Corrections — Série 11

Exercice 1. [Echauffement]

(a) L' équation cartésienne implicite de la surface latérale du cylindre circulaire d'axe vertical passant par le point $(x_0, y_0, 0)$, où $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, et de rayon $r > 0$ est donnée par:

☐ $(x^2 - x_0^2) + (y^2 - y_0^2) + z^2 = r^2$ ☐ $\left(|x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2|\right)^2 = r^2$

☐ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = r^2$ ☒ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Solution: le cylindre est le lieu des points dont la distance (horizontale) à l'axe vertical passant par $C(x_0, y_0.0)$ vaut r. Ceci donne l'équation

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad \text{ou} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Notons qu'il n'y a pas de condition sur z, et que cette coordonnée peut donc être choisie librement (cela reflète le fait que dans ce cylindre, le cercle $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ peut être dessiné à n'importe quelle hauteur z ; ou dit autrement le fait que le cylindre est de hauteur infinie).

(b) Si on veut décrire le cylindre plein (sa surface latérale **et son intérieur**) alors il faut utiliser

☐ l'inéquation $(x^2 - x_0^2) + (y^2 - y_0^2) + z^2 < r^2$ ☒ l'inéquation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2$

☐ l'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = r^2$ ☐ l'inéquation $\left(|x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2|\right)^2 \le r^2$

Solution: Pour ajouter l'intérieur du cylindre il faut ajouter les points dont la distance est inférieure à r et il faut donc utiliser l'inéquation

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le r \quad \text{ou} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2$$

Exercice 2. [Le tore]

(a) Une paramétrisation du cercle c de centre $(0, 0, 0)$, de rayon r et appartenant au plan Oxz est donnée par

☐ $(yr\sin(t), y, yr\cos(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$ ☐ $(r\sin(t), r, r\cos(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$

☐ $(r\sin(t), t, r\cos(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$ ☒ $(r\cos(t), 0, r\sin(t))$ où $t \in [0, 2\pi]$

Solution: Dans le plan Oxz on a $y = 0$ et les coordonnées des x et z peuvent être exprimées par la paramétrisation suivante : $x(t) = r\cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$ où $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Une paramétrisation du cercle γ de centre $(R, 0, 0)$, de rayon r et appartenant au plan Oxz (où R est une constante strictement plus grande que r, i.e. $R > r$) est donnée par ($t \in [0, 2\pi]$) :

☐ $\gamma(t) = ((R+r)\sin(t), 0, (R+r)\cos(t))$ ☐ $\gamma(t) = (r\sin(t), R, r\cos(t))$

☒ $\gamma(t) = (R + r\cos(t), 0, r\sin(t))$ ☐ $\gamma(t) = (Rr\sin(t), R, Rr\cos(t))$

Solution: Une paramétrisation du cercle de centre $(R,0,0)$, de rayon r et appartenant au plan Oxz peut être déduite a partir du point (a) avec une translation de vecteur $(R,0,0)$, i.e.

$$\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)) = (r\cos(t), 0, r\sin(t)) + (R,0,0) = (R + r\cos(t), 0, r\sin(t)) \ .$$

(c) La surface de révolution engendrée par la rotation du cercle γ (du point (b) ci-dessus) autour de Oz est un **tore** (ou plus communément, une *chambre à air*). Une paramétrisation est donnée par:

☒ $r(t,\theta) = \Big((R + r\cos(t))\cos(\theta),\ (R + r\cos(t))\sin(\theta),\ r\sin(t)\Big)$

☐ $r(t,\theta) = \Big((R+r)\sin(t)\cos(\theta),\ (R+r)\sin(t)\sin(\theta),\ (R+r)\cos(t)\Big)$

☐ $r(t,\theta) = \Big(R + r\sin(t),\ R\tan(\theta),\ R + r\cos(t)\Big)$

☐ $r(t,\theta) = \Big(Rr\sin(t)\cos(\theta),\ R,\ Rr\cos(t)\sin(\theta)\Big)$

où $t \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

Solution: Une paramétrisation du tore est obtenue en insérant les composantes de la courbe définie par γ (point (b)) dans la formule pour calculer la paramétrisation d'une surface de révolution (de paramètres t et θ). Comme la courbe est dans le plan Oxz ceci donne

$$\begin{cases} x(t,\theta) = \gamma_x(t)\cdot\cos(\theta) = (R + r\cos(t))\cos(\theta) \\ y(t,\theta) = \gamma_x(t)\cdot\sin(\theta) = (R + r\cos(t))\sin(\theta) \\ z(t,\theta) = \gamma_z(t) = r\sin(t)\ . \end{cases}$$

Exercice 3. [Courbure et torsion d'une courbe de l'espace]
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la courbe de l'espace γ définie par

$$\gamma(t) = (a\cos(t), \sqrt{1+a^2}\sin(t), \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(a) Calculer la longueur de la courbe γ.

(b) Calculer la courbure $\kappa(t)$ de γ.

(c) Calculer la torsion $\tau(t)$ de γ.

(d) Trouver l'équation cartésienne du plan contenant γ.

Solution: On dérive $\gamma(t)$ trois fois pour obtenir

$$\gamma'(t) = (-a\sin t, \sqrt{1+a^2}\cos t, -\sin t) \qquad \gamma''(t) = (-a\cos t, -\sqrt{1+a^2}\sin t, -\cos t)$$
$$\gamma'''(t) = (a\sin t, -\sqrt{1+a^2}\cos t, \sin t)$$

(a) La longueur est donnée par $\int \|\gamma'(t)\|\, dt$. La norme de $\gamma'(t)$ vaut

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + (1+a^2)\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{1+a^2}$$

et la longueur vaut alors

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+a^2}\, dt = 2\pi \cdot \sqrt{1+a^2}$$

(b) La courbure vaut $\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t)\times\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$. Or

$$\gamma'(t)\times\gamma''(t) = \begin{pmatrix} e_1 & -a\sin t & -a\cos t \\ e_2 & \sqrt{1+a^2}\cos t & -\sqrt{1+a^2}\sin t \\ e_3 & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+a^2} \\ 0 \\ a\sqrt{1+a^2} \end{pmatrix}$$

dont la norme vaut $\sqrt{1+a^2+a^2+a^4} = \sqrt{(1+a^2)^2} = 1+a^2$.. La courbure vaut alors

$$\kappa(t) = \frac{1+a^2}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

(c) Pour la torsion il faut calculer

$$[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)] = [\gamma'''(t),\gamma'(t),\gamma''(t)] = \gamma'''(t)\cdot(\gamma'(t)\times\gamma''(t)).$$

Or au point (b) on a déjà calculer $\gamma'(t)\times\gamma''(t)$. Le produit mixte vaut alors

$$[\gamma'''(t),\gamma'(t),\gamma''(t)] = \gamma'''(t)\cdot(\gamma'(t)\times\gamma''(t)) = \begin{pmatrix} a\sin t \\ -\sqrt{1+a^2}\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{1+a^2} \\ 0 \\ a\sqrt{1+a^2} \end{pmatrix} = 0$$

et la torsion est nulle.

(d) La torsion étant nulle partout, cela veut dire que la courbe reste dans un plan (le plan osculateur en n'importe quel point). Pour trouver un vecteur normal au plan osculateur il suffit de prendre

$$\vec{n} = \gamma'(t)\times\gamma''(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+a^2} \\ 0 \\ a\sqrt{1+a^2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

En effet le plan osculateur est engendré par le vecteur tangent et le vecteur accélération (lorsqu'ils ne sont pas colinéaires).

L'équation cartésienne du plan cherché est donc $x - az = d$. Pour trouver la constante d il suffit de prendre un point P quelconque de γ. En posant $t = 0$ on trouve le point $\gamma(0) = P(a,0,1)$ On trouve alors $a - a = d = 0$. Le plan cherché a comme équation cartésienne

$$x - az = 0.$$

Exercice 4.

La **fenêtre de Viviani**[1] est une courbe de l'espace dont une paramétrisation est

$$\gamma(t) = \left(\cos^2(t) - \frac{1}{2},\ \sin(t)\cos(t),\ \sin(t)\right) \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}..$$

(a) Cette courbe représente une partie de la courbe définie implicitement par le système d'équations

☐ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ ☒ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

Solution: Pour vérifier que la fenêtre de Viviani représente au moins un morceau de la courbe implicite définie par le système d'équations:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

il suffit de remplacer les coordonnées de $\gamma(t)$ dans les équations ci-dessus et de vérifier si les équations sont satisfaites. On obtient

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\cos^2(t) - \tfrac{1}{2})^2 + (\sin(t)\cos(t))^2 \\ &= \cos^2(t)\big(\cos^2(t) + \sin^2(t)\big) - \cos^2(t) + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} \\ \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 &= (\cos^2(t))^2 + (\sin(t)\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 \\ &= \cos^2(t)\big(\cos^2(t) + \sin^2(t)\big) + \sin^2(t) = 1\ , \end{aligned}$$

ce qui démontre ce qu'on voulait.

(b) À partir des deux équations implicites trouvées au point précédent, retrouver, en calculant, la paramétrisation donnée sous (a).

Solution: Supposons maintenant avoir les deux équations en x, y, z du point (a), et voyons comment nous pouvons en déduire la paramétrisation.

La première équation nous donne les limites suivantes pour x et y:

$$-\frac{1}{2} \le x, y \le \frac{1}{2}$$

En développant la seconde équation on trouve

$$\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 + z^2 = 1$$

En utilisant la première équation $x^2 + y^2 + \frac{1}{4}$ ccette dernière équation se simplifie en

$$z^2 = \frac{1}{2} - x \tag{$*$}$$

[1] La courbe doit son nom à un problème en architecture posé par Vincenzo Viviani (mathématicien italien, 1622–1703).

Comme $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ on en déduit que $z^2 \leq 1$. En fait z peut prendre toutes les valeurs entre -1 et 1; On pose alors $z = \sin(t)$.

L'équation $(*)$ donne alors

$$x = \tfrac{1}{2} - z^2 = \tfrac{1}{2} - \sin^2(t) = \cos^2(t) - \tfrac{1}{2}$$

Ainsi $x(t) = \cos^2(t) - \frac{1}{2}$. La première équation cartésienne $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ donne alors

$$y^2 = \tfrac{1}{4} - x^2 = \tfrac{1}{4} - \left(\cos^2(t) - \tfrac{1}{2}\right)^2 = -\cos^4(t) + \cos^2(t) = \cos^2(t)\left(1 - \cos^2(t)\right) = \cos^2(t)\sin^2(t)\ .$$

On a donc $y(t) = \pm\sin(t)\cos(t)$, mais

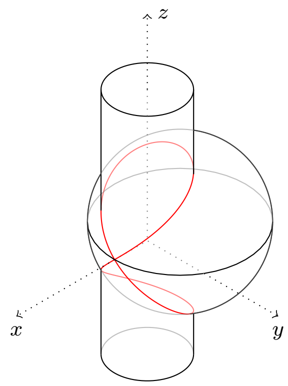
$$\delta(t) = (\cos^2(t) - \tfrac{1}{2}, -\sin(t)\cos(t), \sin(t)) \quad \text{et} \quad \gamma(t) = (\cos^2(t) - \tfrac{1}{2}, \sin(t)\cos(t), \sin(t))$$

décrivent la même courbe de l'espace (remplacer t par $\pi - t$ dans la première pour obtenir la seconde).

(c) La courbe de Viviani peut être décrite comme une intersection de deux surfaces:

- ☐ un hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = b = \frac{1}{2}$ et un sphère de centre $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de rayon 1.
- ☒ un cylindre d'axe Oz et de rayon $\frac{1}{2}$ et un sphère de centre $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de rayon 1.
- ☐ un cylindre d'axe Oz et de rayon $\frac{1}{2}$ et un sphère de centre $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon 1.
- ☐ un cylindre d'axe Oz et de rayon $\frac{1}{2}$ et un sphère de centre $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon 1.

Solution: L'équation $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ décrit un cylindre d'axe Oz passant par l'origine et de rayon $\frac{1}{2}$, alors que $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1$ représente une sphère de centre $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de rayon 1. La fenêtre de Viviani est donc l'intersection de ces deux surfaces:



Pour la relation de cette courbe avec l'architecture, voir par exemple l'article sur Wikipedia

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Fenêtre_de_Viviani`

Pour la représentation de la fenêtre comme une intersection d'autres surfaces, voir

`http://www.mathcurve.com/courbes3d/viviani/viviani.shtml`

Exercice 5.

(a) Une équation paramétrique de la sphère de rayon 1 centrée en 0, d'équation implicite $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, est donnée par ($\alpha \in [0, 2\pi]$ et $t \in [-\pi/2, \pi/2]$)

☐ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = \cos(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = \cos(t) \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = \sin(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = \cos(t) \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = \sin(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = \sin(t) \end{cases}$

☒ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = \cos(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = \sin(t) \end{cases}$

Solution: La sphère de rayon 1 est la surface de révolution obtenue en faisant tourner le cercle d'équation paramétrique $(\cos(t), 0, \sin(t))$, contenu dans le plan Oxz, autour de l'axe Oz. Une paramétrisation est donc

$$\begin{cases} x(t,\alpha) = \cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = \cos(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = \sin(t) \end{cases} .$$

Les mathématiciens emploient souvent cette representation paramétrique de la sphère, dérivé des conventions utilisées par les géographes. On nomme les coordonnées :

- α désigne la longitude, mesurée depuis l'axe des x généralement entre 0° et 360° ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$).
- t désigne la latitude, l'angle depuis le plan équatorial, entre −90° et 90° ($\pi/2 \leq t \leq \pi/2$).

(b) Un ellipsoïde a équation implicite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, où a, b et c sont des constantes positives. En modifiant l'équation paramétrique de la sphère obtenue au point précédent, on peut obtenir une équation paramétrique de l'ellipsoïde, qui est donnée par ($\alpha \in [0, 2\pi]$ et $t \in [-\pi/2, \pi/2]$) :

☐ $\begin{cases} x(t) = a\cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t) = b\sin(t)\sin(\alpha) \\ z(t) = c\sin(t) \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \frac{\cos(t)\cos(\alpha)}{a} \\ y(t,\alpha) = \frac{\cos(t)\sin(\alpha)}{b} \\ z(t,\alpha) = \frac{\sin(t)}{c} \end{cases}$

☒ $\begin{cases} x(t,\alpha) = a\cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = b\cos(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = c\sin(t) \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x(t,\alpha) = \frac{\cos(t)\cos(\alpha)}{a} \\ y(t,\alpha) = \frac{\sin(t)\sin(\alpha)}{b} \\ z(t,\alpha) = \frac{\sin(t)}{c} \end{cases}$

Solution: L'ellipsoïde est obtenu en modifiant les distances entre le centre et la surface de la sphère le long des trois axes:

$$\begin{cases} x(t,\alpha) = a\cos(t)\cos(\alpha) \\ y(t,\alpha) = b\cos(t)\sin(\alpha) \\ z(t,\alpha) = c\sin(t) \end{cases} .$$

où $\alpha \in [0, 2\pi]$ et $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. On vérifie que cette paramétrisation satisfait bien l'équation implicite de l'ellipsoïde. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \cos^2(t)\cos^2(\alpha) \\ \frac{y^2}{b^2} &= \cos^2(t)\sin^2(\alpha) \\ \frac{z^2}{c^2} &= \sin^2(t) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \cos^2(t)\cos^2(\alpha) + \cos^2(t)\sin^2(\alpha) + \sin^2(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

(c) Les constantes a, b et c dans l'ellipsoïde du point (b) représentent:

- ☒ la longueur des trois demi-axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.
- ☐ l'inverse de la longueur des trois demi-axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.
- ☐ la longueur des trois axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.
- ☐ l'inverse de la longueur des trois axes de l'ellipsoïde, donnés ici le long de chaque axe de coordonnée.

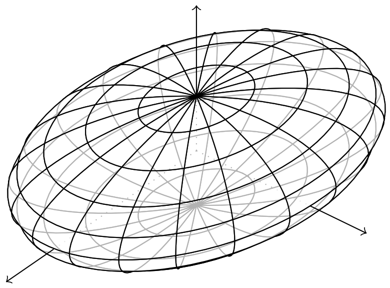
(d) Dans le cas particulier où $a = b$ dans la paramétrisation du point (b). Ceci est une équation paramétrique

- ☐ d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a\cos(t), c\sin(t), 0)$ autour de l'axe Oy.
- ☐ d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a\cos(t), 0, c\sin(t))$ autour de l'axe Oy.
- ☒ d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a\cos(t), 0, c\sin(t))$ autour de l'axe Oz.
- ☐ d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse $\gamma(t) = (a\cos(t), 0, c\sin(t))$ autour de l'axe Ox.

Solution: Lorsque $a = b$, on obtient la paramétrisation

$$\begin{cases} x = a\cos(t)\cos(\alpha) \\ y = a\cos(t)\sin(\alpha) \\ z = c\sin(t) \end{cases} \qquad \text{où } \alpha \in [0, 2\pi] \text{ et } t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Ceci est une équation paramétrique d'un ellipsoïde de révolution obtenu en faisant tourner l'ellipse d'équation paramétrique $\gamma(t) = (a\cos(t), 0, c\sin(t))$ où $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ autour de l'axe Oz.



Exercice 6. [Identification de surfaces]

Identifier à quelle surface chacun des paramétrages suivants correspond:

(a)

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ 3-v \\ 5-2u+4v \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

.

(b)

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u\cos v \\ u\sin v \end{pmatrix} \qquad u \in [0,2] \quad v \in [0,2\pi].$$

(c)

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ u \end{pmatrix} \qquad u \in [-5,0] \quad v \in [0,2\pi].$$

(d)

$$\Sigma(u,\alpha) = \begin{pmatrix} 3\cos\alpha \\ u \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad u \in \mathbb{R} \quad \alpha \in [0,2\pi].$$

Solution:

(a) Les 3 équations sont linéaires : c'est donc un plan

(b) On constate que $x = y^2 + z^2$. La surface est donc la portion d'un paraboloïde autour de l'axe Ox limitée par $x = 0$ et $x = 4$. Le rayon du cercle pour $x = 4$ est 2 ($u = 2$).

(c) C'est un cône circulaire droit d'axe Oz, de base le cercle centré en $C(0,0,-5)$ de rayon 5 et de sommet l'origine.

(d) C'est un cylindre elliptique d'axe Oy et dont la section est une ellipse de demi-axes 3 et 1.

Exercice 7. [Paramétrisation d'une surface]

Trouver une paramétrisation de la surface dont l'équation cartésienne est

$$8x^2 - 4y^2 - z = 0$$

Solution: Comme $z = 8x^2 - 4y^2$, on peut prendre x et y comme paramètres et on a

$$\Sigma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 8x^2 - 4y^2 \end{pmatrix} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

.

Mais on peut aussi choisir les fonctions hyperboliques cosh et sinh et utiliser l'identité $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. On trouve alors la paramétrisation

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\cosh v \\ \sqrt{2}u\sinh v \\ 8u^2 \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

.

Exercice 8. [Surfaces de révolution]

Trouver une paramétrisation des surfaces obtenues par rotation des courbes suivantes (situées dans le plan Oxy) autour de **l'axe** Oy:

(a) $y = \sqrt{x}, \quad z = 0 \quad x \in [0,1]$

Solution: On commence par donner une paramétrisation de la courbe dans le plan Oxy:

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{x} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x \in [0,1]$$

Alors la surface de révolution obtenue lorsque γ tourne autour de Oy est:

$$\Sigma(x,\alpha) = \begin{pmatrix} x\cos\alpha \\ \sqrt{x} \\ x\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad x \in [0,1] \quad \alpha \in [0,2\pi]$$

car la distance d'un point de la courbe γ à l'axe Oy est bien la coordonnée x !!

(b) $y = x^3 - x^2 + 1, \quad z = 0$

Solution: On commence par donner une paramétrisation de la courbe dans le plan Oxy:

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^3 - x^2 + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Alors la surface de révolution obtenue lorsque γ tourne autour de Oy est:

$$\Sigma(x,\alpha) = \begin{pmatrix} x\cos\alpha \\ x^3 - x^2 + 1 \\ x\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R} \quad \alpha \in [0,2\pi]$$

(c) Le cercle dans le plan Oxy de rayon 1 centré en $C(2,0,0)$

Solution: On commence par donner une paramétrisation du cercle dans le plan Oxy:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2+\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,2\pi]$$

Alors la surface de révolution obtenue lorsque γ tourne autour de Oy est:

$$\Sigma(t,\alpha) = \begin{pmatrix} (2+\cos t)\cos\alpha \\ \sin t \\ (2+\cos t)\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R} \quad \alpha \in [0,2\pi]$$

. C'est un **tore**.

Exercice 9. [Plan tangent à une surface]

On considère la surface

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u^2+1 \\ v^3+1 \\ u+v \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

et le point $P(5,2,3)$ sur la surface.

(a) Trouver les valeurs de u et v qui donne le point P.

Solution: La 1ère équation donne $u^2+1=5$ d'où $x=\pm 2$. La seconde donne $v^3+1=2$ donc $v=1$. Et la troisième donne $u+v=3$ donc $u=2$

(b) En considérant v comme une constante et en dérivant $\Sigma(u,v)$ par rapport à u trouver le vecteur tangent Σ_u et l'évaluer au point P.

Solution: On dérive l'expression $\Sigma(u,v)$ **par rapport à u** pour trouver

$$\Sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne en P:

$$\Sigma_u(P) = \Sigma_u(2,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) En considérant cette fois u comme une constante et en dérivant $\Sigma(u,v)$ par rapport à v trouver le vecteur tangent Σ_v et l'évaluer au point P.

Solution: On dérive l'expression $\Sigma(u,v)$ **par rapport à v** pour trouver

$$\Sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3v^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne en P:

$$\Sigma_v(P) = \Sigma_v(2,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Calculer un vecteur normal à la surface en P en faisant le produit vectoriel des 2 vecteurs tangents trouver précédemment.

Solution: On a

$$\vec{n}_\Sigma(P) = \Sigma_u(P) \times \Sigma_v(P) = \begin{vmatrix} e_1 & 4 & 0 \\ e_2 & 0 & 3 \\ e_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(e) Déterminer l'équation du plan tangent à la surface Σ au point P.

Solution: On connaît un vecteur normal à la surface qui ets donc aussi normal au plan cherché. L'équation du plan est alors $-3x - 4y + 12z = d$.

On détermine d en sachant que le plan doit passer par $P(5,2,3)$à ce qui donne $-15 - 8 + 36 = d = 13$. L'équation du plan tangent cherché est donc

$$3x + 4y - 12z + 13 = 0.$$

Exercice 10. [Plan tangent à une surface (bis)]

On considère la surface

$$\Sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ v \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

et le point $P = \Sigma\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$.

En répétant la procédure de l'exercice précédent, déterminer l'équation du plan tangent à Σ en P.

Solution: On calcule successivement

$$\Sigma_u(u,v) = \frac{\partial \Sigma}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne en P :

$$\Sigma_u(1, \frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$\Sigma_v(u,v) = \frac{\partial \Sigma}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne en P :

$$\Sigma_v(1, \frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\vec{n}_\Sigma(P) = \Sigma_u(P) \times \Sigma_v(P) = \begin{vmatrix} e_1 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ e_2 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ e_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \end{pmatrix}$$

L'équation du plan tangent est alors $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + z = d$ ce qui donne encore

$$\sqrt{3}x - y + 2z = d'.$$

Pour trouver la constante d' il faut utiliser le point P.

Le point P de la surface a comme coordonnées $P = \Sigma(1, \frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3})$.

Pour que le plan passe par P il faut que $\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{3} = d' = \frac{2\pi}{3}$. Ainsi l'équation du plan tangent à Σ en P est $\sqrt{3}x - y + 2z = \frac{2\pi}{3}$ ce qui est aussi égal à

$$(\Pi) \ : \ 3\sqrt{3}x - 3y + 6z = 2\pi.$$

Exercice 11. [Plan tangent à une surface et dérivation implicite]

On considère la surface d'équation cartésienne

$$(\Sigma) \, . \, 2x^2 + 3xy + 4y^2 + 3y + z^2 + 3yz = 22$$

et le point $P(1, 1, 2)$.

(a) Vérifier que P est sur Σ.

Solution: On a bien $2 + 3 + 4 + 3 + 4 + 6 = 22$.

On va prendre x et y comme paramètres et considérer que $z = z(x, y)$ est une fonction de x et y (on pourrait résoudre l'équation en z mais ce serait laborieux !).

(b) Dériver implicitement l'équation de Σ **par rapport à** x en considérant y **comme une constante** et $z = z(x)$ comme une fonction de x. Déterminer la dérivée de z par rapport à x au point $P(1, 1, 2)$ que l'on notera $z_x(P)$.

Solution: On obtient

$$4x + 3y + 2z \cdot z_x + 3yz_x = 0$$

ce qui donne au point $P(1, 1, 2)$: $7 + 7z_x(P) = 0$ et donc $z_x(P) = -1$.

(c) Dériver implicitement l'équation de Σ **par rapport à** y en considérant x **comme une constante** et $z = z(y)$ comme une fonction de y. Déterminer la dérivée de z par rapport à y au point $P(1, 1, 2)$ que l'on notera $z_y(P)$.

Solution: On obtient

$$3x + 8y + 3 + 2z \cdot z_y + 3z + 3yz_y = 0$$

ce qui donne au point $P(1, 1, 2)$: $20 + 7z_y(P) = 0$ et donc $z_y(P) = -\frac{20}{7}$.

(d) En déduire les 2 vecteurs tangents à Σ en P

$$\Sigma_x(P) \qquad \text{et} \qquad \Sigma_y(P).$$

Solution: Vu le choix des paramètres on a

$$\Sigma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\Sigma_x(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x(x,y) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_y(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Au point P cela donne $\Sigma_x(P) = (1,\ 0,\ -1)$ et $\Sigma_v(P) = (0,\ 1,\ -\frac{20}{7})$ vu les valeurs obtenues aux points (b) et (c)

(e) En déduire l'équation du plan tangent à Σ au point P.

Solution: Le vecteur normal au plan tangent (et à la surface) vaut

$$n_\Sigma(P) = \Sigma_x(p) \times \Sigma_y(P) = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 \\ e_3 & -1 & -\frac{20}{7} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{20}{7} \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 7 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}$$

L'équation du plan tangent est alors $7x + 20y + 7z = 41$ la constante 41 venant du fait que $P(1,1,2)$ doit être sur le plan.

(f) Quelle est cette surface ?

Solution: C'est une équation de degré 2 dans les 3 variables avec des coefficients positifs : c'est donc un ellipsoïde (mais incliné). Et ce n'est pas trivial de trouver ses demi-axes.