

Exercices — Série 7

Exercice 1. [Produit scalaire]

Soient $\vec{u} = (5, -3, \sqrt{5})$ et $\vec{v} = (1, 2, -\sqrt{5})$ deux vecteurs. Calculer :

- i) $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
- ii) le cosinus de l'angle entre \vec{u} et \vec{v} .
- iii) les vecteurs $\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ et $\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v}$.

Exercice 2. [Colinéarité]

- i) Exprimer le vecteur

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

comme le produit de sa norme par un vecteur unitaire.

- ii) Déterminer deux vecteurs de longueur 3 colinéaires au vecteur $\vec{v} = (18, 0, -24)$.

Exercice 3. [Coordonnées dans une base quelconque]

Soit $\vec{u} = (8, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$ et $\vec{w} = (1, 1)$ des vecteurs dans le plan \mathbb{R}^2 . Trouver deux scalaires $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

Exercice 4. [Produit vectoriel]

Soient $\vec{u} = (2, 1, -3)$ et $\vec{v} = (-3, 1, 1)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

- (a) Calculer $\vec{u} \times \vec{v}$
- (b) quel est l'aire du parallélogramme construit sur \vec{u} et \vec{v} ?
- (c) Quel est l'angle entre \vec{u} et \vec{v} ?

Exercice 5. [Produit mixte]

Soient $\vec{u} = (3, 2, -1)$, $\vec{v} = (3, 1, 2)$ et $\vec{w} = (-2, 4, 1)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

- (a) Calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
- (b) Les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forment-ils une base **directe** de \mathbb{R}^3 ?
- (c) Sinon, comment obtenir une base directe de \mathbb{R}^3 constituée de ces 3 vecteurs ?

Exercice 6. [Plan, droites et sphères]

Décrire l'ensemble des points suivants avec une ou deux équations ou inéquations :

- i) Le plan passant par $(3, -1, 2)$ orthogonal à l'axe Oy .
- ii) Le plan passant par $(3, -1, 1)$ parallèle au plan yOz .
- iii) Le cercle de centre $(0, 2, 0)$ et rayon 2, contenu dans le plan xOy .
- iv) Le cercle de centre $(0, 2, 0)$ et rayon 2, contenu dans le plan $y = 2$.
- v) La droite passant par $(1, 3, -1)$ parallèle à l'axe Oy .
- vi) Le cercle dans l'intersection du plan passant par $(2, 4, 5)$ orthogonal à l'axe Oz , et la sphère de rayon 13 et centre $(0, 0, 0)$.
- vii) l'extérieur de la sphère de rayon 9 et centre $(5, 4, -9)$.

Exercice 7. [Distances dans l'espace]

Calculer le coordonnées du point de la sphère S , donnée par l'équation cartésienne

$$(S) : x^2 + (y + 3)^2 + (z + 7)^2 = 4$$

qui est le plus proche du

- i) plan xOy .
- ii) point $Q(0, 6, -7)$.

Exercice 8. [Produit vectoriel]

Considérons les trois points $P(-2, 2, 1)$, $Q(1, 0, 2)$, $R(0, 1, -2)$.

- i) Calculer l'aire du triangle déterminé par les points P, Q, R .
- ii) Déterminer deux vecteurs orthogonaux et unitaires au plan qui contient les points P, Q, R .

Exercice 9. [Produit mixte]

Calculer le volume du parallélépipède déterminé par les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (4, -1, 4)$, $\vec{w} = (3, 0, 3)$.

Exercice 10.

- i) Donner une représentation paramétrique de la droite qui passe par les points $P(9, -6, -1)$ et $Q(1, 5, 2)$.
- ii) Donner une représentation paramétrique de la droite qui passe par le point $R(-9, 6, 1)$ et est orthogonale au plan d'équation $3x + 5y + 5z = 16$.
- iii) Donner l'équation du segment de droite délimité par des points $S(0, 0, 3)$ et $T(0, 3, 3)$.

Exercice 11. [Droite paramétrique et plan]

Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par le point $P(-6, -5, 1)$ et orthogonal à la droite d'équation paramétrique $x = -6 + t$, $y = -5 - 4t$, $z = -3t$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. [Intersection de 2 droites de l'espace]

Déterminer, s'il existe, le point d'intersection des deux droites L_1 et L_2 définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$L_1 : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 5t - 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$L_2 : \begin{cases} x = s + 2 \\ y = 4s + 4 \\ z = -3s + 5 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13. [Distance entre 2 plans]

Déterminer la distance entre les deux plans suivants :

$$\begin{aligned} \sqrt{7}x + y + z &= 7 \\ \sqrt{7}x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

Exercice 14. [Droite paramétrique]

Déterminer l'équation paramétrique de la droite intersection des 2 plans suivants:

$$\begin{aligned} 5x - 7y + 21z + 4 &= 0 \\ x - y + 2z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 15. [Distance entre un point et une droite]

Déterminer la distance entre le point $M(4, -3, 2)$ et la droite d passant par $A(1, 0, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2, -1, 3)$.