Exercices — Série 11

Exercice 1. [Echauffement]

(a) L' équation cartésienne implicite de la surface latérale du cylindre circulaire d'axe vertical passant par le point $(x_0, y_0, 0)$, où $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, et de rayon $r > 0$ est donnée par:

- ☐ $(x^2 - x_0^2) + (y^2 - y_0^2) + z^2 = r^2$
- ☐ $\left(|x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2|\right)^2 = r^2$
- ☐ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = r^2$
- ☐ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

(b) Si on veut décrire le cylindre plein (sa surface latérale **et son intérieur**) alors il faut utiliser

- ☐ l'inéquation $(x^2 - x_0^2) + (y^2 - y_0^2) + z^2 < r^2$
- ☐ l'inéquation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$
- ☐ l'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = r^2$
- ☐ l'inéquation $\left(|x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2|\right)^2 \leq r^2$

Exercice 2. [Le tore]

(a) Une paramétrisation du cercle c de centre $(0, 0, 0)$, de rayon r et appartenant au plan Oxz est donnée par

- ☐ $(yr\sin(t), y, yr\cos(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$
- ☐ $(r\sin(t), r, r\cos(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$
- ☐ $(r\sin(t), t, r\cos(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$
- ☐ $(r\cos(t), 0, r\sin(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$

(b) Une paramétrisation du cercle γ de centre $(R, 0, 0)$, de rayon r et appartenant au plan Oxz (où R est une constante strictement plus grande que r, i.e. $R > r$) est donnée par ($t \in [0, 2\pi]$)

- ☐ $\gamma(t) = ((R + r)\sin(t), 0, (R + r)\cos(t))$
- ☐ $\gamma(t) = (r\sin(t), R, r\cos(t))$
- ☐ $\gamma(t) = (R + r\cos(t), 0, r\sin(t))$
- ☐ $\gamma(t) = (Rr\sin(t), R, Rr\cos(t))$

(c) La surface de révolution engendrée par la rotation du cercle γ (du point (b) ci-dessus) autour de Oz est un **tore** (ou plus communément, une *chambre à air*). Une paramétrisation est donnée par

- ☐ $r(t, \theta) = \Big((R + r\cos(t))\cos(\theta),\ (R + r\cos(t))\sin(\theta),\ r\sin(t)\Big)$
- ☐ $r(t, \theta) = \Big((R + r)\sin(t)\cos(\theta),\ (R + r)\sin(t)\sin(\theta),\ (R + r)\cos(t)\Big)$
- ☐ $r(t, \theta) = \Big(R + r\sin(t),\ R\tan(\theta),\ R + r\cos(t)\Big)$
- ☐ $r(t, \theta) = \Big(Rr\sin(t)\cos(\theta),\ R,\ Rr\cos(t)\sin(\theta)\Big)$

où $t \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exercice 3. [Courbure et torsion d'une courbe de l'espace]

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la courbe de l'espace γ définie par

$$\gamma(t) = (a\cos(t), \sqrt{1+a^2}\sin(t), \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Calculer la longueur de la courbe γ.

(b) Calculer la courbure $\kappa(t)$ de γ.

(c) Calculer la torsion $\tau(t)$ de γ.

(d) Trouver l'équation cartésienne du plan contenant γ.

Exercice 4.

La **fenêtre de Viviani**[1] est une courbe de l'espace dont une paramétrisation est

$$\gamma(t) = \left(\cos^2(t) - \frac{1}{2},\ \sin(t)\cos(t),\ \sin(t)\right) \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}..$$

(a) Cette courbe représente une partie de la courbe définie implicitement par le système d'équations

☐ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

(b) À partir des deux équations implicites trouvées au point précédent, retrouver, en calculant, la paramétrisation donnée sous (a).

(c) La courbe de Viviani peut être décrite comme une intersection de deux surfaces:

- ☐ un hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = b = \frac{1}{2}$ et un sphère de centre $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de rayon 1.
- ☐ un cylindre d'axe Oz et de rayon $\frac{1}{2}$ et un sphère de centre $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de rayon 1.
- ☐ un cylindre d'axe Oz et de rayon $\frac{1}{2}$ et un sphère de centre $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon 1.
- ☐ un cylindre d'axe Oz et de rayon $\frac{1}{2}$ et un sphère de centre $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon 1.

[1] La courbe doit son nom à un problème en architecture posé par Vincenzo Viviani (mathématicien italien, 1622–1703).

Exercice 5.

(a) Une équation paramétrique de la sphère de rayon 1 centrée en 0, d'équation implicite $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, est donnée par ($\alpha \in [0, 2\pi]$ et $t \in [-\pi/2, \pi/2]$) :

□ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = \cos(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = \cos(t) \end{cases}$

□ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = \sin(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = \cos(t) \end{cases}$

□ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = \sin(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = \sin(t) \end{cases}$

□ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = \cos(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = \sin(t) \end{cases}$

(b) Un ellipsoïde a équation implicite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, où a, b et c sont des constantes positives. En modifiant l'équation paramétrique de la sphère obtenue au point précédent, on peut obtenir une équation paramétrique de l'ellipsoïde, qui est donnée par ($\alpha \in [0, 2\pi]$ et $t \in [-\pi/2, \pi/2]$) :

□ $\begin{cases} x(t) = a\cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t) = b\sin(t)\sin(\alpha) \\ z(t) = c\sin(t) \end{cases}$

□ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \frac{\cos(t)\cos(\alpha)}{a} \\ y(t,\alpha) = \frac{\cos(t)\sin(\alpha)}{b} \\ z(t,\alpha) = \frac{\sin(t)}{c} \end{cases}$

□ $\begin{cases} x(t,\alpha) = a\cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = b\cos(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = c\sin(t) \end{cases}$

□ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \frac{\cos(t)\cos(\alpha)}{a} \\ y(t,\alpha) = \frac{\sin(t)\sin(\alpha)}{b} \\ z(t,\alpha) = \frac{\sin(t)}{c} \end{cases}$

(c) Les constantes a, b et c dans l'ellipsoïde du point (b) représentent:

□ la longueur des trois demi-axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.

□ l'inverse de la longueur des trois demi-axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.

□ la longueur des trois axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.

□ l'inverse de la longueur des trois axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.

(d) Dans le cas particulier où $a = b$ dans la paramétrisation du point (b). Ceci est une équation paramétrique

□ d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a\cos(t), c\sin(t), 0)$ autour de l'axe Oy.

□ d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a\cos(t), 0, c\sin(t))$ autour de l'axe Oy.

□ d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a\cos(t), 0, c\sin(t))$ autour de l'axe Oz.

□ d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a\cos(t), 0, c\sin(t))$ autour de l'axe Ox.

Exercice 6. [Identification de surfaces]
Identifier à quelle surface chacun des paramétrages suivants correspond:

(a)
$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ 3-v \\ 5-2u+4v \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$
.

(b)
$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u\cos v \\ u\sin v \end{pmatrix} \qquad u \in [0,2] \quad v \in [0,2\pi].$$

(c)
$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ u \end{pmatrix} \qquad u \in [-5,0] \quad v \in [0,2\pi].$$

(d)
$$\Sigma(u,\alpha) = \begin{pmatrix} 3\cos\alpha \\ u \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad u \in \mathbb{R} \quad \alpha \in [0,2\pi].$$

Exercice 7. [Paramétrisation d'une surface]
Trouver une paramétrisation de la surface dont l'équation cartésienne est
$$8x^2 - 4y^2 - z = 0$$

Exercice 8. [Surfaces de révolution]
Trouver une paramétrisation des surfaces obtenues par rotation des courbes suivantes (situées dans le plan Oxy) autour de **l'axe** Oy:

(a) $y = \sqrt{x}, \quad z = 0 \quad x \in [0,1]$

(b) $y = x^3 - x^2 + 1, \quad z = 0$

(c) Le cercle dans le plan Oxy de rayon 1 centré en $C(2,0,0)$

Exercice 9. [Plan tangent à une surface]
On considère la surface
$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2+1 \\ v^3+1 \\ u+v \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$
et le point $P(5,2,3)$ sur la surface.

(a) Trouver les valeurs de u et v qui donne le point P.

(b) En considérant cette fois u comme une constante et en dérivant $\Sigma(u,v)$ par rapport à v trouver le vecteur tangent Σ_v et l'évaluer au point P.

(c) Calculer un vecteur normal à la surface en P en faisant le produit vectoriel des 2 vecteurs tangents trouver précédemment.

(d) Déterminer l'équation du plan tangent à la surface Σ au point P.

Exercice 10. [Plan tangent à une surface (bis)]
On considère la surface

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

et le point $P = \Sigma\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$.
En répétant la procédure de l'exercice précédent, déterminer l'équation du plan tangent à Σ en P.

Exercice 11. [Plan tangent à une surface et dérivation implicite]
On considère la surface d'équation cartésienne

$$(\Sigma)\,.\; 2x^2 + 3xy + 4y^2 + 3y + z^2 + 3yz = 22$$

et le point $P(1,1,2)$.

(a) Vérifier que P est sur Σ.

On va prendre x et y comme paramètres et considérer que $z = z(x,y)$ est une fonction de x et y (on pourrait résoudre l'équation en z mais ce serait laborieux !).

(b) Dériver implicitement l'équation de Σ **par rapport à** x en considérant y **comme une constante** et $z = z(x)$ comme une fonction de x. Déterminer la dérivée de z par rapport à x au point $P(1,1,2)$ que l'on notera $z_x(P)$.

(c) Dériver implicitement l'équation de Σ **par rapport à** y en considérant x **comme une constante** et $z = z(y)$ comme une fonction de y. Déterminer la dérivée de z par rapport à y au point $P(1,1,2)$ que l'on notera $z_y(P)$.

(d) En déduire les 2 vecteurs tangents à Σ en P

$$\Sigma_x(P) \qquad \text{et} \qquad \Sigma_y(P).$$

(e) En déduire l'équation du plan tangent à Σ au point P.

(f) Quelle est cette surface ?