Exercices — Série 12

Exercice 1. [Corps de révolution]
On considère le domaine D dans le plan Oyz limité par la courbe

$$(\gamma) : z = \sqrt{y+4},$$

la droite

$$(d) : 3y - 2z - 9 = 0,$$

l'axe Oy et l'axe Oz. Déterminer le volume du corps de révolution obtenu lorsque D tourne autour de Oz.

[Suggestion : faire un dessin du domaine D]

Exercice 2. [Corps de révolution]
On considère la (portion de) spirale logarithmique dans le plan Oyz

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\theta}\cos\theta \\ e^{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(a) Déterminer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de γ autour de Oz

(b) Donner une paramétrisation de la surface de révolution en indiquant les limites des paramètres.

Exercice 3. [Corps de révolution]
Dans l'espace on considère le point $S(0,0,h)$ et le point $A(0,R,0)$ ainsi que le segment de droite $d = \overline{SA}$.

Le solide de révolution obtenu par rotation de d autour de l'axe Oz est un cône de hauteur h et dont la base est un cercle de rayon R

(a) Trouver une paramétrisation de la droite d avec t comme paramètre.

(b) Calculer à l'aide des formules vues aux cours l'aire de la surface latérale du cône (vu comme la surface de révolution de d autour de l'axe Oz).

(c) Calculer avec les formules vues au cours le volume du cône vu comme le solide de révolution de la droite d autour de Oz. Vérifiez que vous retrouvez une formule bien connue.

(d) Donner une paramétrisation de la surface latérale du cône

(e) Calculer le vecteur normal à la surface latérale du cône pour tout point de cette surface. En déduire l'équation du plan tangent. Cette équation dépend-elle de t ? Pourquoi ?

Exercice 4. [Corps de révolution]

Considérons la tractrice dessinée verticalement dans le plan Oyz dont les équations paramétriques sont $\gamma(t) = (0, y(t), z(t))$ où $t \in \mathbb{R}$ et

$$y(t) = \frac{1}{\cosh(t)} \quad \text{et} \quad z(t) = t - \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}.$$

La **pseudo-sphère** (de rayon 1) est la surface de révolution obtenue en faisant tourner cette courbe autour de l'axe Oz. On veut calculer la surface latérale et le volume de ce solide.

(a) On calcule d'abord les dérivées $y'(t)$ et $z'(t)$ qui valent:

- □ $y'(t) = -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}$ et $z'(t) = \tanh^2(t)$
- □ $y'(t) = -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}$ et $z'(t) = 1 - \frac{\cosh^2(t) - \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}$
- □ $y'(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}$ et $z'(t) = \tanh^2(t)$
- □ $y'(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}$ et $z'(t) = 1 - \frac{\cosh^2(t) - \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}$

(b) La surface latérale du solide supérieur pour t allant de 0 à $a > 0$ vaut:

- □ $2\pi a$
- □ $-\frac{2\pi}{\cosh(a)} + 2\pi$
- □ $\frac{2\pi}{\cosh(a)} - 2\pi$
- □ $-\frac{1}{\cosh(a)} + 1$

(c) Le volume du solide supérieur pour t allant de 0 à une constante $a > 0$ vaut:

- □ $\frac{\tanh^3(a)}{3}$
- □ $\frac{\pi}{3}\frac{\sinh^3(a)}{\cosh^3(a)} - \frac{\pi}{3}$
- □ $\frac{\pi a^3}{3}$
- □ $\frac{\pi}{3}\tanh^3(a)$

[*Suggestion*: pour intégrer faire le changement de variable $u = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$]

(d) Déduire du point (b) que la surface latérale de toute la pseudo-sphère vaut:

- □ $+\infty$
- □ 1
- □ 4π
- □ 2π

(e) En déduire du point (c) le volume de toute la pseudo-sphère, qui vaut:

- □ $\frac{1}{3}$
- □ $\frac{\pi}{3}$
- □ $+\infty$
- □ $\frac{2\pi}{3}$

Exercice 5. [Surface réglée]
On considère le paraboloïde hyperbolique qui repose sur les droites OA et BC, où

$$O = (0,0,0)\ , \quad A = (1,0,1)\ , \quad B = (0,1,1)\ , \quad C = (1,1,0)\ .$$

(a) Une paramétrisation du ce paraboloïde hyperbolique est donnée par (avec $0 \le s \le 1$ et $0 \le t \le 1$):

- □ $\Sigma(s,t) = (t, 1-2t, t+s-2st)$
- □ $\Sigma(s,t) = (1, s, t+s-2st)$
- □ $\Sigma(s,t) = (t, s, t+s-2st)$
- □ $\Sigma(s,t) = (t, s, t+s)$

(b) Est-ce que il s'agit d'une surface *doublement* réglée?

- □ oui
- □ non

(c) Trouver le point de la surface où le plan tangent est horizontal.

Exercice 6. [Corps de révolution]
La *trompette de Gabriel* est la surface obtenue en faisant tourner l'hyperbole d'équation

$$z = \frac{1}{y} \text{ pour } y \in]0,1]$$

autour de l'axe Oz. Une paramétrisation de cette hyperbole est donnée par

$$\gamma(t) = (0, \frac{1}{t}, t) \qquad t \in [1, +\infty[.$$

On a choisi de paramétrer par la variable $z = t$ pour simplifier les calculs

(a) Le volume engendré par cette surface de révolution vaut:

- □ $+\infty$
- □ 0
- □ π
- □ $\frac{\pi}{3}$

(b) La surface latérale de cette surface de révolution est:

- □ $+\infty$
- □ 0
- □ 2π
- □ $\frac{2\pi}{5}$

[*Suggestion*: comparer l'intégrale exprimant la surface latérale avec l'intégrale

$$2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

et déduire le résultat.]

(c) En conclure le paradoxe mis en évidence par Evangelista Torricelli (physicien et mathématicien italien, 1608–1647):

> *La quantité de peinture nécessaire pour peindre la trompette de Gabriel est infinie, mais la quantité de peinture nécessaire pour la remplir (et donc la peindre) est finie.*

Peut-on "*résoudre*" ce paradoxe?

☐ oui ☐ non

Exercice 7. [Surface réglée : l'oloïde]

On considère deux cercles de rayon 1 dans l'espace: le premier cercle est contenu dans le plan Oxy et a pour centre $A\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, le second est contenu dans le plan Oxz et a pour centre $B\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$.

(a) On considère la droite passant par $P\left(-\frac{3}{2},0,0\right)$ tangente au cercle horizontal (dans le plan Oxy) en un point T dans le premier quadrant. Les coordonnées de T sont:

☐ $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ ☐ $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$

☐ $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2},0\right)$ ☐ $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$

(b) Avec les mêmes notations qu'en (a), on considère $Q\left(\frac{3}{2},0,0\right)$. L'angle $\tau=\widehat{QAT}$ vaut:

☐ $\frac{\pi}{6}$ ☐ $\frac{2\pi}{3}$

☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ $\frac{\pi}{2}$

On considère la surface réglée dont une paramétrisation est engendrée par les deux courbes

$$\alpha(t)=\left(\cos(t)+\frac{1}{2},\sin(t),0\right)\quad\text{et}\quad\beta(t)=\left(\frac{\cos(t)}{1+\cos(t)}-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{1+2\cos(t)}}{1+\cos(t)}\right)$$

où $-\frac{2\pi}{3}\leq t\leq\frac{2\pi}{3}$ pour sa partie supérieure, et par

$$\alpha(t)=\left(\cos(t)+\frac{1}{2},\sin(t),0\right)\quad\text{et}\quad\beta(t)=\left(\frac{\cos(t)}{1+\cos(t)}-\frac{1}{2},0,-\frac{\sqrt{1+2\cos(t)}}{1+\cos(t)}\right)$$

où $-\frac{2\pi}{3}\leq t\leq\frac{2\pi}{3}$ pour sa partie inférieure.

(c) Parmi les affirmations suivantes sélectionner lesquelles sont vraies:

☐ Pour la partie supérieure, la courbe décrite par α est une portion du cercle horizontal (dans le plan $z=0$) et la courbe décrite par β est un cercle vertical (dans le plan $y=0$), mais cela n'est plus vrai pour la partie inférieure.

☐ Pour la partie inférieure, la courbe décrite par α est une portion du cercle vertical (dans le plan $y=0$) et la courbe décrite par β est un cercle horizontal (dans le plan $z=0$), mais cela n'est plus vrai pour la partie supérieure.

☐ Pour les deux parties supérieure et inférieure, la courbe décrite par α est une portion du cercle vertical (dans le plan $y=0$) et la courbe décrite par β est un cercle horizontal (dans le plan $z=0$).

☐ Pour les deux parties supérieure et inférieure, la courbe décrite par α est une portion du cercle horizontal (dans le plan $z=0$) et la courbe décrite par β est un cercle vertical (dans le plan $y=0$).

(d) Selon la réponse au point (c), déterminer quelle partie exactement est la partie de cette surface déterminée par les segments de droite compris entre les deux cercles (en particulier, trouver l'angle représenté par le paramètre t).

L'**oloïde** (de Paul Schatz, sculpteur, inventeur et mathématicien allemand, 1898–1979) est la partie de cette surface déterminée par les segments de droite compris entre les deux cercles, ou de manière équivalente, *en emballant les deux cercles dans du cellophane.*

(e) Une paramétrisation de l'oloïde est donnée par $\left(\text{avec } 0 \le s \le 1 \text{ et } -\frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{2\pi}{3}\right)$:

- ☐ $S(s,t) = \left(\cos(t) + \frac{1}{2} - s\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos^2(t)}{1+\cos(t)}\right), (1-s)\sin(t), \pm s\frac{\sqrt{1+2\cos(t)}}{1+\cos(t)}\right),$
- ☐ $S(s,t) = \left(s(1-s)\left(\cos(t) + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\cos(t)}{1+\cos(t)} - \frac{1}{2}\right), 0, 0\right)$
- ☐ $S(s,t) = \left(\cos(t) + \frac{1}{2} - s\left(\frac{1+\cos(t)+\cos^2(t)}{1+\cos(t)}\right), (1-s)\sin(t), \pm s\frac{\sqrt{1+2\cos(t)}}{1+\cos(t)}\right),$
- ☐ $S(s,t) = \left((1-s)\left(\cos(t) + \frac{1}{2}\right) + s\left(\frac{\cos(t)}{1+\cos(t)} - \frac{1}{2}\right), 0, 0\right)$

(f) La longueur des segments reliant le cercle horizontal (dans le plan $z = 0$) avec le cercle vertical (dans le plan $y = 0$) vaut:

- ☐ $\sqrt{1-\cos(t)}, \quad -\frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{2\pi}{3}$
- ☐ $\sqrt{3}$
- ☐ 3
- ☐ $\sqrt{\frac{\cos^2(t)+3-\cos^4(t)}{(1+\cos(t))^2}}, \quad -\frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{2\pi}{3}$