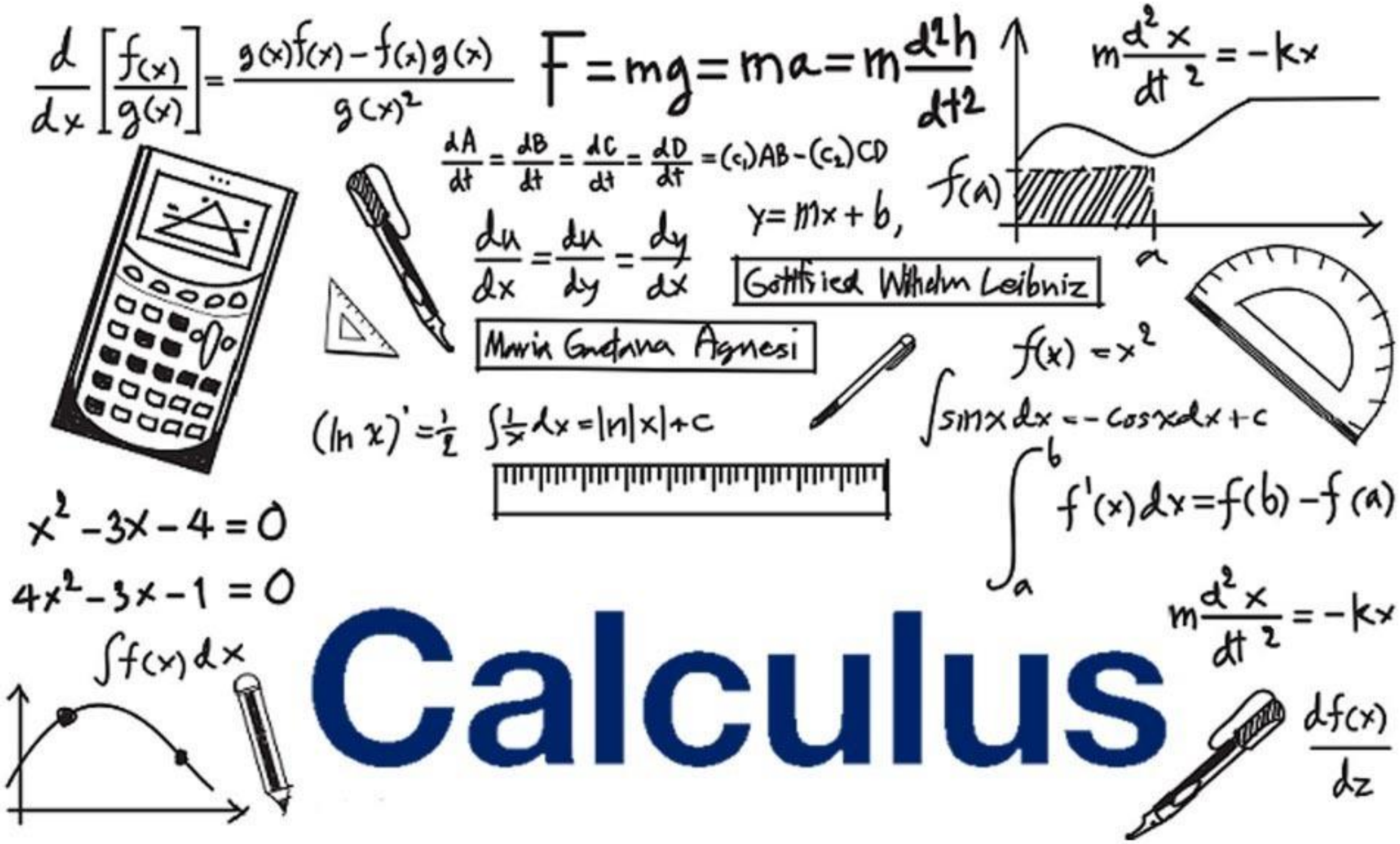
EPFL



Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Dérivées d'ordres supérieurs

Philippe Chabloz

Définitions

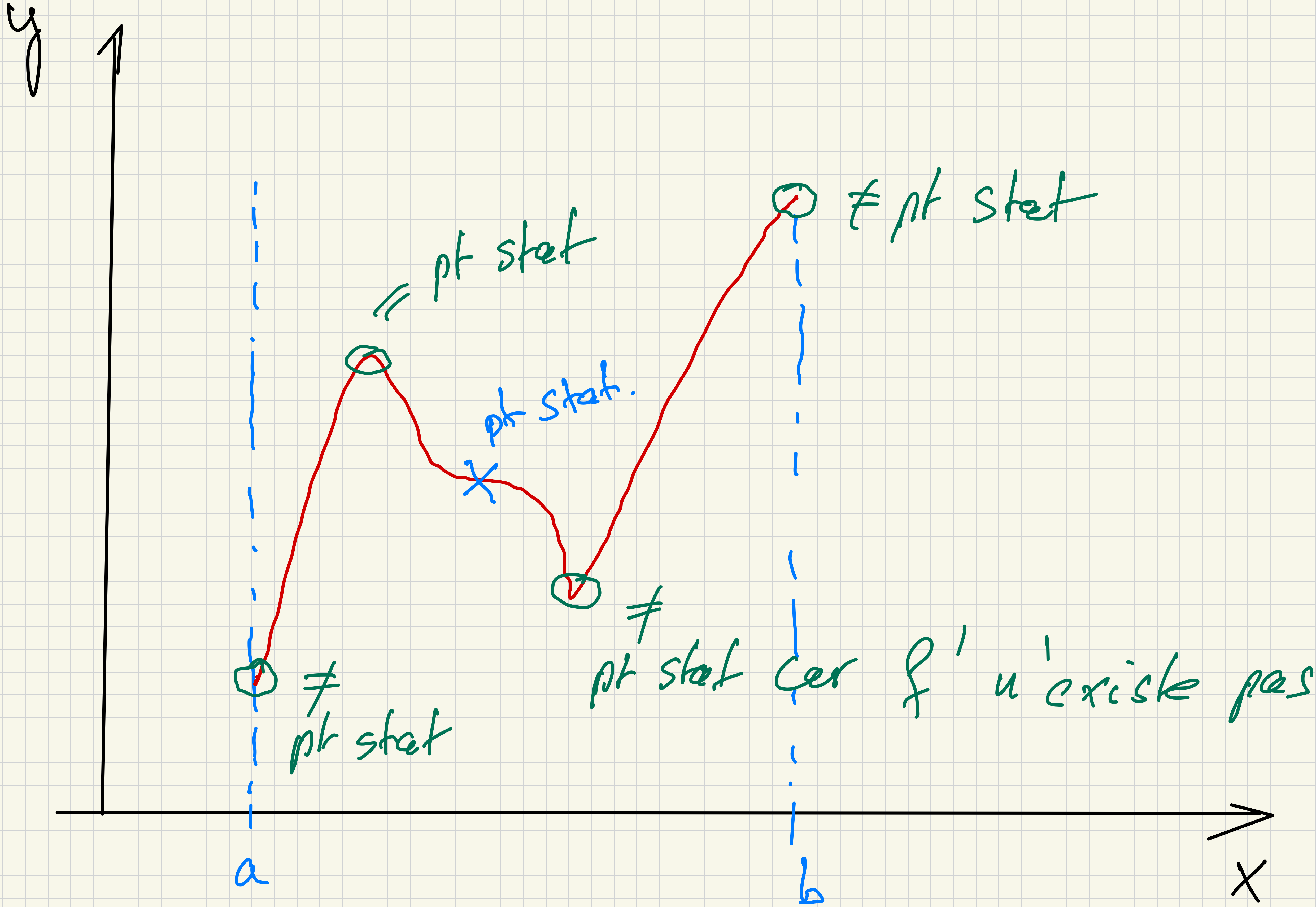
1) x_0 est un point stationnaire de f si $f'(x_0) = 0$

2) x_0 est un extremum local de f si c'est un extremum de f sur un voisinage de x_0

plats

$$\text{pt stationnaire} \;\not\Rightarrow\; \text{extremum local}$$

$$\text{pt stationnaire} \;\not\Leftarrow\; \text{extremum local}$$



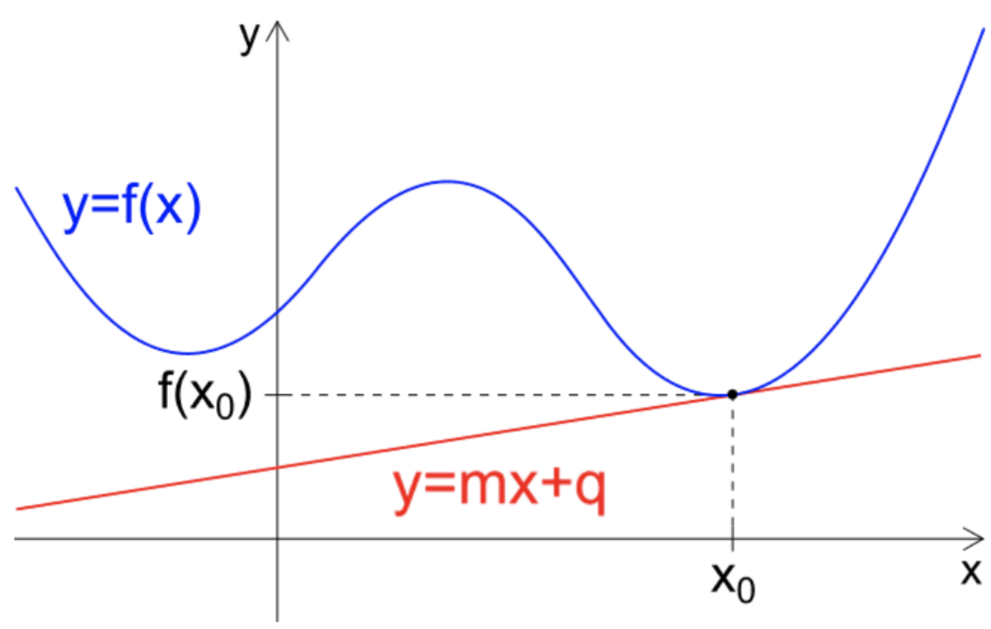
y
x
a
b
= pt stat
pt stat.
≠ pt stat
≠ pt stat car f' n'existe pas
≠ pt stat

Dérivée seconde

- Le processus de différenciation peut être appliqué *plusieurs fois de suite*, conduisant notamment à la dérivée seconde f'' de la fonction f, qui n'est que la dérivée de la dérivée.
- La dérivée seconde a souvent une *interprétation physique utile*. Par exemple, si $f(x)$ est la position d'un objet au temps x, alors $f'(x)$ est sa vitesse au temps x et $f''(x)$ est son accélération au temps x.

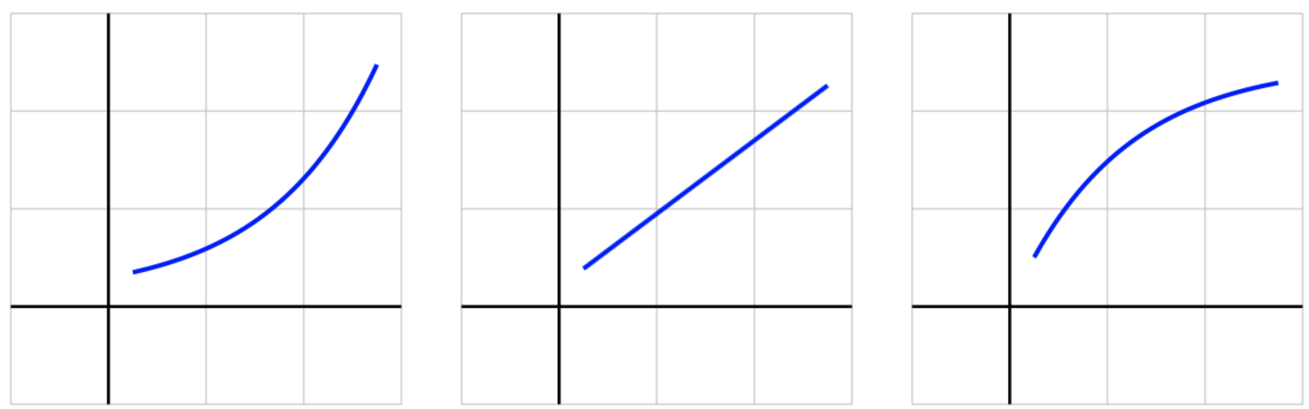
On définit la **dérivée seconde de la fonction continue et derivable f dans le point x_0** comme la limite pour h qui tend vers 0 du *double* du coefficient directeur de la parabole *sécante*, qui passe par les points $(x_0 - h, f(x_0 - h))$,$(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$:

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

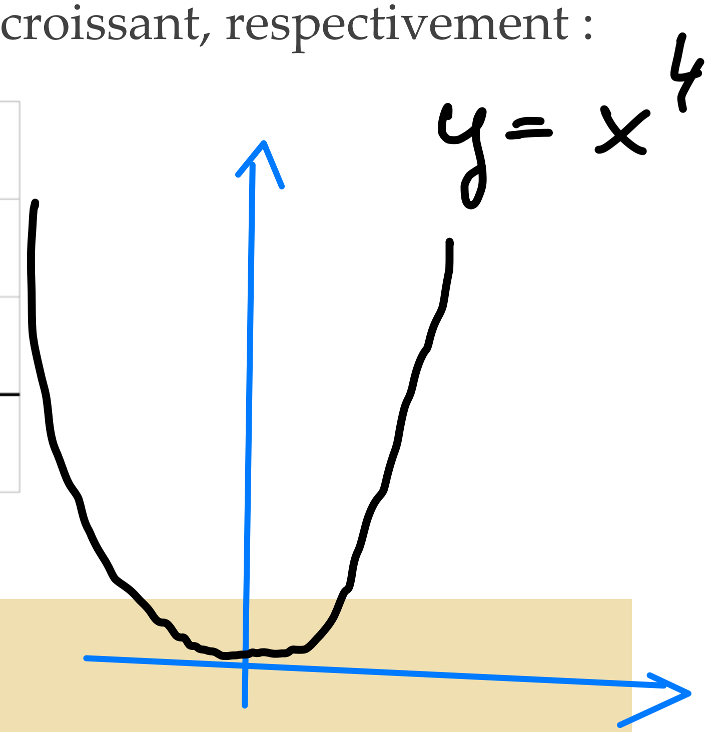


Interpretation géométrique

- Il est naturel de se demander si une fonction continue est croissante ou décroissante, mais aussi de se demander *comment* une fonction est croissante ou décroissante.
- Considérons les trois fonctions continue et croissantes ci-dessous : l'une est croissante à un taux croissant, l'autre est croissante à un taux constant et la troisième est croissante à un taux décroissant, respectivement :



convexe *droite* *concave*



Fonction convexe ou concave ?

Soit $]a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle :

1. Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est **convexe** sur $]a, b[$.
2. Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est **concave** sur $]a, b[$.
3. Si f''change de signe en x_0 alors f a un **point d'inflexion** en x_0. Il est **nécessaire mais pas suffisant** que $f''(x_0) = 0$.

Exemple : la fonction $f(x) = x^4$ est convexe sur tout $\mathbb{R}$ bien que $f''(0) = 0$.

Point d'inflexion

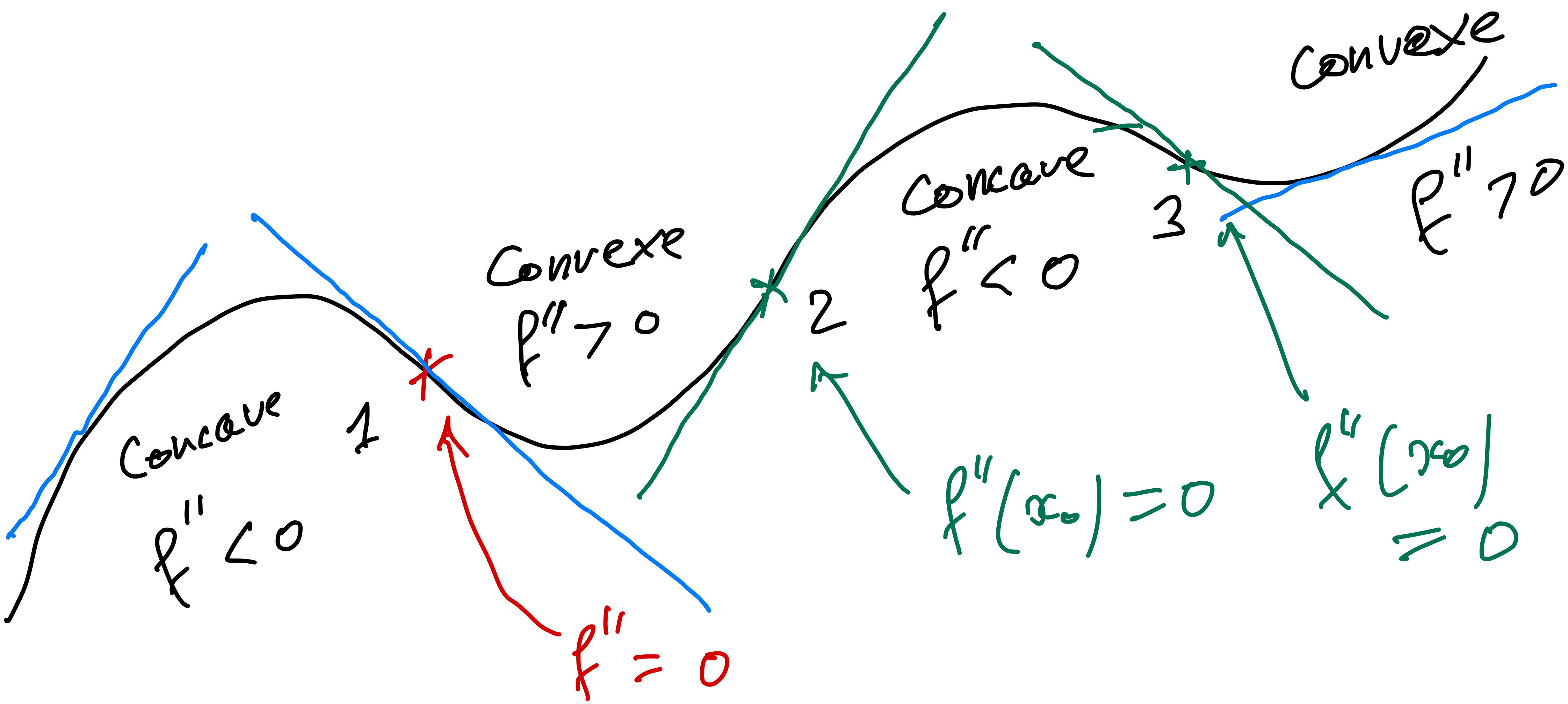
Soit f une fonction deux fois dérivable au voisinage de x_0. Alors un x_0 est un point d'inflexion si

1. $f''(x)$ change signe en x_0

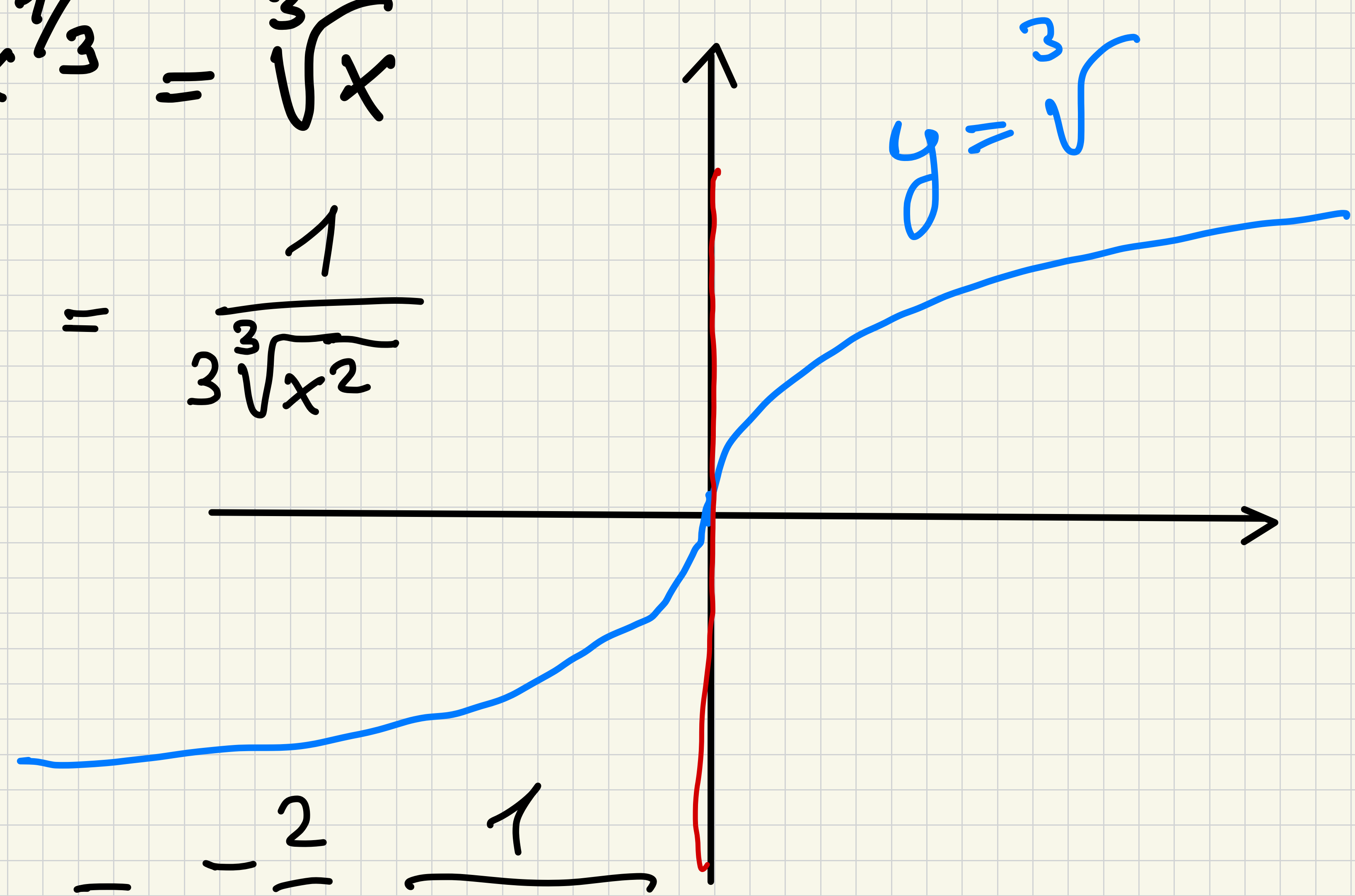
   → si $f''(x_0)$ existe ceci implique que $f''(x_0) = 0$

   → mais $f''(x_0)$ peut très bien ne pas exister !! (exemple : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ci-après)

2. Le graphe de f croise sa tangente en x_0
3. La courbure du graphe de f passe de concave à convexe ou inversement.



Exemple $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$



$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$$

$$= -\frac{2}{9} \frac{1}{x^{5/3}} = -\frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

		0	
f''	$+$	‖	$-$
f'	$+$	‖	$+$
f	$\cup \nearrow$	Φ	$\cap \nearrow$

Trouver les extrema d’une fonction

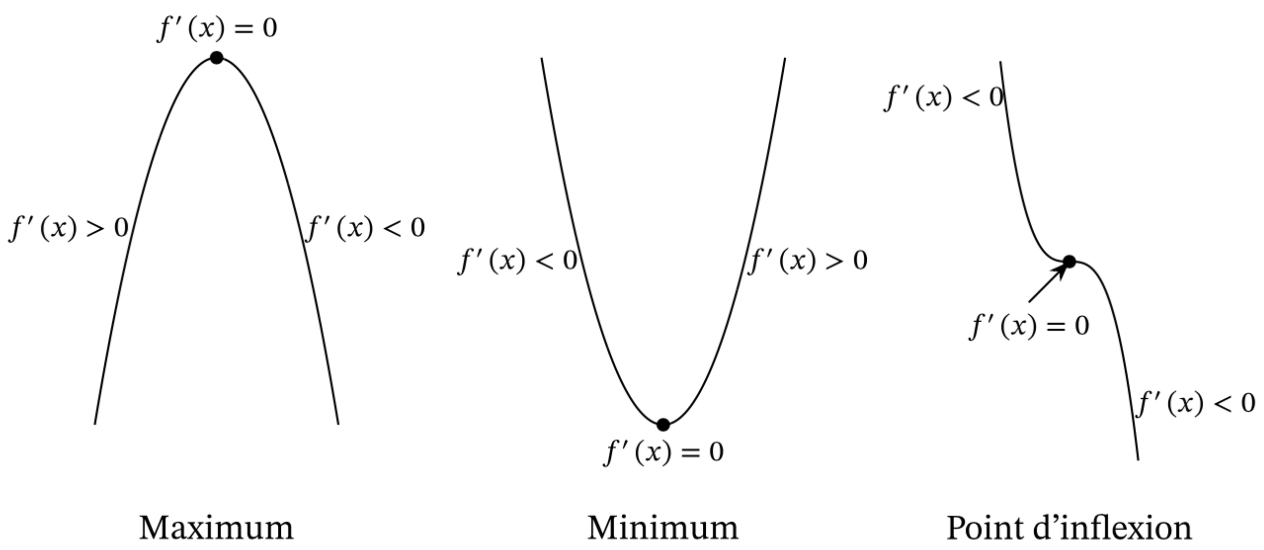
Une des premières motivations du calcul différentiel fut de déterminer le maxima ou minima d’une fonction.

- L'étude des extrema (maximum et minimum, locaux ou globaux) passe par la recherche des zéros de la dérivée première, appelés **points stationnaires (ou critiques) de f.**
- Un point stationnaire n'est pas nécessairement un point d’extremum. On peut cependant, sous les hypothèses supplémentaires suivantes, affirmer qu'un point stationnaire est un point d’extremum :

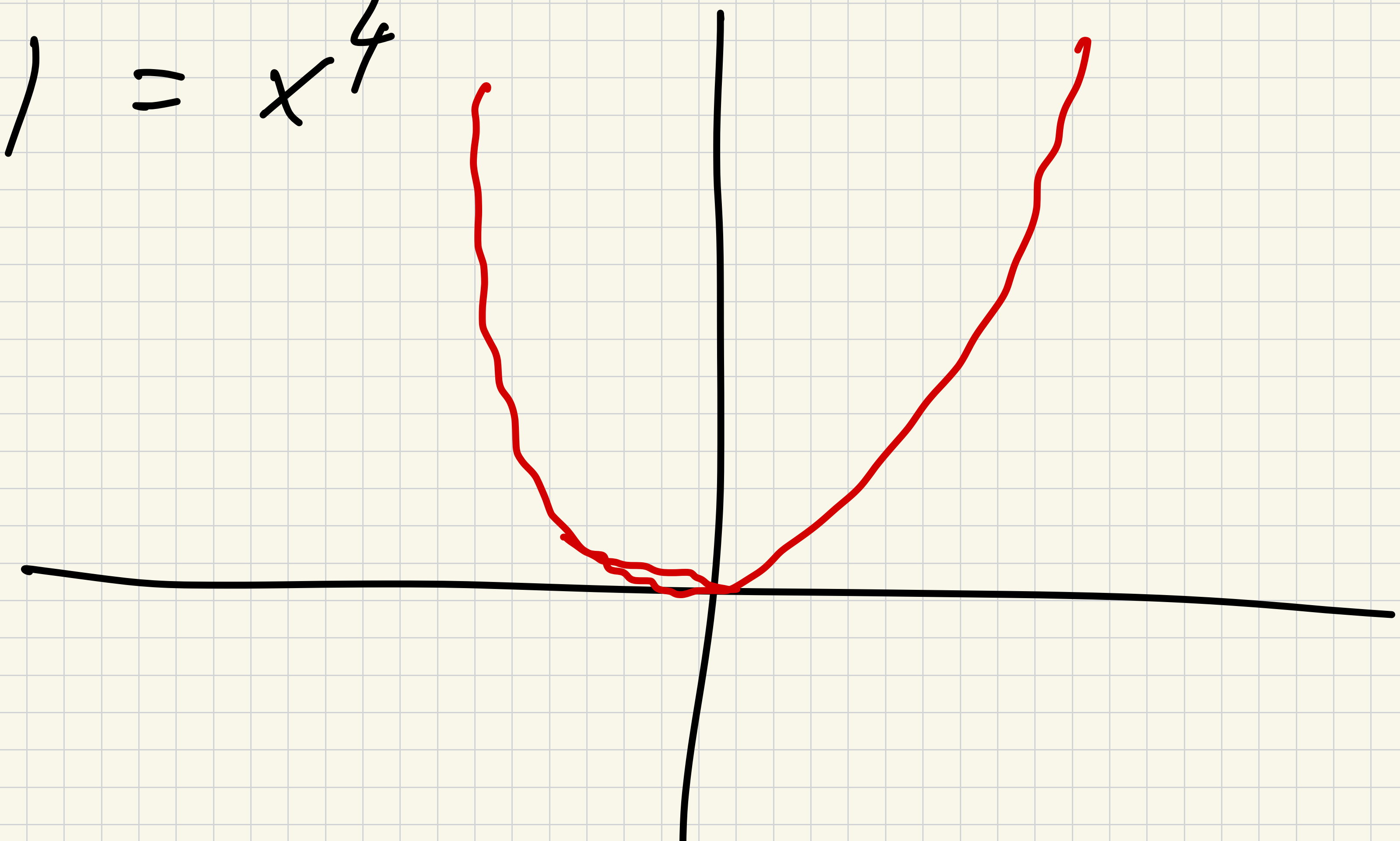
si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$ alors le point x_0 est un **maximum local**,

si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ alors le point x_0 est un **minimum local**.

si $f'(x_0) = 0$ et f'' change de signe en x_0 alors le point x_0 est un **point d’inflexion et donc un plat**.



Ex : $f(x) = x^4$



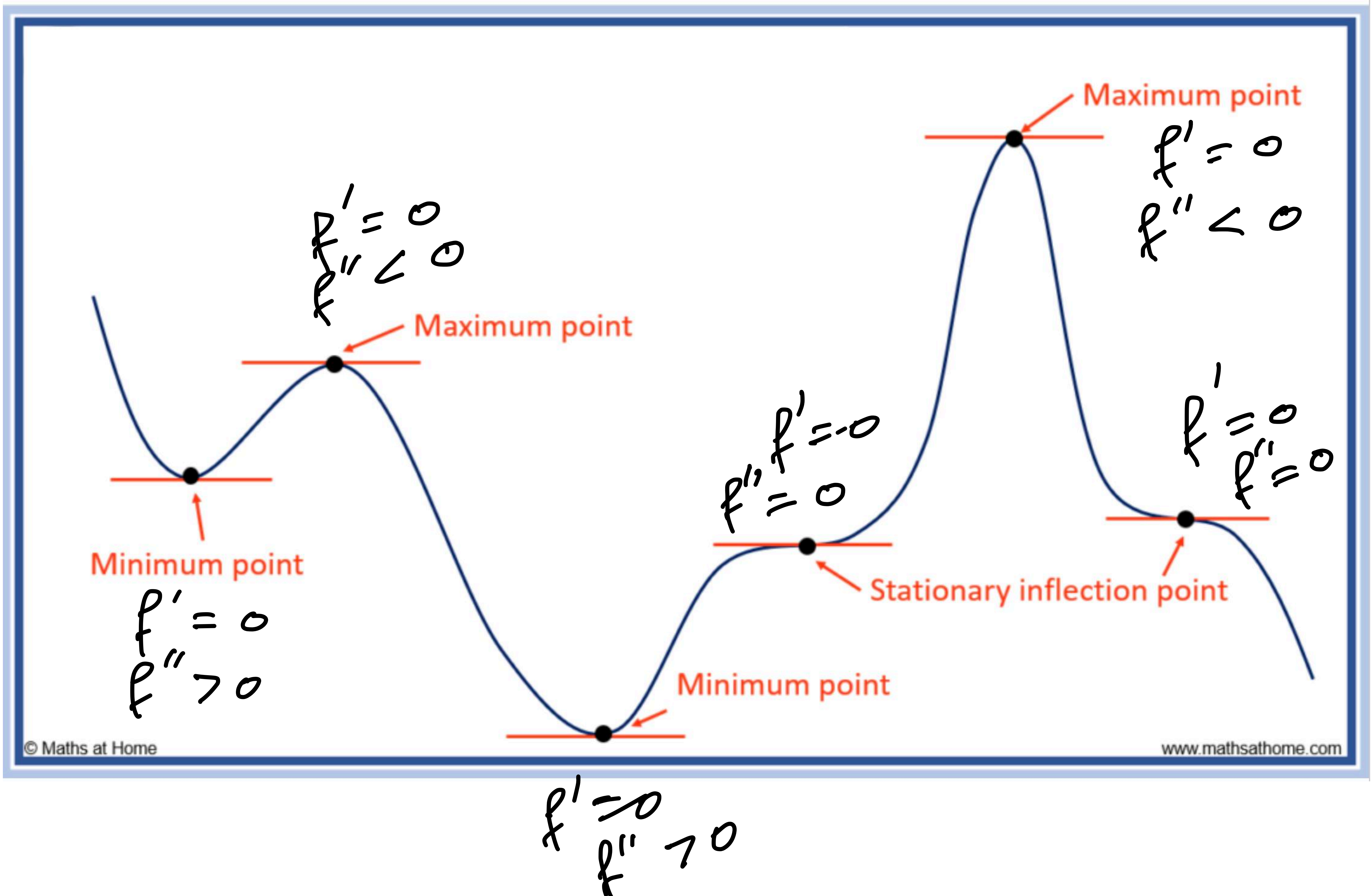
$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = \underline{\underline{12x^2}}$

$f''(0) = 0$ mais f'' ne change pas de signe en 0

$f'' = 12x^2$

	0	
+	0	+


Maximum point
$f' = 0$
$f'' < 0$
$f' = 0$
$f'' < 0$
Maximum point
$f' = 0$
$f'' = 0$
$f' = 0$
$f'' = 0$
Minimum point
$f' = 0$
$f'' > 0$
Stationary inflection point
Minimum point
© Maths at Home
www.mathsathome.com
$f' = 0$
$f'' > 0$

Exemple

$f''(x) = 6x - 2$

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

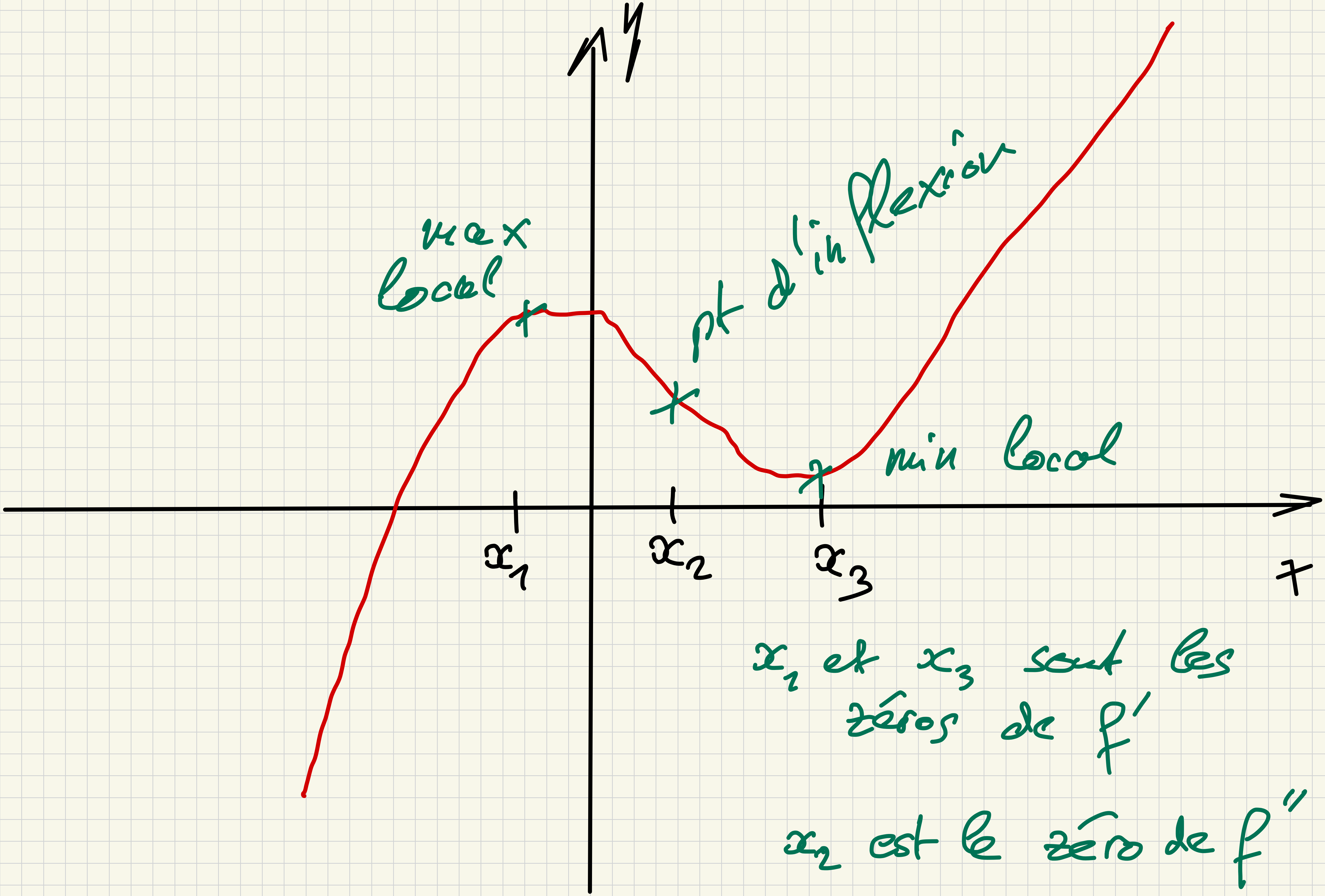
Déterminons les ponts de maximum et minimum locaux de la fonction donnée par

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 3 =$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

		x_1 $1/3 - \frac{\sqrt{10}}{3}$		x_2 $1/3$		$1/3 + \frac{\sqrt{10}}{3} = x_3$	
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f	$\nearrow$ $\cap$	max	$\searrow$ $\cap$	pt inflexion	$\searrow$ $\cup$	minimum	$\nearrow$ $\cup$

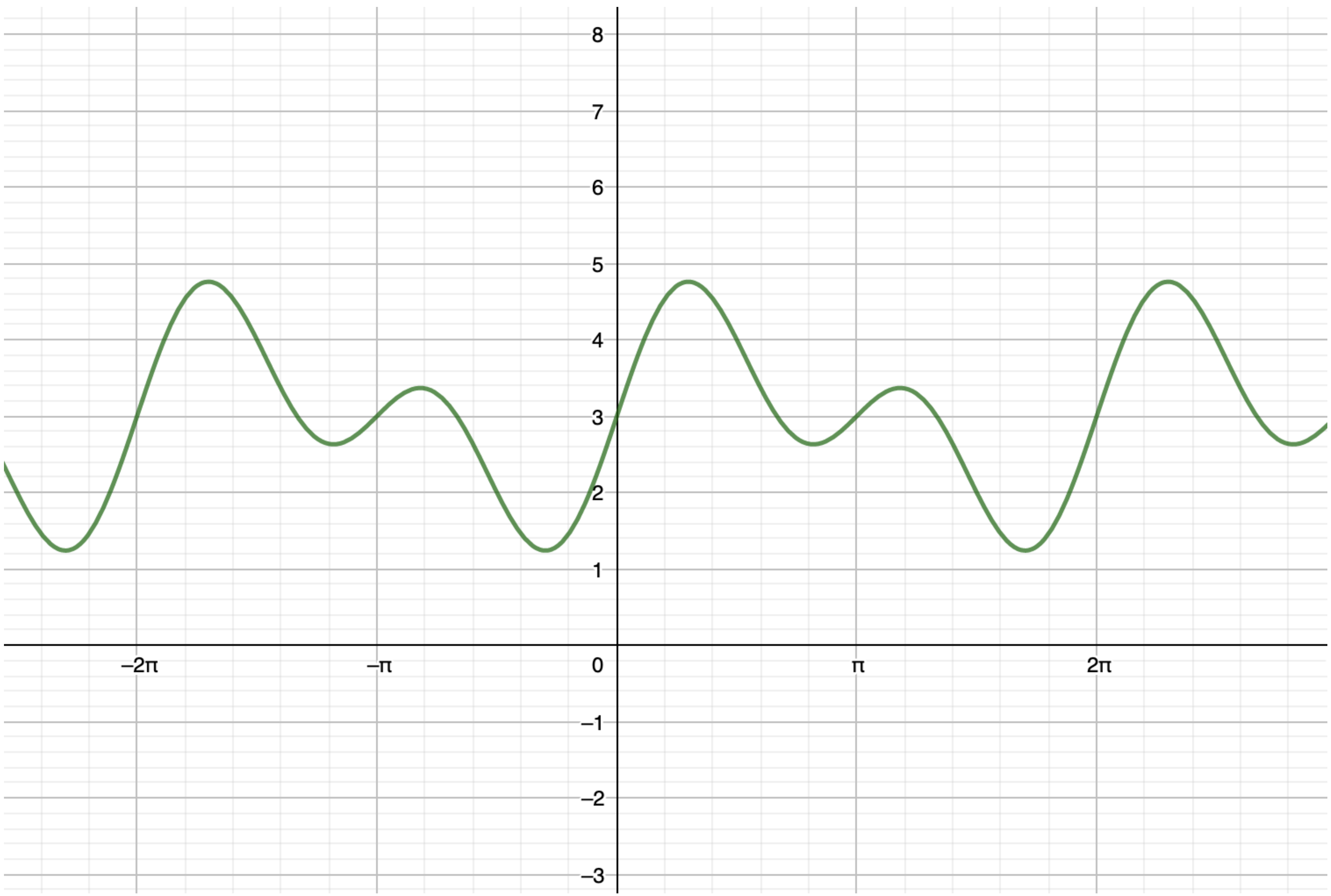


x_1 et x_3 sont les zéros de f'

x_2 est le zéro de f''

Exercice

Pouvez-vous identifier l'un des points d'inflexion sur le graphe de la fonction $f(x) = \sin(2x) + \sin(x) + 3$?



$$f(x) = \sin(2x) + \sin(x) + 3$$

$$f'(x) = 2\cos(2x) + \cos(x)$$

$$f''(x) = -4\sin(2x) - \sin(x) = 0$$

$$4\underbrace{\sin(2x)}_{2\cos(x)\sin(x)} + \sin(x) = 0$$

$$\boxed{x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{8}\right) + k \cdot 2\pi}$$

$$8\cos(x)\sin(x) + \sin(x) = 0$$

$$\sin(x)\{8\cos(x) + 1\} = 0$$

$$8\cos x + 1 = 0$$

$$\sin(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{1}{8}$$

En général, l'équation

$$\boxed{\cos(\alpha) = x \in [-1;1]}$$

a une infinité de solutions qui sont

$$\boxed{\alpha = \pm \arccos(x) + k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Sinus : De même $\boxed{\sin(\alpha) = x \in [-1;1]}$ a comme solutions

$$\boxed{\alpha = \arcsin(x) + k \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}}$$

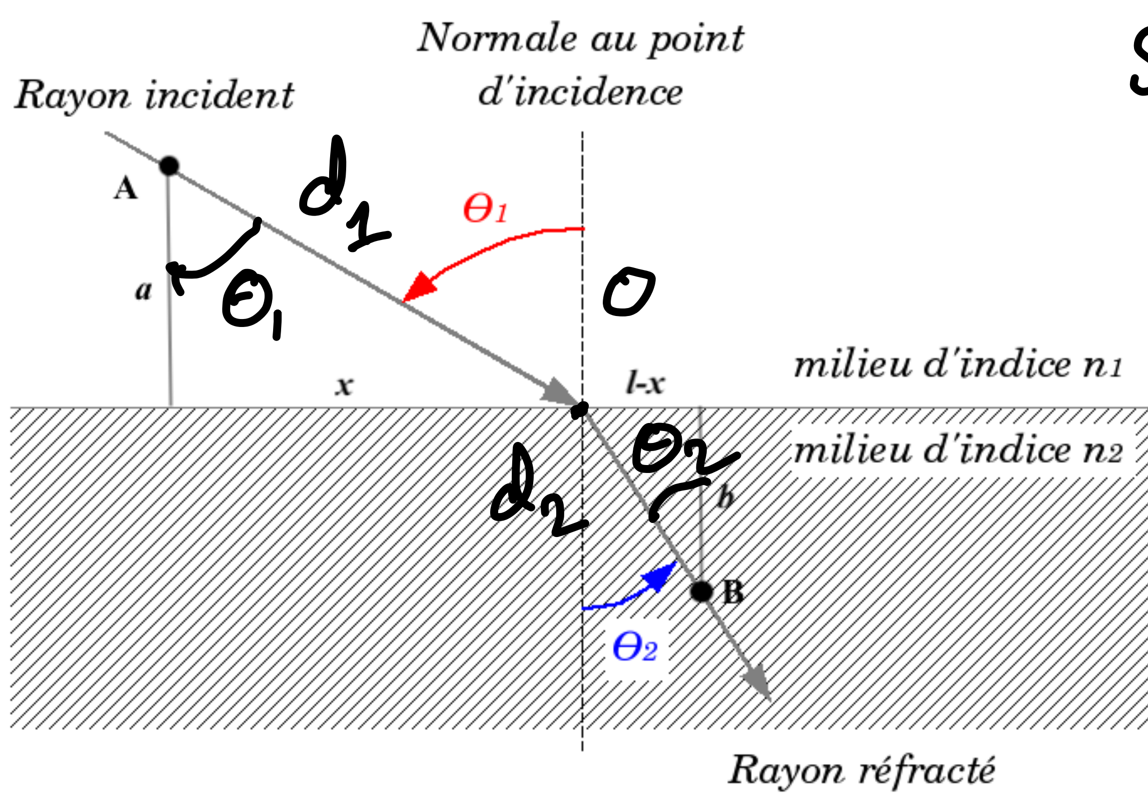
EPFL

Exercice (loi de Snellius)

En 1657, Fermat essaie d'expliquer la loi de Snellius décrivant la réfraction de la lumière au passage d'un milieu où sa vitesse est v_1 dans un autre où sa vitesse est v_2. Soient deux points A et B donnés. Il s'agit de déterminer les angles θ_1 et θ_2 tels que la lumière aille le plus rapidement possible de A à B.

a) Trouver la distance $d(x)$ entre A et B en fonction de x et le temps $t(x)$ en utilisant le fait que la vitesse est égale à la distance divisée par le temps.

b) Calculez la dérivée de $t(x)$ afin de trouver une condition à imposer sur les angles θ_1 et θ_2.



$$\sin\theta_1 = \frac{x}{AO}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{l-x}{OB}$$

Solution

$$v = \frac{d}{t} \qquad t = \frac{d}{v}.$$

$$x = \overline{AO} \cdot \sin\theta_1 = d_1 \sin\theta_1$$

$$l - x = \overline{OB} \cdot \sin\theta_2 = d_2 \sin\theta_2$$

$$d_1 = \frac{x}{\sin\theta_1} \qquad d_2 = \frac{l-x}{\sin\theta_2}$$

$$t_1 = \frac{x}{\sin\theta_1 \, v_1} \qquad t_2 = \frac{l-x}{\sin\theta_2 \cdot v_2}$$

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \qquad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

$$t_1 = \frac{x \; n_1}{\sin\theta_1 \cdot c} \qquad t_2 = \frac{(l-x)\, n_2}{\sin\theta_2 \cdot c}$$

$$t(x) = t_1 + t_2$$

$$= \frac{1}{c}\left[\frac{x\, n_1}{\sin\theta_1} + \frac{(l-x)\, n_2}{\sin\theta_2}\right]$$

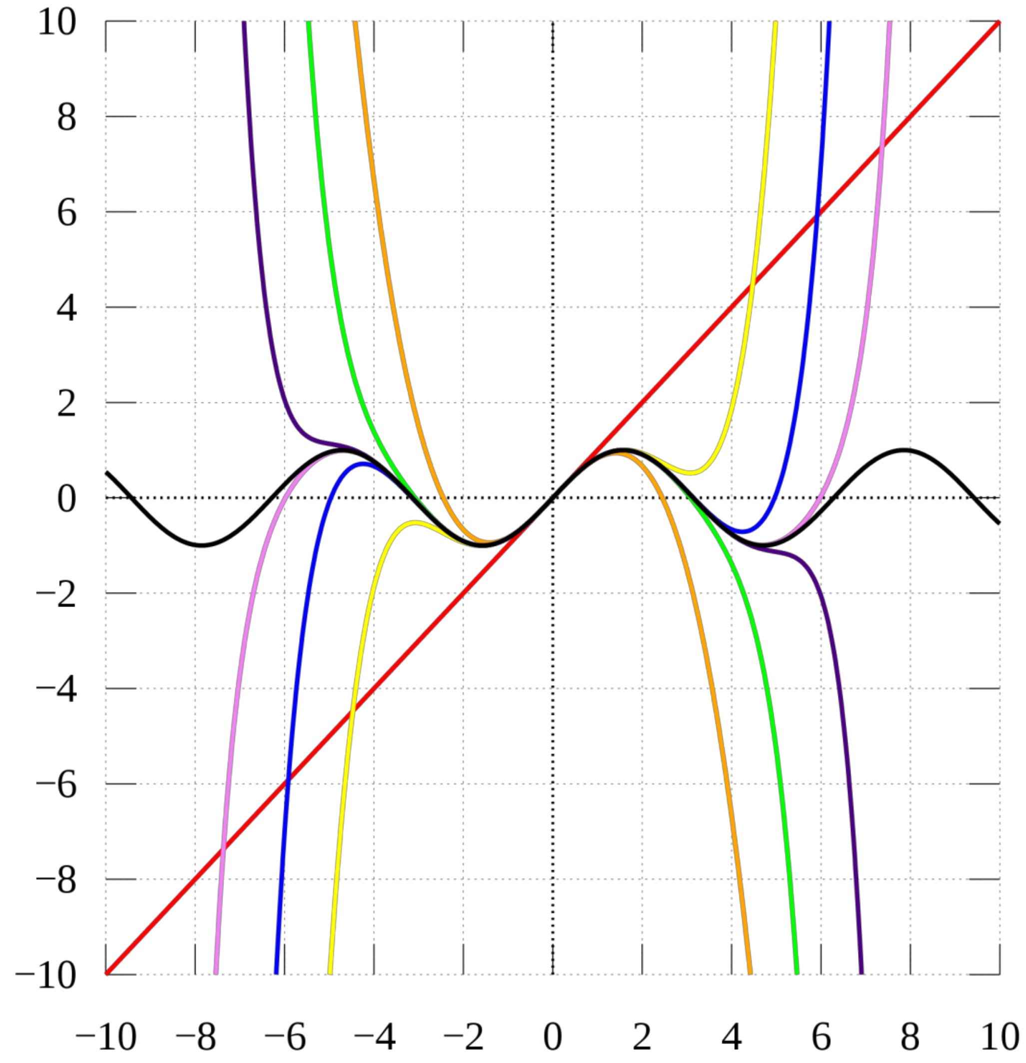
$$t'(x) = \frac{1}{c}\underbrace{\left[\frac{n_1}{\sin\theta_1} - \frac{n_2}{\sin\theta_2}\right]}_{\frac{n_1}{\sin\theta_1} = \frac{n_2}{\sin\theta_2}} = 0$$

$$\boxed{\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

Dérivée d'ordre supérieur

- La dérivée d'une fonction derivable f est aussi une fonction. On peut donc la dériver à son tour. Nous avons défini la **dérivée seconde de la fonction** f comme la dérivée de la dérivée.
- La dérivée de la dérivée seconde, si elle existe, est appelle **dérivée troisième de** f et on la note f''' ou $f^{(3)}$.
- La dérivée de la dérivée troisième, si elle existe, est appelle **dérivée quatrième de** f et on la note $f^{(iv)}$ ou $f^{(4)}$.
- La dérivée de la dérivée quatrième, si elle existe, est appelle **dérivée cinquième de** f et on la note $f^{(v)}$ ou $f^{(5)}$.
- On peut continuer ainsi et définir la **dérivée d'ordre** n (où $n \in \mathbb{N}$) comme la fonction que l'on obtient en dérivant la dérivée d'ordre $n-1$, si cette dérivée existe :

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}$$



Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Polynômes de Taylor

Philippe Chabloz

Dérivées d'ordre supérieur et série de Taylor

$e^x = 1 + x + o(x)$

Nous avons déjà rencontré dans ce cours des sommes infinies (séries) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$ $\forall x \in]-1;1]$

Brook Taylor
1685 - 1731

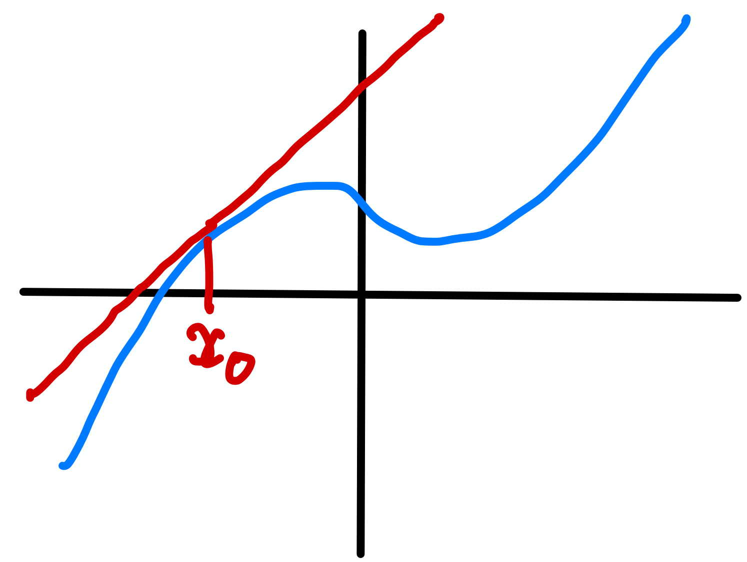
Vers 1715 Brook Taylor trouve une méthode qui fournit des sommes infinies. Aujourd'hui, ces séries sont connues sous son nom.

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Approximation linéaire

- Soit f une fonction continue dans un intervalle réel I et dérivable en $x_0 \in I$. La tangente au graphe de f en x_0 est la droite d'équation

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



- Le polynôme $T_1(x)$ est le seul polynôme de degré 1 vérifiant

$$\begin{cases} T_1\left(x_0\right) = f\left(x_0\right) \\ T_1'\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right) \end{cases}$$

et il correspond à la *meilleure approximation linéaire* de f autour de x_0 :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} \qquad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

Approximation quadratique

$y = ax^2 + bx + c$

- Si f est deux fois dérivable en x_0, on peut chercher un polynôme $T_2(x)$ de degré 2 vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} T_2(x_0) = f(x_0) \\ T_2'(x_0) = f'(x_0) \\ T_2''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}.$$

$()' = 2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)$

$()'' = f''(x_0)$

- Ce polynôme est égal à

$T_2(x)$

$$T_2(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}_{}$$

et $T_2(x)$ est la *meilleure approximation quadratique* de f autour de x_0 :

$$\underbrace{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}_{T_2(x)} \qquad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

Polynômes de Taylor

- Soit f une fonction dérivable n fois en x_0, son **polynôme de Taylor d'ordre n en x_0**, noté $T_n(x)$ ou $T_n(f, x_0)(x)$, est l'unique polynôme de degré n vérifiant les conditions

$$T_n^{(k)}\left(x_0\right) = f^{(k)}\left(x_0\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n.$$

En x_0 la fonction f et le polynôme T_n prennent la même valeur. Les deux fonctions prennent également la même valeur pour les n premières dérivées calculées en x_0. Le polynôme $T_n(x)$ est en ce sens la *meilleure approximation d'ordre n* de f autour de x_0.

- Ce polynôme est égal à

$$T_n(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots}^{T_{n-1}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{M_n(x)}$$

qui s'écrit aussi, de manière plus compacte comme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$M_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad n > 2$$

$$M_n(x_0) = 0$$

$$M_n'(x) = \frac{n}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}\Big|_{x=x_0} = 0$$

$$M''(x) = \frac{n(n-1)}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{n-2}\Big|_{x=x_0} = 0$$

$$\vdots$$

$$M^{(n)}(x) = \frac{n!}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot 1 = f^{(n)}(x_0)$$

Toutes les dérivées de $M_n(x)$ sont <u>nulles</u> en x_0 jusqu'à l'ordre $n-1$ et

$$M_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Séries de Taylor

Soit f une fonction *infiniment dérivable* en un point $x_0 \in \mathcal{D}_f$ (c-à-d $f^{(n)}(x_0)$ existe pour chaque $n \in \mathbb{N}$) alors la **série de Taylor de** f en x_0 est la fonction définie par

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

- L'égalité dans la formule précédente (*car il s'agit bien d'une égalité*) est valable pour x dans un intervalle centré en x_0 et donc de la forme

  $$]x_0 - R, x_0 + R[.$$

  Le nombre R est le rayon de convergence de la série de Taylor.

- Géométriquement, l'idée des séries de Taylor est d'approximer *au plus près* la fonction f en un point x_0 par le biais de polynômes où les coefficients sont donnés par une expression contenant les valeurs de dérivées de f calculées en x_0.

Série de Taylor de $\ln(x)$

$x_0 = 1$ $\quad f(x) = \ln(x)$

$f(1) = \ln(1) = 0$

$f'(1) = f'(x)\Big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1$

$f''(1) = f''(x)\Big|_{x=1} = -\frac{1}{x^2}\Big|_{x=1} = -1$

$f'''(1) = f'''(x)\Big|_{x=1} = \frac{2}{x^3}\Big|_{x=1} = 2$

$f^{(4)}(1) = f^{(4)}(x)\Big|_{x=1} = -\frac{3\cdot 2}{x^4}\Big|_{x=1} = -6 = -3!$

Généralisation : $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

Donc la série de Taylor de $\ln(x)$ autour de $x_0 = 1$ est:

$$\ln(x) = 1\cdot(x-1) - 1\cdot\frac{(x-1)^2}{2!} + 2\cdot\frac{(x-1)^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot\frac{(x-1)^n}{n!} + \dots$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

car $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. En posant

$y = x - 1$ et donc $x = 1 + y \Rightarrow$ %

$$\boxed{\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{y^n}{n}}$$

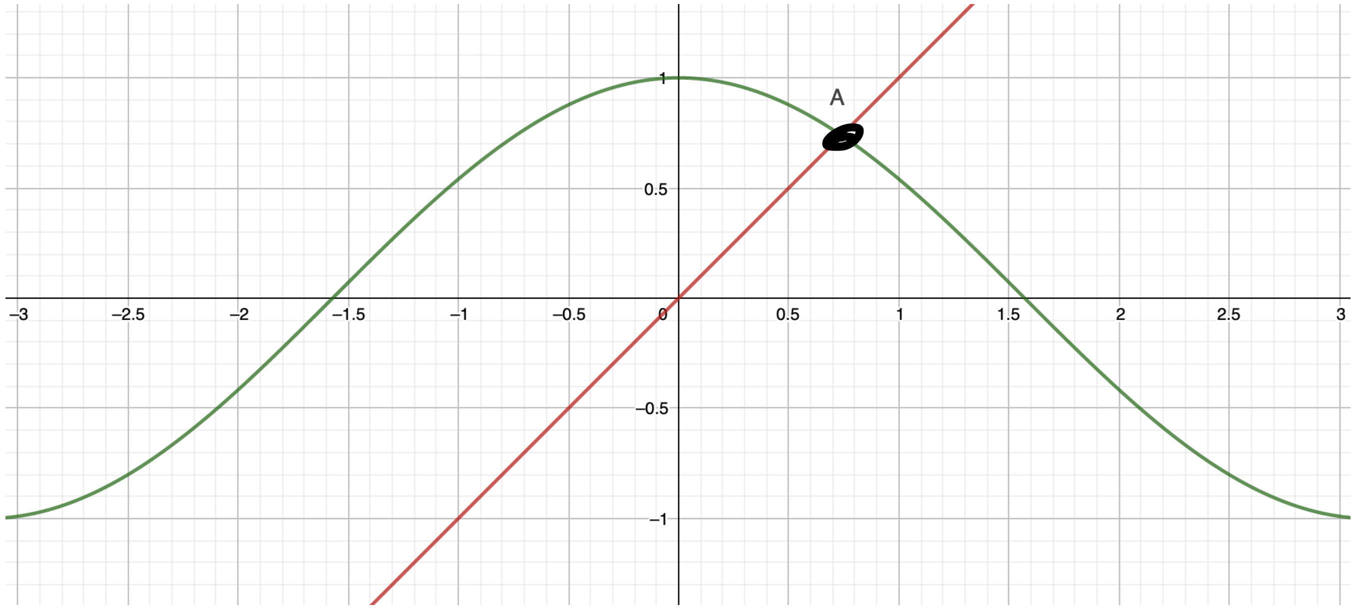
On retrouve la série de Taylor déjà donnée !!

Exercice

Déterminer une solution approchée de l'équation

$$\cos(x) = x$$

en utilisant une approximation d'ordre deux de la fonction $f(x) = \cos(x)$ autour de $x_0 = 0$.



$\cos(x) = x$??

$$1 - \frac{x^2}{2} = x$$

$$2 - x^2 = 2x$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}732$$

Calul exact : $x = 0{,}73908513$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to 0}} \frac{7x^3 + 2x^2 - 10x}{2x^3 - 4x} = \frac{7}{2}$$

$$= \frac{10}{4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x + 10x^2 - x^3}{4x + 50x^2 + 1000x^3} = \frac{3}{4}$$

Notation de Landau

Si une fonction $f(x)$ est négligeable devant une fonction $g(x)$ au voisinage de $x = a$, on notera

$$f = o(g) \qquad pour\ x \to a$$

Ceci revient à dire que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

f dominée par g

f négligeable par rapport à g.

- $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$
- $o(f) + o(f) = o(f)$
- $o(f) - o(f) = o(f)$!!!!

Exemples

Au voisinage de 0 on a

1. $4x^3 = o(x^2)$ car si x tend vers 0 alors $\frac{4x^3}{x^2} = 4x$ tend vers 0.
2. $2x^2 - 5x^3 + 100x^4 = o(x)$
3. $1 - \cos(x) = o(x)$ car $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$ (règle de l'Hospital)

Au voisinage de l'infini on a

$x^2 = o(x^3)$ $\quad x^n = o(e^x)$ $\quad \ln^a(x) = o(x^n)$ $\quad 2x + 3x^3 = o(x^4)$

⚠ $x^3 = o(x^2)$ au voisinage de 0

Mais $x^2 = o(x^3)$ au voisinage de $\pm\infty$

Règles de calculs

1.) $$3\,o(x^2) = o(x^2) \qquad o(10x^3) = o(x^3)$$
$$-o(x^4) = o(x^4)$$

Les constantes peuvent être remplacées par $+1$.

2) $f \cdot o(g) = o(fg)$

$$x^2 \cdot o(x^3) = o(x^5)$$
$$2x \cdot o(x) = o(x^2)$$

3) Au voisinage de 0

$$7 \cdot o(x^2) - o(3x^3) + 5 \cdot o(x^4) = o(x^2)$$

on garde le degré le plus bas

EPFL

Développement limité

On dit que **$f(x)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $x = a$** si on peut écrire

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)} + R_n(x)$$

reste d'ordre n

avec

$$R_n(x) = o[(x-a)^n]$$

Exemples

1. $e^x = 1 + x + o(x)$ au voisinage de 0 $\rightarrow$ $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{o(x)}{x}$ tend vers 1 par définition du o(x).
2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ ... = x + o(x^2)$ au voisinage de 0 $\rightarrow$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$

Exercice : calculer la limite suivante en utilisant le développement limité du sinus et du cosinus en $x = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2) \cdot (1 - \cos x^2)}{x^6} =}$$

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)\left(1 - \cos(x^2)\right)}{x^6} =$$

$$\sin(x) = x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^{2})$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)$$

$$1 - \cos(x^2) = \frac{x^4}{2} - o(x^6) \quad ||$$

$$\sin(x^2)\left(1-\cos x^2\right) =$$

$$\left(x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)\right)\left(\frac{x^4}{2} - o(x^5)\right)$$

$$= \frac{x^6}{2} - o(x^8) + o(x^8) + o(x^{12}) + o(x^{12}) + o(x^{14})$$

$$= \frac{x^6}{2} + o(x^8)$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2)(1-\cos x^2)}{x^6} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^6 + o(x^8)}{x^6}$

$$= \frac{1}{2}$$

Exemple pathologique ;-/

Calculer la série de Taylor en l'origine de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$