Exercices — Série 2

Exercice 1. [Vrai/Faux] V F

1) Le nombre 2^{3000} est plus grand que 9^{1000}. ☐ ☐
2) Pour tous nombres entiers a, b, c on a que $(a^b)^c = a^{(b^c)}$. ☐ ☐
3) L'expression $\dfrac{a^{\frac{9}{2}} a^{\frac{2}{9}}}{a}$ vaut toujours 1 (si $a \neq 0$). ☐ ☐
4) L'expression $\dfrac{a^{-1}a^{-2}a^{-3}}{a^6}$ est égale à a^{12} (si $a \neq 0$). ☐ ☐
5) Le nombre $\dfrac{(\sqrt{13})^4 13^8}{13^{-2}(\sqrt{13})^{20}}$ vaut 169. ☐ ☐
6) Les nombres $2^{2^{2^{2^2}}}$ et $4^{2^{2^2}}$ sont égaux. ☐ ☐

Exercice 2. [Problèmes d'Euler]

(a) Si le nombre d'habitants d'une province s'accroît tous les ans d'un trentième, et qu'il y a au commencement 100'000 habitants, donner le nombre d'habitants dans cette province après une année, après deux ans, après trois ans, et au bout de 100 ans.

(b) Un particulier doit 400'000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent. Calculer le nombre de florins que ce particulier doit après une année, après deux ans, après trois ans, et donner une formule générale pour calculer sa dette après n années.

Exercice 3.

(a) Pour chaque point (c, e^c) du plan, on se donne la droite d'équation $g(x) = \mathrm{e}^c \cdot x + (1-c) \cdot \mathrm{e}^c$. Trouver la distance entre le point d'intersection de cette droite avec l'axe Ox et le point $(c, 0)$. Cette distance change-t-elle lorsqu'on change la valeur de c?

(b) Vérifier que la fonction exponentielle $f(x) = \mathrm{e}^x$ est bien une solution du problème posé par Florimond de Beaune à Descartes pour un certain a, et déterminer ce a:

> Trouver une courbe $f(x)$ telle que la distance entre V et T, les points où la verticale et la tangente par un point P de $f(x)$ coupent l'axe des x, ait une valeur constante donnée a.

Indication. Utiliser que la pente de la tangente à la courbe $f(x) = \mathrm{e}^x$ au point c est e^c; nous reviendrons sur ce point plus loin dans le cours au chapitre des dérivées.

(c) Donner une courbe solution du problème de de Beaune pour $a = 3$.

Exercice 4. [Vrai/Faux] V F

1) Si ℓ est une fonction logarithmique alors $\ell(a^2 - b^2) = \ell(a+b) + \ell(a-b)\ \forall a > b > 0$. ☐ ☐

2) Soit ln le logarithme naturel. Alors $\mathrm{e}^{\ln(2)+\ln(3)} = 5$. ☐ ☐

3) Soit log le logarithme en base 10. Alors $\log(10^{10^{10}}) = 10^{10}$ ☐ ☐

4) Si $\ln(x^2 + \mathrm{e}^3 - 1) = 3$ alors $x = 1$. ☐ ☐

5) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^{xy} = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y$. ☐ ☐

6) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a $\ln(1 + \ldots + n) = \ln(n+1) + \ln(n) - \ln(2)$. ☐ ☐

Exercice 5. [Équation avec logarithmes]
Résoudre pour x

$$\log_8 x + \log_8(x - 12) = 2.$$

☐ La solution est l'ensemble de tous les nombres réels

☐ Les solutions sont $x = -4$, $x = 16$

☐ La solution est l'ensemble vide

☐ La solution est $x = 16$

Exercice 6.

(a) Montrer que la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géometrique (pour r et B fixés):

$$B + r \cdot B + r^2 \cdot B + r^3 \cdot B + \cdots + r^n \cdot B$$

vaut $\frac{(1-r^{n+1})}{(1-r)} \cdot B$ si $r \neq 1$.

(b) Utiliser (a) pour obtenir, lorsque n devient "plus grand qu'aucune quantité assignable", la célèbre *série géométrique* de Viète (1593):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots\ .$$

Donner une condition sur x pour que cette égalité soit vraie, et vérifier qu'elle est aussi un cas particulier de la série du binôme de Newton pour $(1+b)^x$ (donnée au cours).

Exercice 7. [La série de Gregory]

(a) À partir de la série pour $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

trouver une série pour $\ln(1-x)$, puis pour $\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

(b) Calculer les valeurs de $\ln(2)$ en utilisant ces trois séries ($x = 1$ dans la série pour $\ln(1+x)$, $x = \frac{1}{2}$ dans la série pour $\ln(1-x)$, et $x = \frac{1}{3}$ dans la série pour $\ln(\frac{1+x}{1-x})$) en utilisant les N premiers termes, $N = 1, 2, 3, 4, 5$.

(c) Quelle est la série la plus efficace pour le calcul de $\ln(2)$? Cette série est la *série de Gregory*, du nom de David Gregory (mathématicien anglais, 1659–1708).

Exercice 8. [Mathématiques médiévales]

(a) Calculer les sommes des N (pour $N = 1, 2, \ldots, 10$) premiers termes de la série infinie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

(b) Pour évaluer cette somme infinie, Nicolas Oresme eut l'idée suivante: minorer par un nombre $a > 0$ le premier terme, le second terme, la *somme* des 3 et 4-ièmes termes, la *somme* des termes 5 à 8, la somme des termes 9 à 16, *etc.* Trouver un tel nombre a, et déduire la valeur de la série.

(c) À l'aide de la série de $\ln(1+x)$, évaluer $\ln(0)$. Le résultat obtenu concorde-t-il avec ce que suggère le graphe de $\ln(x)$ ci-dessous?