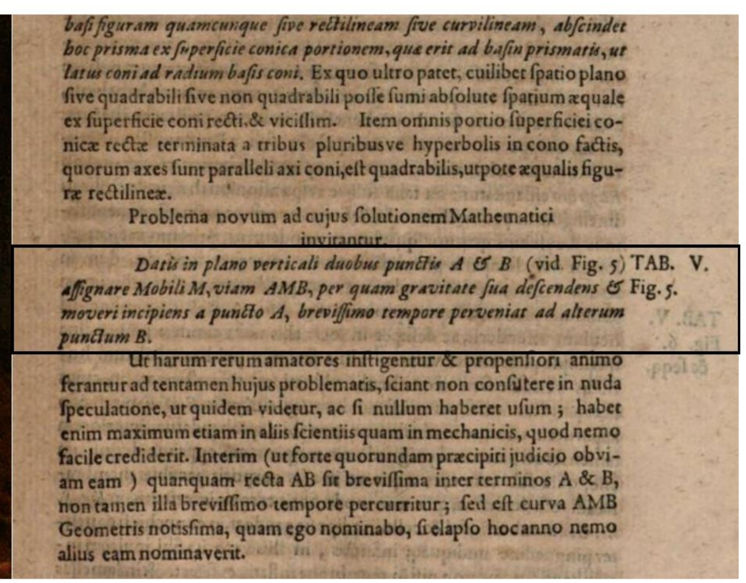
*œuvre de l'architecte espagnol Santiago Calatrava*

# La brachistochrone

En juin 1696, le célèbre mathématicien *Johann Bernoulli* a publié dans les *Acta Eruditorum*, le premier périodique scientifique allemand, le problème suivant :

*Étant donné deux points A et B dans un plan vertical, quelle est la courbe tracée par un point soumis à la seule gravité, qui part de A et atteint B dans le temps le plus court.*



*baſi figuram quamcunque ſive rectilineam ſive curvilineam, abſcindet hoc prisma ex ſuperficie conica portionem, quæ erit ad baſin prismatis, ut latus coni ad radium baſis coni.* Ex quo ultro patet, cuilibet ſpatio plano ſive quadrabili ſive non quadrabili poſſe ſumi abſolute ſpatium æquale ex ſuperficie coni recti, & viciſſim. Item omnis portio ſuperficiei conicæ rectæ terminata a tribus pluribusve hyperbolis in cono factis, quorum axes ſunt paralleli axi coni, eſt quadrabilis, utpote æqualis figuræ rectilineæ.

Problema novum ad cujus ſolutionem Mathematici invitantur.

*Datis in plano verticali duobus punctis A & B* (vid. Fig. 5) *aſſignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate ſua deſcendens & moveri incipiens a puncto A, breviſſimo tempore perveniat ad alterum punctum B.* TAB. V. Fig. 5.

Ut harum rerum amatores inſtigentur & propenſiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, ſciant non conſiſtere in nuda ſpeculatione, ut quidem videtur, ac ſi nullum haberet uſum; habet enim maximum etiam in aliis ſcientiis quam in mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam præcipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB ſit breviſſima inter terminos A & B, non tamen illa breviſſimo tempore percurritur; ſed eſt curva AMB Geometris notisſima, quam ego nominabo, ſi elapſo hoc anno nemo alius eam nominaverit.

- Ce défi mathématique est connu sous le nom de problème de la brachistochrone. Même si *Johann Bernoulli* savait déjà comment le résoudre lui-même, il a lancé un défi aux autres mathématiciens d'Europe et leur a accordé six mois pour le résoudre.
- Après ce délai, aucune réponse n'a été donnée. Même *Gottfried Leibniz* a demandé une prolongation du délai. L'après-midi du 29.1.1697, *Isaac Newton* a trouvé le défi dans son courrier. Il l'a ensuite résolu pendant la nuit et a envoyé la solution de manière anonyme.
- Les équations paramétriques de la brachistochrone pour $A(0{,}0)$ et $B(\pi, -2)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \sin(\theta) \\ y(\theta) = -1 + \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{où} \quad \theta \in [0, \pi]$$

# Courbure d'une courbe plane

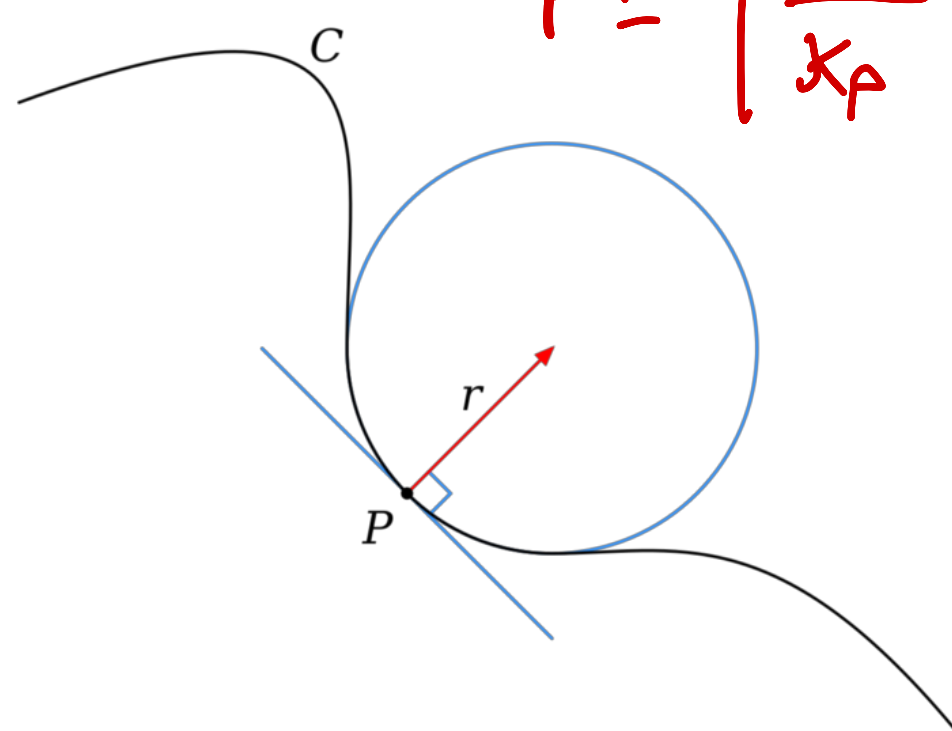
- **La courbure mesure la manière dont une courbe s'éloigne localement d'une ligne droite.**
- La courbure évalue le rapport entre la variation de la direction de la tangente à la courbe et un déplacement *d'une longueur infinitésimale* sur celle-ci : plus ce rapport est important, plus la courbure est importante.
- *Intuitivement* : la courbure indique de combien il faut tourner le volant d'une voiture pour aborder un virage (volant tourné modérément pour une courbure faible et fortement pour une courbure forte).

$$r = \left| \frac{1}{\kappa_P} \right|$$

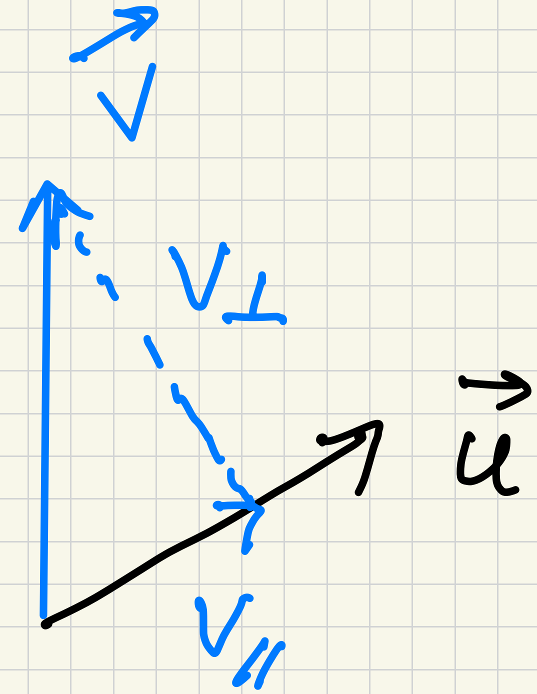
**Problème (Newton 1671) :**

Étant donné une courbe $C$ d'équation $y = f(x)$ et un point $P(a, f(a))$ sur la courbe, où $a \in \mathbb{R}$, trouver le *meilleur* cercle tangent à la courbe au point $P(a, f(a))$.

Nous assumerons que la fonction $f$ est dérivable au moins deux fois.



## Rappel



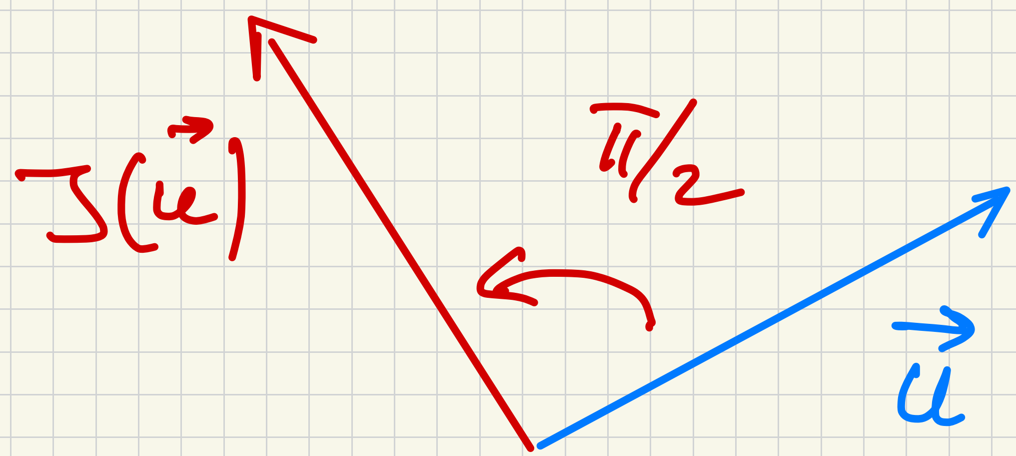

$$\vec{V} = \vec{V}_{//} + \vec{V}_{\perp}$$

$$\vec{V}_{//} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{V}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u} \qquad \vec{V}_{\perp} = \vec{V} - \vec{V}_{//}$$

$$\|\vec{V}_{\perp}\| = \frac{|\det(\vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u}\|}$$

# Définition

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ on définit $J(u) = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$




- $J(\vec{u}) \perp \vec{u}$
- $\| J(\vec{u}) \| = \| \vec{u} \|$
- $(\vec{u}, J(\vec{u}))$ forme une base directe

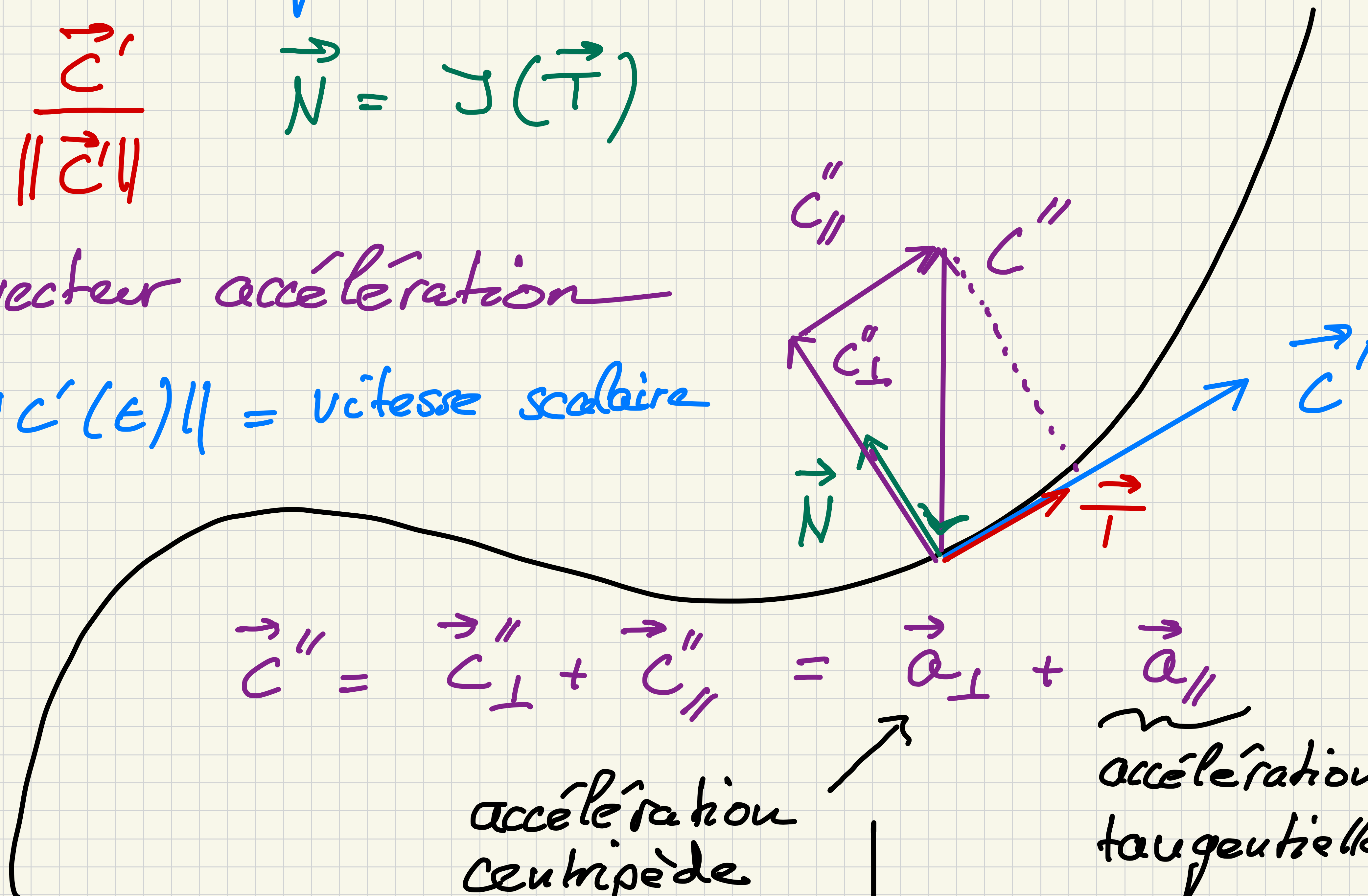
i.e. $\det(u, J(u)) > 0$

$\vec{c}\,'$ : vecteur tangent (vecteur vitesse)

$\vec{T} = \dfrac{\vec{c}\,'}{\|\vec{c}\,'\|}$ $\quad \vec{N} = J(\vec{T})$

$\vec{c}\,''$ : vecteur accélération

$v(t) = \|c'(t)\| =$ vitesse scalaire




$\vec{c}\,'' = \vec{c}\,''_{\perp} + \vec{c}\,''_{\parallel} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel}$

accélération centripède

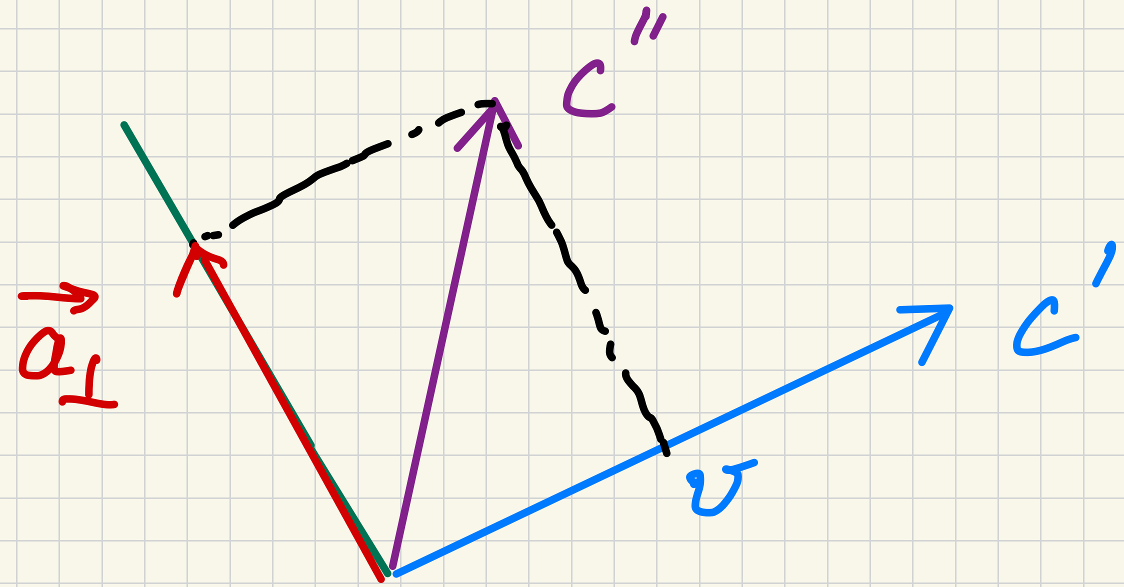
accélération tangentielle

$\neq 0$ si $c'(t)$ change de direction $\rightarrow$ courbure

$\neq 0$ si $v'(t) \neq 0$ (si $c'(t)$ change de norme !)

$\vec{a}_\perp = \vec{c}''_\perp$ dépend de $v$.

En fait $\| \vec{c}''_\perp \|$ est proportionnel à $v^2$




$$\| \vec{a}_\perp \| = \frac{\det(c', c'')}{\| c' \|} = \frac{\det(c', c'')}{v}$$

$$\boxed{\text{Courbure : } \kappa = \frac{\| \vec{a}_\perp \|}{v^2} = \frac{\det(c', c'')}{v^3}}$$

$$c' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad c'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

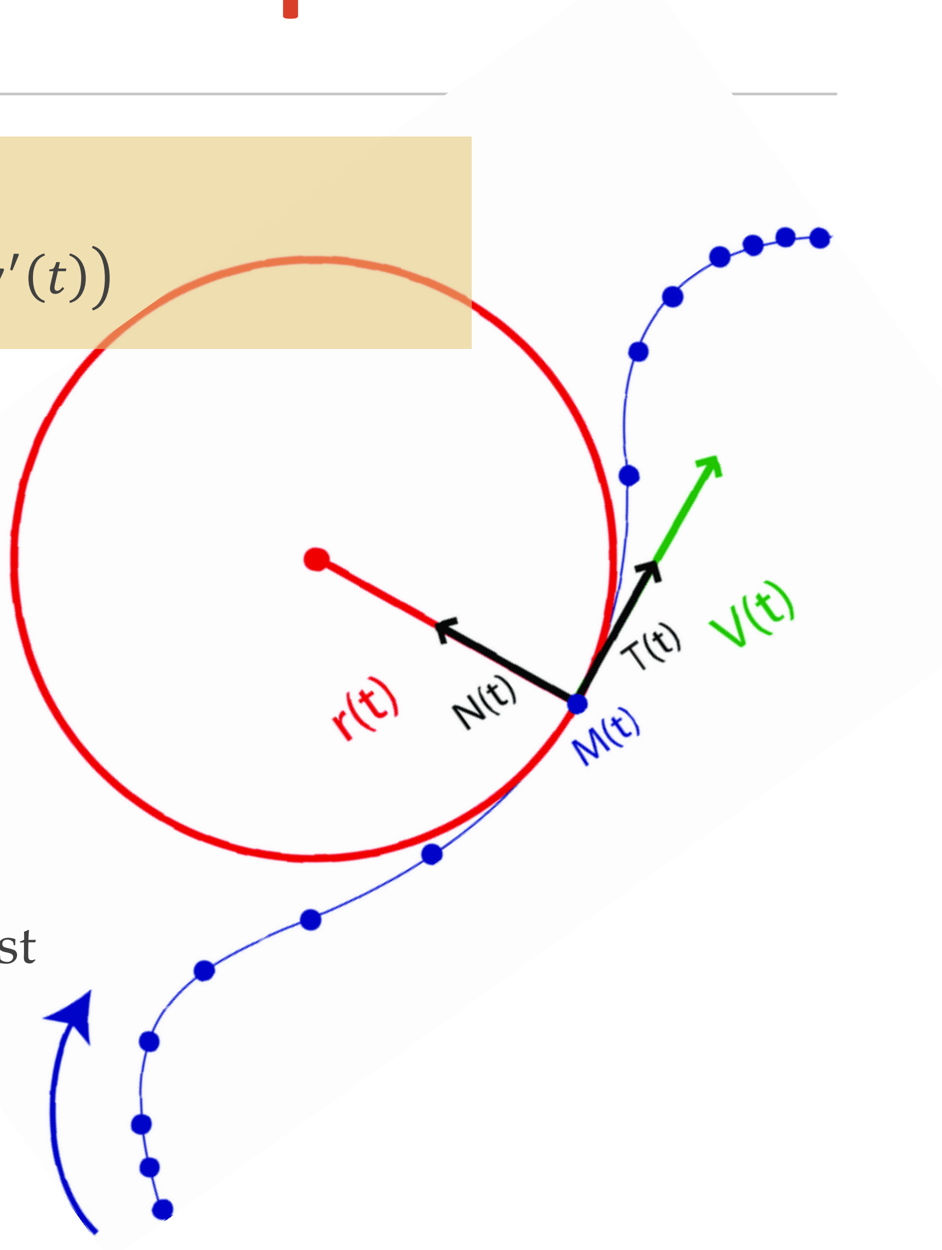
$$\det(c', c'') = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = x'y'' - x''y'$$

$$\boxed{\text{Courbure : } \kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}}$$

# Courbure d'une courbe plane

Soit c une courbe sous forme paramétrique $c(t) = (x(t), y(t))$

Nous avons vu que le vecteur tangent (ou vecteur-vitesse) est $\boldsymbol{c}'(t) = (x'(t), y'(t))$




Sa norme vaut $\quad v = \|\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{t})\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

Soit $\quad \vec{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{v} \cdot \boldsymbol{c}'(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{v} \cdot (\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t}))$ le vecteur tangent unitaire

et $\quad \vec{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{v} \cdot (-\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}))$ le vecteur orthogonal à $\vec{T}(t)$

Le couple $(\vec{T}, \vec{N})$ forme une base directe.

Si on dérive $\vec{T}(t)$ par rapport à $ds = v \cdot dt$ on trouve un vecteur qui est colinéaire à $\vec{N}(t)$.

La composante de $\frac{d}{ds}\vec{T}(t)$ selon $\vec{N}(t)$ est en fait la courbure au point. Après calculs on obtient

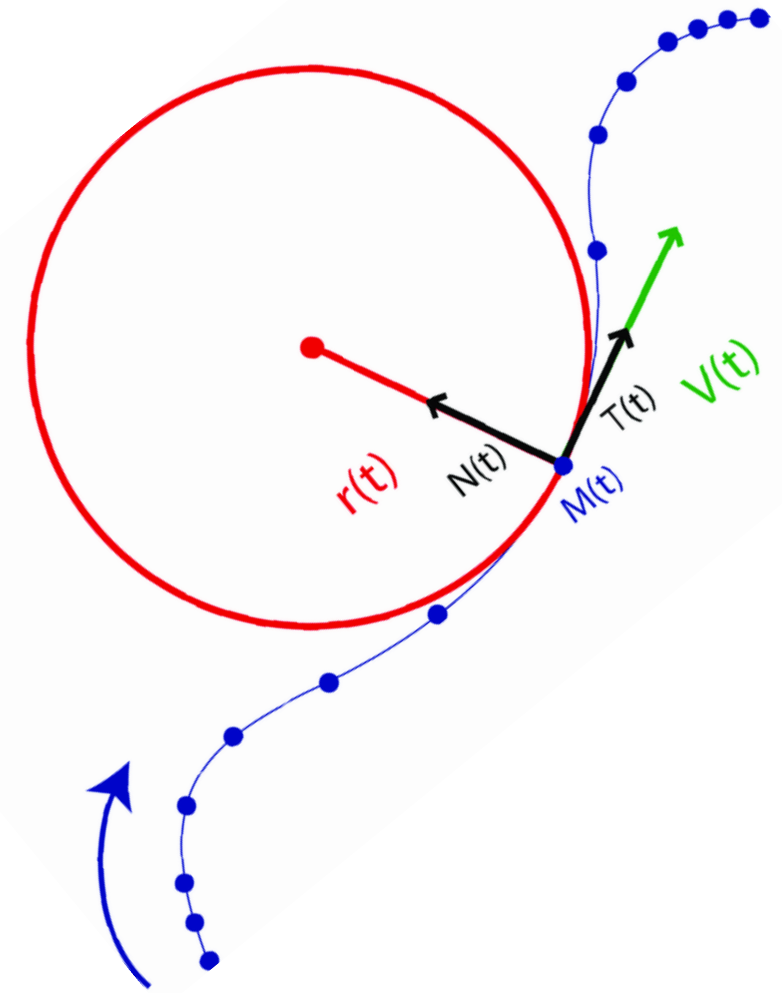
$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^2}\,\boldsymbol{c}'' \cdot \vec{N} = \frac{\det(c',\ c'')}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

# Courbure d'une courbe plane

$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^3}\,\boldsymbol{c}''\cdot\vec{N} = \frac{x'y''-x''y'}{v^3} = \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

On peut démontrer que la valeur absolue de la courbure en un point c(t) est indépendant du paramétrage. C'est donc bien une **caractéristique intrinsèque à la courbe** qui ne dépendant pas de la « vitesse de parcours » de cette courbe.

C'est le terme en $v^3$ au dénominateur qui assure ceci !!




La courbure a un signe qui dépend du sens de parcours de la courbe !!

Si $\kappa > 0$ la courbe tourne dans le sens trigonométrique pour la paramétrisation donnée

Si $\kappa < 0$ la courbe tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique pour la paramétrisation donnée.

Si on change le sens de parcours, $\vec{T}$ et $\vec{N}$ change de sens et la courbure change de signe.

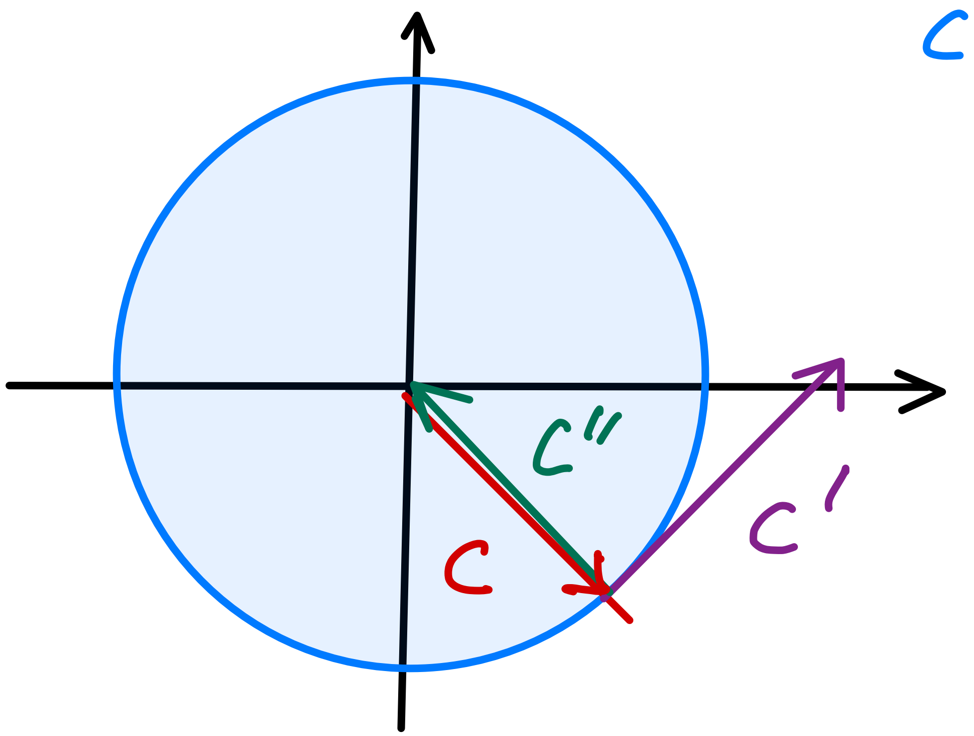
# Exemple

Soit le cercle de centre $C(a, b)$ et de rayon $R$. Calculer la courbure en tout point du cercle

$$\begin{cases} x(t) = a + R\cos t \\ y(t) = b + R\sin t \end{cases}$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} \qquad c''(t) = \begin{pmatrix} -R\cos t \\ -R\sin t \end{pmatrix}$$

$c'(t)$




$$v = \|c'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}$$

$$= R.$$

$$\det(c', c'') = \begin{vmatrix} -R\sin t & -R\cos t \\ R\cos t & -R\sin t \end{vmatrix} =$$

Ainsi pour n'importe quelle courbe, la courbure est l'inverse du rayon du cercle de courbure

$$r(a) = \left|\frac{1}{\kappa(a)}\right|$$

$$= R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2$$

Courbure : $\underline{\underline{\kappa}} = \dfrac{\det(c', c'')}{v^3} = \dfrac{R^2}{R^3}$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{R}}}$$

# Courbure d'une courbe plane

Soit un arc de cercle de rayon $r$ et un petit angle $d\theta$. La longueur de l'arc de cercle vaut alors

$$ds = r \cdot d\theta$$

Comme la courbure est l'inverse du rayon de courbure ceci donne

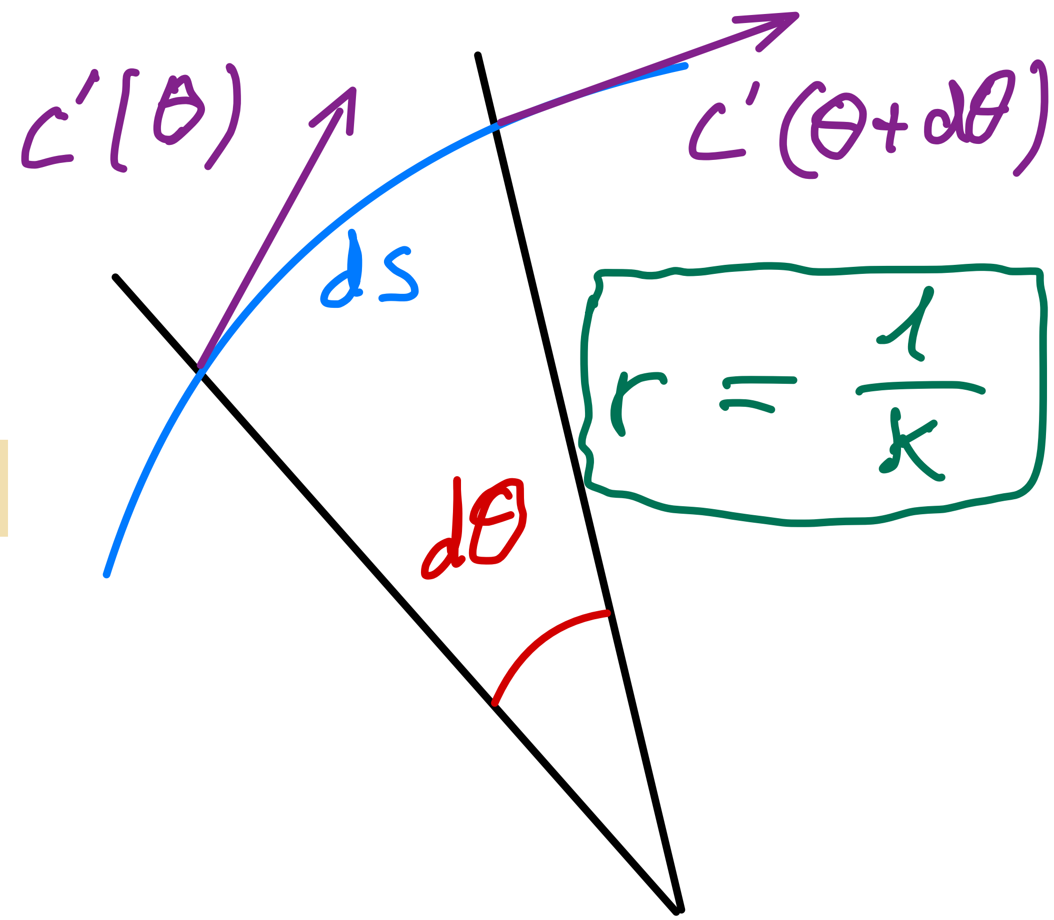
$$ds = \frac{1}{\kappa} \cdot d\theta$$

Et donc

$$\kappa \, ds = d\theta$$

et enfin

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$




Ainsi la courbure peut être interprétée comme le taux de rotation du vecteur tangent par unité de longueur.

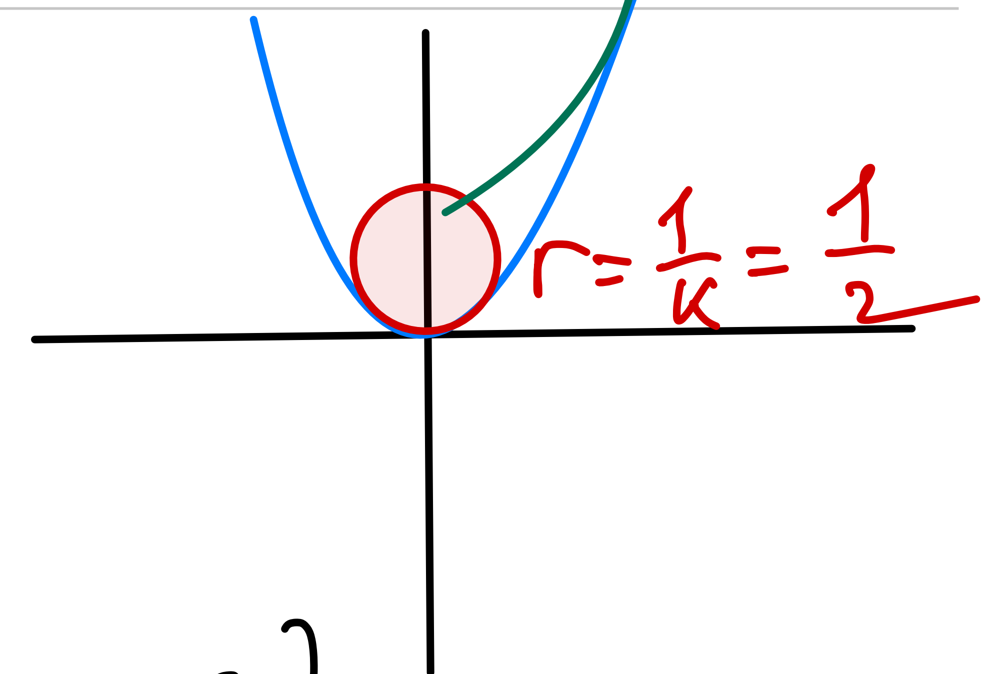
$t = 1 \Rightarrow P(1,1) \Rightarrow K(1) = \frac{2}{\sqrt{125}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$

$r = \frac{25}{2\sqrt{5}}$

# Exemple

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^2$ (parabole).

Calculer la courbure à l'origine $O(0,0)$ et au point $P(1,1)$.




$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \end{pmatrix} \qquad c''(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

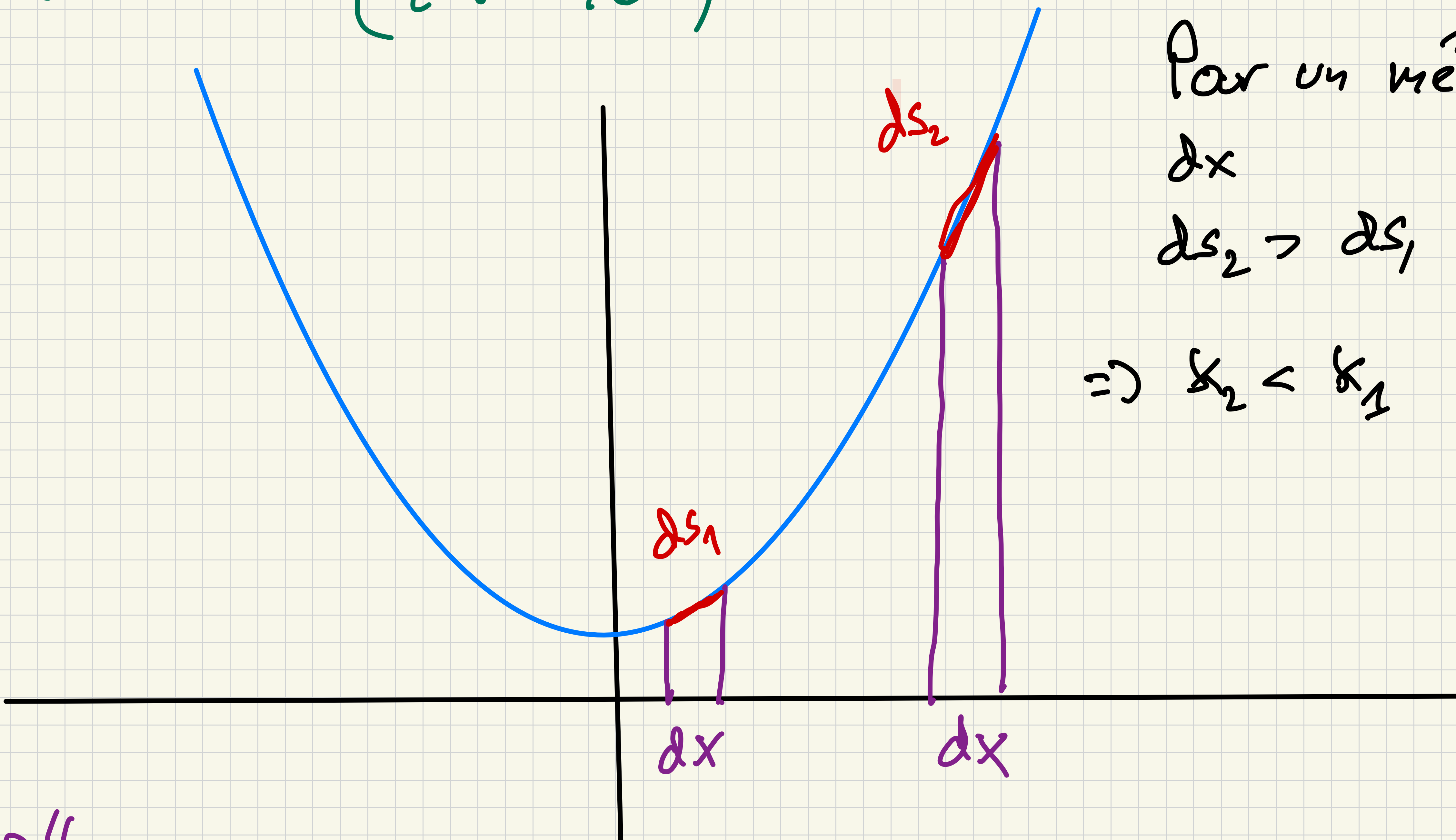
$$v(t) = \|c'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\det(c', c'') = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$K = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

$t = 0 \rightarrow O(0,0) \rightarrow K(0) = 2$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}} = 0$$




Par un même $dx$

$ds_2 > ds_1$

$\Rightarrow \kappa_2 < \kappa_1$

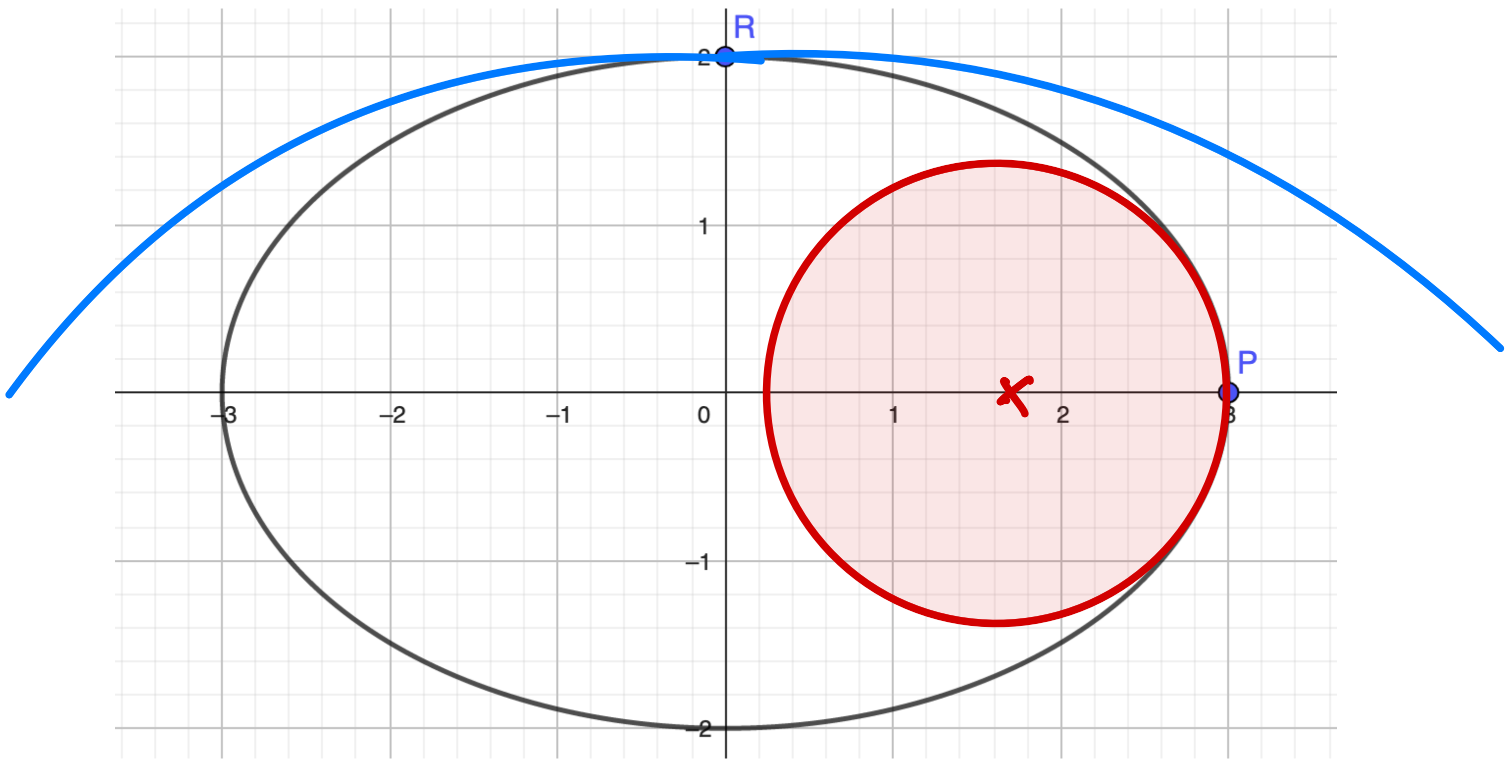
$f''(x) = 2$ cste

# Exercice

Soit l'ellipse définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = 3\cos(\theta) \\ y(\theta) = 2\sin(\theta) \end{cases} \qquad \text{où } \theta \in [0,2\pi].$$

Calculer la courbure aux points $P(3,0)$ et $R(0,2)$.




$\cdot$ $C$

$$\begin{cases} x(\theta) = 3\cos\theta \\ y(\theta) = \underline{\underline{2\sin\theta}} \end{cases} \qquad c'(\theta) = \begin{pmatrix} -3\sin\theta \\ 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$v(\theta) = \|c'(\theta)\| = \sqrt{9\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{4 + 5\sin^2\theta}$$

$$c''(\theta) = \begin{pmatrix} -3\cos\theta \\ -2\sin\theta \end{pmatrix} = -c(\theta)$$

$$\det(c', c'') = \begin{vmatrix} -3\sin\theta & -3\cos\theta \\ 2\cos\theta & -2\sin\theta \end{vmatrix} = 6$$

$$\kappa(\theta) = \frac{\det(c', c'')}{v^3} = \frac{6}{(4 + 5\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow P(3,0)$$

$$\Rightarrow \kappa(0) = \kappa_P = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\Rightarrow r_P = \frac{1}{\kappa_P} = \frac{4}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Q(0,2) \quad \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

$$0{,}\overline{2}$$

$$r_Q = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

# Courbure : forme cartésienne

$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^3}\,\boldsymbol{c}'' \cdot \vec{N} = \frac{\det(c', c'')}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Si la courbe est donnée sous forme cartésienne explicite

$$y = f(x)$$

alors la paramétrisation standard (voir slide 5) $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

donne $x'(t) = 1$, $x''(t) = 0$, $y'(t) = f'(t)$ et $y''(t) = f''(t)$

puis $c'(t) = \big(1, f'(t)\big)$ et donc $v = \sqrt{1 + f'(t)^2}$

et enfin la courbure en un point $P(a, f(a))$ vaut

$$\kappa(a) = \frac{f''(a)}{(1 + f'(a)^2)^{3/2}}$$

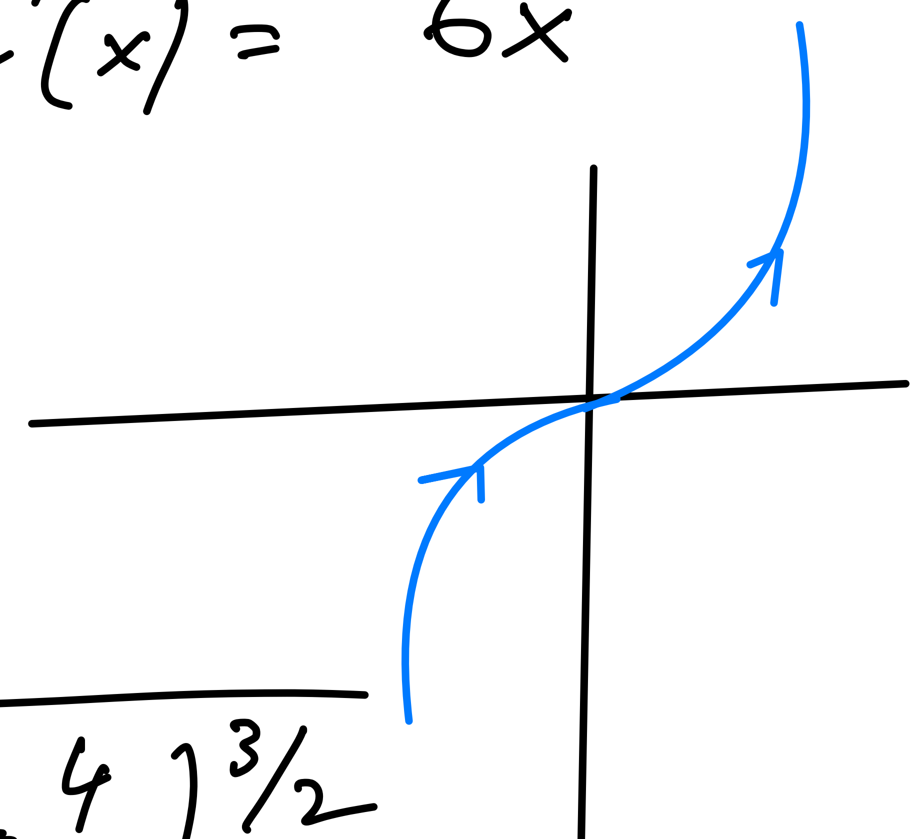
$$\begin{vmatrix} c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f' & f'' \end{vmatrix} = f''$$

# Exercice

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^3$. Calculer la courbure, ~~ainsi que les coordonnées~~ du ~~centre du cercle osculateur en un point sur la courbe $P(a, a^3)$, où $a \in \mathbb{R}$.~~

$y = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad f''(x) = 6x$

$$K(x) = \frac{6x}{(1 + 9x^4)^{3/2}}$$



$P(a, a^3) \qquad K(P) = \dfrac{6a}{(1 + 9a^4)^{3/2}}$

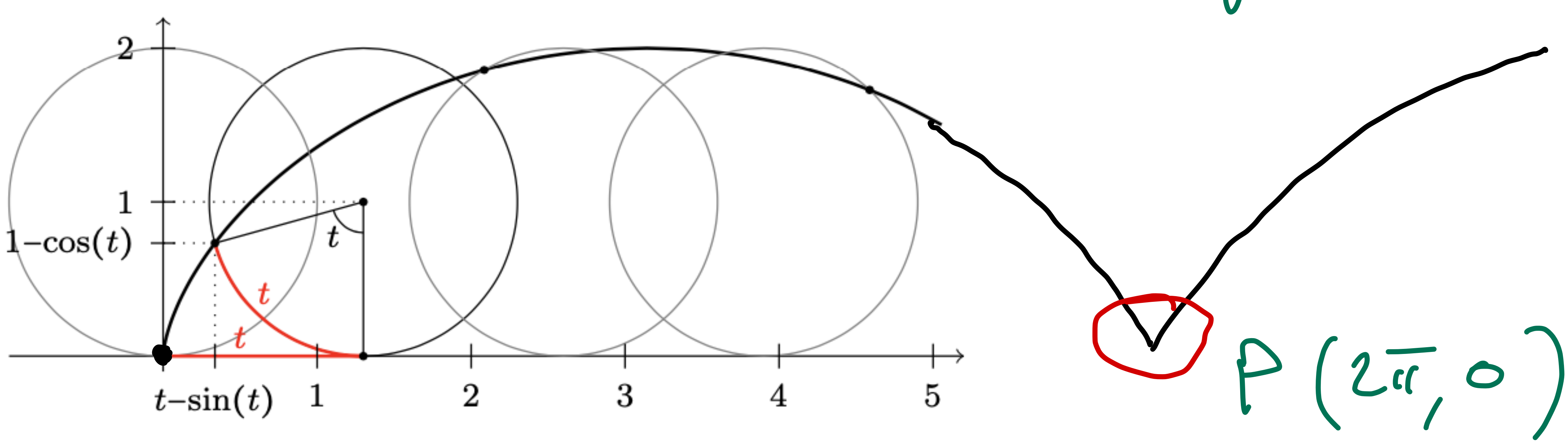
$K(0) = 0$

$K(x) < 0$ si $x < 0$

$K(x) > 0$ si $x > 0$

# La cycloïde

$t = 2\pi$
$x = 2\pi$
$y = 0$




- La cycloïde est une courbe plane, trajectoire d'un point fixé à un cercle (de rayon 1) qui roule sans glisser sur une droite.

$$\begin{pmatrix} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{pmatrix}$$

- La courbe peut être définie paramétriquement par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad \| \quad \begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \text{ où } \ t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à l'équation cartésienne :

$$x = \arccos(1 - y) - \sin(\arccos(1 - y)).$$