Exercices — Série 6

Exercice 1.

(a) Calculer la dérivée de

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) .$$

(b) Donner la valeur de

$$\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x .$$

Exercice 2.

(a) Calculer la dérivée de

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin(x) .$$

(b) Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x .$$

(c) Faire le lien entre le point précédent et l'aire du disque de rayon 1 (commencer par expliquer comment la courbe $y = \sqrt{1-x^2}$ est liée au disque de rayon 1).

Exercice 3.

Calculer l'aire entre la courbe décrite par la fonction $f(x) = |x^2 - 3x|$, l'axe Ox, et les droites verticales $x = -2$ et $x = 2$.

Exercice 4.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire[1] alors

- ☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x > 0$
- ☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0$
- ☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x < 0$
- ☐ $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x > 0$

[1] c'est-à-dire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice 5.
L'aire sous le graphique de $f(x) = x^4 + 1$ entre -3 et 3 vaut

- ☐ $\frac{486}{5}$
- ☐ $\frac{506}{5}$
- ☐ $\frac{496}{5}$
- ☐ $\frac{516}{5}$

Exercice 6. [Un grand classique]
L'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ vaut:

- ☐ 0
- ☐ $\frac{\pi}{2}$
- ☐ π
- ☐ 2π

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes.

(a) L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ $\frac{2}{3}\sqrt{\pi}$
- ☐ $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}$
- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{1}{3}\pi$

(b) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{12}$
- ☐ $1 - \frac{\pi}{4}$
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{4}$
- ☐ $\sqrt{3} - 1 + \frac{\pi}{2}$

Exercice 8.
Calculer les intégrales (ou primitives) suivantes en utilisant la méthode substitution.

a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ 4

b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$
- ☐ $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) - \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$
- ☐ $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) - \frac{\pi}{2}$

c) L'intégrale $\int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{7}} 3x(x^2-5)^7 \,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $\frac{192}{7}$
- ☐ $\frac{257}{16}$
- ☐ $\frac{765}{16}$
- ☐ $\frac{127}{8}$

d) La primitive $\int \frac{1}{x^2+6x+11} \,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C$
- ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2} \log\left((x+3)^2+2\right) + C$
- ☐ $\frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C$
- ☐ $\frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left((x+3)^2+2\right) + C$

e) L'intégrale $\int_0^2 x \sin(2x^2)\cos(2x^2) \,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $\frac{1}{8}\cos(8)\sin(8)$
- ☐ $\frac{1}{4}\cos^2(8) - \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{8}\sin^2(8)$
- ☐ $-\frac{1}{4}\cos(8) + 2$

Exercice 9.

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties:

a) L'intégrale $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ 1
- ☐ $2e$
- ☐ -1
- ☐ $2e-1$

b) L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x) \,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $\pi - 1$
- ☐ $\frac{\pi}{2} - 1$
- ☐ 2π
- ☐ $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$

c) L'intégrale $\int_0^{\pi} x^2\sin(x) \,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $4\pi - 2$
- ☐ $2\pi^2$
- ☒ $\pi^2 - 4$
- ☐ $2\pi - 1$

d) L'intégrale $\int_0^2 x^3\ln(2x) \,\mathrm{d}x$ vaut :

- ☐ $-\infty$
- ☐ $8\ln(4)$
- ☐ $4\ln(4) - 1$
- ☐ $2\ln(4) - 2$

Exercice 10. [Polynôme de Taylor]
Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 3, $T_3(x)$, de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1$$

au voisinage de $x = 2$.
Puis calculer la valeur de T_3 en $x = 2.1$ (avec la calculatrice !).
Comparer avec la valeur $f(2.1)$.

Exercice 11. [Polynôme de Taylor et formule du binôme]
On considère la fonction

$$f(x) = (1 + x)^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ non entier.

(a) Calculer les dérivées successive de f en $x = 0$: $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ et en déduire (sans démonstration) le terme $f^{(n)}(0)$ (la n-ième dérivée de f en 0).

(b) A partir du point (a) écrire la série de Taylor de la fonction f au voisinage de 0. Comparer le résultat obtenu sous (b) avec la formule du binôme.

(c) Appliquer (b) à la fonction $g(x) = \sqrt{1 - x}$ en donnant le développement limité de g d'ordre 3.

(d) En déduire le développement limité d'ordre 4 de la fonction $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. (Remplacer x par x^2 dans le résultat obtenu sous (c).)

(e) En déduire la limite suivante

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}.$$