Exercices – Série 10

Exercice 1. [Echauffement]

(a) La longueur d'arc de la chaînette définie par l'équation explicite $y = \cosh(x)$ entre les point $(0,1)$ et $(b, \cosh(b))$, où $b > 0$, vaut :

- ☐ $\sinh(b)$
- ☐ $\cosh(b) - 1$
- ☐ $-\sinh(b)$
- ☐ $-\cosh(b) + 1$

(b) La longueur d'arc du cercle de rayon $r > 0$ paramétré par $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, où $t \in [0, 2\pi]$, entre deux points donnés par $t = 0$ et $t = \alpha$ radians ($\alpha \in [0, 2\pi]$) vaut :

- ☐ $\sqrt{2}\, r\cos(\alpha)$
- ☐ $r\tan(\alpha)$
- ☐ $r\alpha$
- ☐ r

(c) La longueur d'arc de la courbe définie par l'équation cartésienne implicite $x = \frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}$ entre deux points donnés par $y = 1$ et $y = 4$ vaut :

- ☐ $\frac{21}{2}$
- ☐ $\frac{14}{3}$
- ☐ 6
- ☐ $\frac{1}{4}$

Exercice 2. On considère la parabole $y = x^2$

(a) Les équations paramétriques de la **développée** de cette parabole sont

- ☐ $x(t) = 2t^2 + t + \frac{1}{2}$ et $y(t) = 4t^3 + t^2 + t$
- ☐ $x(t) = \sqrt{t}$ et $y(t) = \sqrt[3]{t}$.
- ☐ $x(t) = -4t^3$ et $y(t) = \frac{1}{2} + 3t^2$
- ☐ $x(t) = t^2 + 4t$ et $y(t) = t^3 + 2t + 1$

(b) La longueur de **la développée** comprise entre $x = 0$ et $x = 32$ vaut

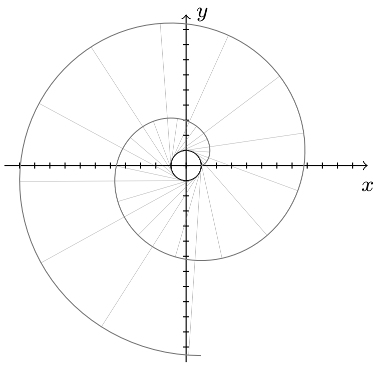
- ☐ $\frac{4097^{3/2}}{2} - \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{17^{3/2}}{2} - \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{17^{3/2}}{2}$
- ☐ $\frac{4097^{3/2}}{2} + \frac{1}{2}$

Exercice 3.

On considère le cercle unité de centre $O = (0,0)$.

(a) En utilisant sa paramétrisation en fonction de l'angle t (donné en radians), la développante en $P = (1,0)$ est la courbe $(x(t), y(t))$ définie par:

- ☐ $x(t) = \cos(t) + t\sin(t)$ et $y(t) = \sin(t) - t\cos(t)$
- ☐ $x(t) = -\cos(t) - t\sin(t)$ et $y(t) = -\sin(t) + t\cos(t)$
- ☐ $x(t) = \cos(t) + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin(t)$ et $y(t) = \sin(t) - \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(t)$
- ☐ $x(t) = -\cos(t) - \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin(t)$ et $y(t) = -\sin(t) + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(t)$



(b) La développée de la développante calculée en point (a) est la courbe $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ définie par:

- ☐ $\tilde{x}(t) = \cos(t) + t\sin(t) - t^2\sin(t), \quad \tilde{y}(t) = \sin(t) - t\cos(t) - t^2\cos(t)$
- ☐ $\tilde{x}(t) = \cos(t), \quad \tilde{y}(t) = \sin(t)$
- ☐ $\tilde{x}(t) = \sin(t), \quad \tilde{y}(t) = \cos(t)$
- ☐ $\tilde{x}(t) = \cos(t) + t\sin(t) - \frac{t^2\sin(t)}{2\cos(t)\sin(t)+t}, \quad \tilde{y}(t) = \sin(t) - t\cos(t) + \frac{t^2\cos(t)}{2\cos(t)\sin(t)+t}$

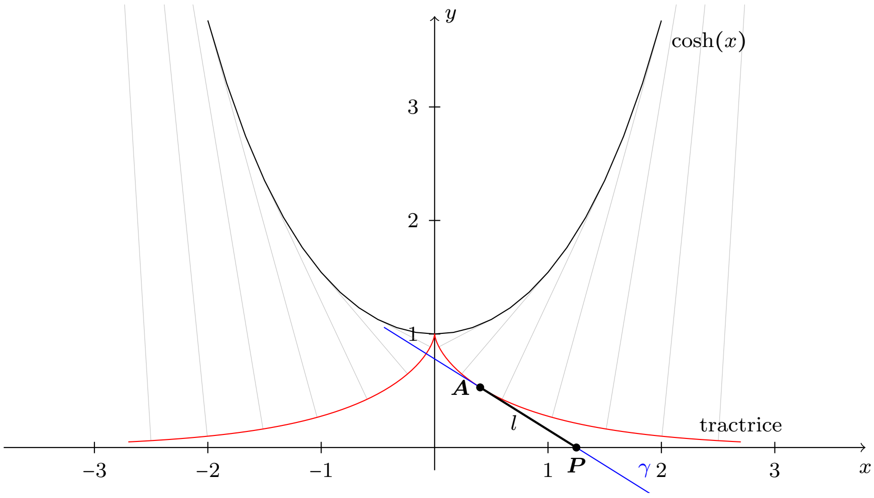
Exercice 4.

On considère la chaînette $y = \cosh(x)$.

(a) Les équations paramétriques de la développante de la chaînette en $P(0,1)$ sont

- ☐ $x(t) = t$ et $y(t) = \cosh(t) - \sinh(t)$
- ☐ $x(t) = t - \tanh(t)$ et $y(a) = \cosh(t) - \tanh(t)$
- ☐ $x(t) = t - \frac{1}{\cosh(t)}$ et $y(t) = \cosh(t) - \tanh(t)$
- ☐ $x(t) = t - \tanh(t)$ et $y(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$

Remarque : la développante de la chaînette s'appelle la **tractrice** en rouge ci-dessous.



(b) L'équation de la droite tangente en un point $A(x(a), y(a))$, de la tractrice est :

- ☐ $y = -\frac{1}{\sinh(a)}x + \frac{a}{\sinh(a)}$
- ☐ $y = -\frac{1}{\cosh(a)}x + \frac{a}{\cosh(a)}$
- ☐ $y = \frac{1}{\sinh(a)}x - \frac{a}{\sinh(a)} + \frac{2}{\cosh(a)}$
- ☐ $y = -\tanh(a)x + a\tanh(a) - \tanh^2(a)$

(c) l'intersection de la droite tangente avec l'axe Ox est réalisée au point P ayant coordonnées:

- ☐ $P\,(a - 2\tanh(a), 0)$
- ☐ $P\,(a, 0)$
- ☐ $P\left(a + \frac{\tanh(a)}{\cosh(a)} - \tanh(a), 0\right)$
- ☐ $P\,(a\sinh(a), 0)$

(d) la longueur l de la portion de tangente comprise entre la tractrice et l'axe Ox, i.e. la distance entre A et P, vaut:

- ☐ $\overline{AP} = 1$
- ☐ $\overline{AP} = \sqrt{1 + 2a\tanh(a)}$
- ☐ $\overline{AP} = \tanh(a)$
- ☐ $\overline{AP} = \sinh(a)$

Exercice 5. [Courbes de Bézier cubiques]

(a) Donner les équations paramétriques de la courbe de Bézier cubique $\gamma(t)$ pour les quatre points de contrôle en $P_0(0,0)$, $P_1(0,2)$, $P_2(4,2)$ et $p_3(4,0)$

(b) Trouver le point S correspondant à $t = 1/2$ et justifier pourquoi cette courbe de Bézier n'est pas un demi-cercle de rayon 2 centré en $(2,0)$.

(c) Calculer la courbure de γ en P_0, S et P_3. Comparer avec la courbure d'un cercle de rayon 2.

Exercice 6. [Recollement de courbes de Bézier cubiques]

On se donne les points d'ancrage $P_0(0,0)$, $P_3(2,3)$, $P_6(4,1)$ et $P_9(7,2)$. De plus on se donne les 2 premiers points de direction $P_1(1,1)$ et $P_2(1,2)$.

On souhaite faire passer 3 courbes de Béziers cubiques γ_1 , γ_2 et γ_3 par les 4 points d'ancrage donnés et on souhaite que le recollement des courbes soit aussi lisse que possible c'est-à-dire que le vecteur tangent et la courbure soient continus en P_3 et en P_6.
La courbe de Bézier cubique γ_1 aura donc les 4 points de contrôles P_0, P_1, P_2 et P_3.
La courbe de Bézier cubique γ_2 aura donc les 4 points de contrôles P_3, P_4, P_5 et P_6.
La courbe de Bézier cubique γ_3 aura donc les 4 points de contrôles P_6, P_7, P_8 et P_9.

(a) Déterminer les points de direction P_4, P_5, P_7 et P_8 pour que le recollement des 3 courbes de Bézier soit lisse, c'est-à-dire que les dérivées première et seconde soient continues en P_3 et P_6

(b) Déterminer la courbe de Bézier cubique γ_1 à partir des 4 points de contrôles P_0, P_1, P_2 et P_3 trouvés sous (a).

(c) Calculer le vecteur tangent à γ_1 en P_3 ainsi que sa courbure au même point.

(d) Déterminer la courbe de Bézier cubique γ_2 à partir des 4 points de contrôles P_3, P_3, P_5 et P_6 **trouvés sous (a)**.

(e) Calculer le vecteur tangent à γ_2 en P_3 ainsi que sa courbure au même point.

(f) Vérifier que γ_1 et γ_2 ont même vecteur tangent et même courbure en P_3.

(g) Si l'on imposait que la continuité du vecteur tangent (mais pas de la courbure) on pourrait choisir librement P_5.
Si l'on prend $P_5(3,2)$ que doit valoir P_7 pour que les vecteurs tangents soient égaux en P_6 ?
Choisir alors P_8 pour que la courbe γ_3 arrive en P_9 avec une tangente faisant 45^o avec l'horizontale.

Exercice 7. [Développante de la spirale logarithmique]

On désire calculer la développante de la spirale logarithmique

$$(\gamma)\ \begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

à partir de l'origine $O(0,0)$.

(a) Pour quelle valeur de t la courbe tend-elle vers l'origine ?

(b) Calculer la longueur de la spirale logarithmique entre $t_0 = -\infty$ et t.

(c) Calculer les équations paramétriques de la développante de cette spirale à partir de $O(0,0)$.

Exercice 8. [Développante de l'astroïde]

Nous avons rencontré l'astroïde à l'exercice 6 de la série 9 comme développée de l'ellipse. Nous allons montrer ici qu'en choisissant bien le point de départ, nous pouvons obtenir comme développante de l'astroïde une autre astroïde.

Considérons l'arc de l'astroïde (dans le premier quadrant) donné sous forme paramétrique par

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}. \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

et le point $P\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ correspondant à $t = \frac{\pi}{4}$.

(a) Calculer le vecteur tangent $c'(t)$ et sa norme.

(b) En déduire la longueur de l'arc de l'astroïde entre le point P et le point $c(t) = (x(t), y(t))$ c'est-à-dire $L(t) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{t} ds$.

(c) Calculer les coordonnées $X(t), Y(t)$ de la développante de la courbe c à partir du point P.

(d) En utilisant le résultat du point (b), donner la longueur totale de l'arc de l'astroïde. Quelle est alors la longueur de l'astroïde complète, c'est-à-dire si $t \in [0, 2\pi]$?