Corrections — Série 10

Exercice 1. [Echauffement]

(a) La longueur d'arc de la chaînette définie par l'équation explicite $y = \cosh(x)$ entre les point $(0,1)$ et $(b, \cosh(b))$, où $b > 0$, vaut :

- ☒ $\sinh(b)$
- ☐ $\cosh(b) - 1$
- ☐ $-\sinh(b)$
- ☐ $-\cosh(b) + 1$

Solution: La longueur d'arc cherchée est calculée en utilisant l'intégrale

$$\int_0^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^b \sqrt{1 + \sinh^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^b |\cosh(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^b \cosh(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sinh(b) - \sinh(0) = \sinh(b).$$

car $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ et donc $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$.

(b) La longueur d'arc du cercle de rayon $r > 0$ paramétré par $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, où $t \in [0, 2\pi]$, entre deux points donnés par $t = 0$ et $t = \alpha$ radians ($\alpha \in [0, 2\pi]$) vaut :

- ☐ $\sqrt{2}\, r\cos(\alpha)$
- ☐ $r\tan(\alpha)$
- ☒ $r\alpha$
- ☐ r

Solution: On calcule $(r\cos(t))' = -r\sin(t)$ et $(r\sin(t))' = r\cos(t)$. Ainsi la longueur d'arc vaut

$$\int_0^\alpha \sqrt{r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha r\,\mathrm{d}t = \big[rt\big]_0^\alpha = r\alpha.$$

Ce qui confirme ce que nous savions déjà: la longueur d'arc d'un cercle de rayon r déterminée par un angle α est de $r\alpha$.

(c) La longueur d'arc de la courbe définie par l'équation cartésienne implicite $x = \frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}$ entre deux points donnés par $y = 1$ et $y = 4$ vaut :

- ☐ $\frac{21}{2}$
- ☒ $\frac{14}{3}$
- ☐ 6
- ☐ $\frac{1}{4}$

Solution: La longueur d'arc d'une courbe ne va pas changer si on exprime x en fonction de y ou y en fonction de x. On peut donc dériver x en fonction de y:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = (y-1)^{\frac{1}{2}}.$$

La longueur d'arc cherchée est donc de

$$\int_1^4 \sqrt{1 + (y-1)}\,\mathrm{d}y = \int_1^4 y^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

Exercice 2. On considère la parabole $y = x^2$

(a) Les équations paramétriques de la **développée** de cette parabole sont

- ☐ $x(t) = 2t^2 + t + \frac{1}{2}$ et $y(t) = 4t^3 + t^2 + t$
- ☐ $x(t) = \sqrt{t}$ et $y(t) = \sqrt[3]{t}$.
- ☒ $x(t) = -4t^3$ et $y(t) = \frac{1}{2} + 3t^2$
- ☐ $x(t) = t^2 + 4t$ et $y(t) = t^3 + 2t + 1$

Solution: On peut utiliser le paramétrage canonique de la parabole $x = t$ et $y = t^2$ Alors $c'(t) = (1, 2t)$, $c''(t) = (0, 2)$ et $v(t) = \|c'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$. La courbure vaut alors

$$\kappa(t) = \frac{\det(c'c'')}{v^3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 2 \end{vmatrix}}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les coordonnée du centre du cercle osculateur sont alors donnée par

$$\begin{pmatrix} x_C(t) \\ y_C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{v} \cdot \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \cdot \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + \frac{1+4t^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t^3 \\ 3t^2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) La longueur de **la développée** comprise entre $x = 0$ et $x = 32$ vaut

- ☐ $\frac{4097^{3/2}}{2} - \frac{1}{2}$
- ☒ $\frac{17^{3/2}}{2} - \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{17^{3/2}}{2}$
- ☐ $\frac{4097^{3/2}}{2} + \frac{1}{2}$

Solution: De l'équation paramétrique de la développée obtenue au point (a)

$$(x(t), y(t)) = (-4t^3, \frac{1}{2} + 3t^2)$$

on trouve, en dérivant $x'(t) = -12t^2$, $y'(t) = 6t$ et donc

$$\int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t = \int \sqrt{144t^4 + 36t^2}\, \mathrm{d}t = \int 6t\sqrt{4t^2+1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(4t^2+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Si $x = 0$ alors le paramètre t est tel que $-4t^3 = 0$, soit $t = 0$. Si $x = 32$ alors le paramètre doit satisfaire $-4t^3 = 32$, donc $t = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$. Il faut donc intégrer entre -2 et 0. La longueur cherchée vaut donc

$$\int_0^{-2} 6t\sqrt{4t^2+1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{17^3} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 3.

On considère le cercle unité de centre $O = (0,0)$.

(a) En utilisant sa paramétrisation en fonction de l'angle t (donné en radians), la développante en $P = (1,0)$ est la courbe $(x(t), y(t))$ définie par:

- ☒ $x(t) = \cos(t) + t\sin(t)$ et $y(t) = \sin(t) - t\cos(t)$
- ☐ $x(t) = -\cos(t) - t\sin(t)$ et $y(t) = -\sin(t) + t\cos(t)$
- ☐ $x(t) = \cos(t) + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin(t)$ et $y(t) = \sin(t) - \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(t)$
- ☐ $x(t) = -\cos(t) - \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin(t)$ et $y(t) = -\sin(t) + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(t)$

Solution: Comme la paramétrisation du cercle unité de centre $O = (0,0)$ est donnée par $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$ et le point $P = (1,0)$ est obtenu pour $t_0 = 0$, on calcule

$$\mathbf{c}'(t) = (-\sin t, \cos t) \qquad \Longrightarrow \qquad v(t) = \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

et donc

$$L(t) = \int_{t_0}^{t} ds = \int_0^t \|\mathbf{c}'(u)\|\, du = \int_0^t 1\, du = t.$$

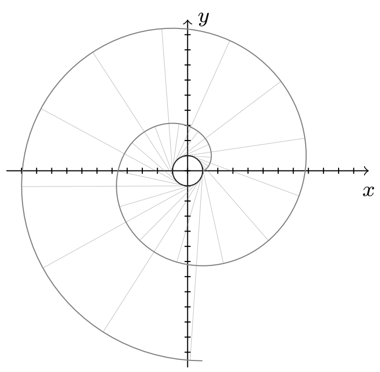
La développante est donnée par la formule

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{c}(t) - \frac{L(t)}{v(t)} \cdot \mathbf{c}'(t)$$

ce qui donne ici

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - \frac{t}{1} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix}$$

La développante du cercle est la spirale en gris représentée ci-dessous; le "fil se déroulant" est en gris clair:



(b) La développée de la développante calculée en point (a) est la courbe $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ définie par:

- ☐ $\tilde{x}(t) = \cos(t) + t\sin(t) - t^2\sin(t), \quad \tilde{y}(t) = \sin(t) - t\cos(t) - t^2\cos(t)$
- ☒ $\tilde{x}(t) = \cos(t), \quad \tilde{y}(t) = \sin(t)$
- ☐ $\tilde{x}(t) = \sin(t), \quad \tilde{y}(t) = \cos(t)$

☐ $\tilde{x}(t) = \cos(t) + t\sin(t) - \frac{t^2\sin(t)}{2\cos(t)\sin(t)+t}$, $\quad \tilde{y}(t) = \sin(t) - t\cos(t) + \frac{t^2\cos(t)}{2\cos(t)\sin(t)+t}$

Solution: Le théorème vu au cours nous permet de déterminer la développée de $(x(t), y(t))$ sans calcul, parce que elle est la courbe d'origine: le cercle cercle unité qui a paramétrisation

$$\tilde{x}(t) = \cos(t), \quad \tilde{y}(t) = \sin(t).$$

Nous pouvons aussi utiliser les formules vues au cours mais c'est beaucoup plus long. En effet on a

$$x'(t) = t\cos(t), \quad x''(t) = \cos(t) - t\sin(t), \quad y'(t) = t\sin(t), \quad y''(t) = \sin(t) + t\cos(t)$$

. On obtient alors:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{t^2\cos^t + t^2\sin^2 t} = t \\
\det(\mathbf{c}',\ \mathbf{c}'') &= \begin{vmatrix} t\cos t & \cos t - t\sin t \\ t\sin t & \sin t + t\cos t \end{vmatrix} = t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t - t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t = t^2. \\
\kappa(t) &= \frac{\det(\mathbf{c}',\ \mathbf{c}'')}{v(t)^3} = \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

La développée de c est alors donnée par

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{c}'(t))}{v(t)} &= \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix} + \frac{t}{t}\begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix} + \frac{t}{t}\begin{pmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

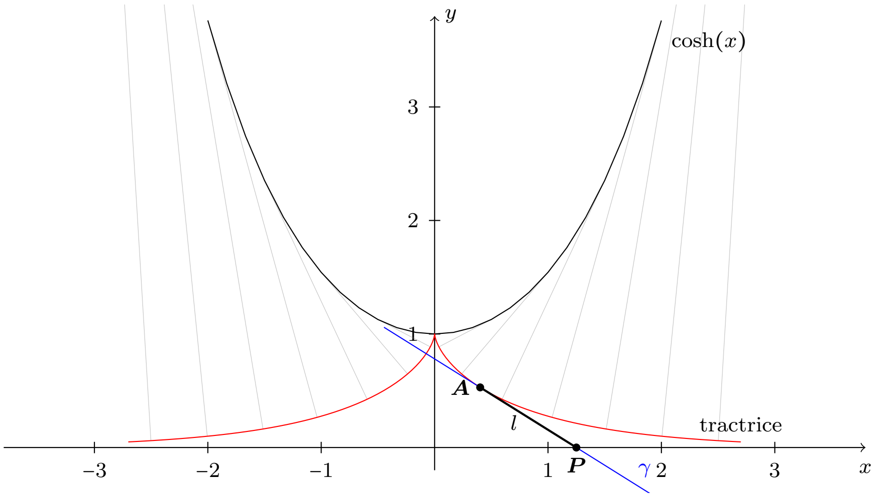
Exercice 4.

On considère la chaînette $y = \cosh(x)$.

(a) Les équations paramétriques de la développante de la chaînette en $P(0, 1)$ sont

- ☐ $x(t) = t$ et $y(t) = \cosh(t) - \sinh(t)$
- ☐ $x(t) = t - \tanh(t)$ et $y(a) = \cosh(t) - \tanh(t)$
- ☐ $x(t) = t - \frac{1}{\cosh(t)}$ et $y(t) = \cosh(t) - \tanh(t)$
- ☒ $x(t) = t - \tanh(t)$ et $y(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$

Remarque : la développante de la chaînette s'appelle la **tractrice** en rouge ci-dessous.



Solution: En prenant la paramétrisation canonique $c(t) = (t, \cosh t)$ alors le vecteur tangent à c est $\mathbf{c}'(t) = (1, \sinh t)$ et l'élément différentiel de longueur

$$ds = \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = \sqrt{1+\sinh^2 t}\,dt = \cosh t\,dt.$$

La longueur entre $t_0 = 0$ et t vaut alors

$$L(a) = \int_0^t \cosh u\,du = \sinh t$$

et la développante de c au point P est

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{c}(t) - \frac{L(t)}{v(t)} \cdot \mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix} - \frac{\sinh t}{\cosh t}\begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \tanh t \\ \cosh t - \frac{\sinh^2 t}{\cosh t} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} t - \tanh t \\ \frac{1}{\cosh t} \end{pmatrix}$$

(b) L'équation de la droite tangente en un point $A(x(a), y(a))$, de la tractrice est :

☒ $y = -\frac{1}{\sinh(a)}x + \frac{a}{\sinh(a)}$

☐ $y = -\frac{1}{\cosh(a)}x + \frac{a}{\cosh(a)}$

☐ $y = \frac{1}{\sinh(a)}x - \frac{a}{\sinh(a)} + \frac{2}{\cosh(a)}$

☐ $y = -\tanh(a)x + a\tanh(a) - \tanh^2(a)$

Solution: Soit $A = (x(a), y(a)) = (a - \tanh a, \dfrac{1}{\cosh a})$ un point de la tractrice. En dérivant on trouve le vecteur tangent à la tractrice :

$$\mathbf{D}'(a) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\cosh^2 a} \\ -\frac{\sinh a}{\cosh^2 a} \end{pmatrix}$$

dont la pente vaut

$$m = \frac{y'(a)}{x'(a)} = y'(a) \cdot (x'(a))^{-1} = \left(-\frac{\sinh(a)}{\cosh^2(a)}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\cosh^2(a)}\right)^{-1}$$
$$= -\frac{\sinh(a)}{\cosh^2(a)} \cdot \frac{\cosh^2(a)}{\sinh^2(a)} = -\frac{1}{\sinh(a)}.$$

Pour trouver l'équation de la droite tangente, $y = mx + q$, on impose le passage par la point $A(a - \tanh a, \frac{1}{\cosh a})$, ce qui donne:

$$q = y_A - mx_A = \frac{1}{\cosh(a)} + \frac{1}{\sinh(a)}\left(a - \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)}\right) = \frac{1}{\cosh(a)} + \frac{a}{\sinh(a)} - \frac{1}{\cosh(a)} = \frac{a}{\sinh(a)}$$

L'équation de la tangente à la tractrice en A est alors:

$$y = -\frac{1}{\sinh(a)}x + \frac{a}{\sinh(a)}.$$

(c) l'intersection de la droite tangente avec l'axe Ox est réalisée au point P ayant coordonnées:

- ☐ $P\left(a - 2\tanh(a), 0\right)$
- ☐ $P\left(a + \frac{\tanh(a)}{\cosh(a)} - \tanh(a), 0\right)$
- ☒ $P\left(a, 0\right)$
- ☐ $P\left(a\sinh(a), 0\right)$

Solution: L'intersection avec l'axe Ox est donnée en posant $y = 0$, et on trouve:

$$0 = -\frac{1}{\sinh(a)}x + \frac{a}{\sinh(a)} \Rightarrow x = a.$$

(d) la longueur l de la portion de tangente comprise entre la tractrice et l'axe Ox, i.e. la distance entre A et P, vaut:

- ☒ $\overline{AP} = 1$
- ☐ $\overline{AP} = \tanh(a)$
- ☐ $\overline{AP} = \sqrt{1 + 2a\tanh(a)}$
- ☐ $\overline{AP} = \sinh(a)$

Solution: La longueur du segment entre le point de tangence $A\left(a - \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)}, \frac{1}{\cosh(a)}\right)$ et l'intersection $P(a, 0)$ est

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{\left(a - \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{\cosh(a)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sinh^2(a) + 1}{\cosh^2(a)}} = \sqrt{\frac{\cosh^2(a)}{\cosh^2(a)}} = 1\end{aligned}$$

une constante!

La tractrice a été mise en évidence pour la première fois par Leibniz en 1693 (il affirmait néanmoins connaître son équation depuis longtemps) suite à une question de l'architecte et médecin Claude Perrault[1]. En effet, pendant le séjour de Leibniz à Paris en 1672–1676, Claude Perrault lui demande quelle est la trajectoire que parcourt sa montre à gousset lorsque, posée sur une table, elle est tirée par sa chaîne le long du bord du meuble. Leibniz résout cette question en établissant — et en résolvant — une des premières équations différentielles de l'histoire: la courbe parcourue est une tractrice, ce qui explique que la longueur de portion de tangente ci-dessus (qui est la longueur de la chaîne entre la montre et le bord de la table) est constante.

[1] Claude Perrault (1613–1688) est entre autres l'architecte de la façade de l'aile est du Louvre. Il est aussi le frère de *Charles* Perrault, auteur des *Contes de ma mère l'Oye*.

Exercice 5. [Courbes de Bézier cubiques]

(a) Donner les équations paramétriques de la courbe de Bézier cubique $\gamma(t)$ pour les quatre points de contrôle en $P_0(0,0)$, $P_1(0,2)$, $P_2(4,2)$ et $p_3(4,0)$

Solution: L'expression d'une courbe de Bézier cubique avec quatre points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3 est

$$\gamma(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$$

où $t \in [0,1]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= (1-t)^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 3(1-t)t^2 + 4t^3 \\ 6(1-t)^2 t + 6(1-t)t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12t^2 - 8t^3 \\ 6t - 6t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les équations paramétriques de la courbe de Bézier cubique sont

$$\begin{cases} x(t) = 12t^2 - 8t^3 \\ y(t) = 6t - 6t^2 \end{cases}$$

où $t \in [0,1]$

(b) Trouver le point S correspondant à $t = 1/2$ et justifier pourquoi cette courbe de Bézier n'est pas un demi-cercle de rayon 2 centré en $(2,0)$.

Solution: Pour $t = 1/2$ on obtient le point $S\left(2, \frac{3}{2}\right)$ car

$$\begin{cases} x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{4} - \frac{8}{8} = 2 \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Il est évident que ce point n'appartient pas à un cercle de rayon $1/2$ centré en $(1/2, 0)$ puisque

$$\operatorname{dist}\left(\left(2, \frac{3}{2}\right), (2,0)\right) = \frac{3}{2} \neq 2.$$

(c) Calculer la courbure de γ en P_0, S et P_3. Comparer avec la courbure d'un cercle de rayon 2.

Solution: On a

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 24t - 24t^2 \\ 6 - 12t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \gamma''(t) = \begin{pmatrix} 24 - 48t \\ -12 \end{pmatrix}$$

et on rappelle que la courbure vaut

$$\kappa(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \cdot \det\left(\gamma'(t),\ \gamma''(t)\right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ce qui donne

(i) en P_0 : $\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\gamma''(0) = \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix}$ et donc

$$\kappa(P_0) = \frac{1}{6^3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} = -\frac{6 \cdot 24}{6^3} = -\frac{2}{3}.$$

(ii) en S : $\gamma'(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix}$ et donc

$$\kappa(P_0) = \frac{1}{6^3} \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = -\frac{6 \cdot 12}{6^3} = -\frac{1}{3}.$$

(iii) en P_1 : $\gamma'(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\gamma''(0) = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix}$ et donc

$$\kappa(P_0) = \frac{1}{6^3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} == -\frac{24}{36} = -\frac{2}{3}.$$

On constate que la courbure (en valeur absolue) varie de $\frac{2}{3}$ au début et à la fin à $\frac{1}{3}$ au sommet S. La courbure n'est pas constante ce qui confirme que la courbe n'est pas un cercle et ne vaut pas non plus la courbure d'un cercle de rayon 2 qui est de $\frac{1}{2}$. Cependant, en moyenne, la courbure vaut bien $\frac{1}{2}$.

Exercice 6. [Recollement de courbes de Bézier cubiques]

On se donne les points d'ancrage $P_0(0,0)$, $P_3(2,3)$, $P_6(4,1)$ et $P_9(7,2)$. De plus on se donne les 2 premiers points de direction $P_1(1,1)$ et $P_2(1,2)$.

On souhaite faire passer 3 courbes de Béziers cubiques γ_1 , γ_2 et γ_3 par les 4 points d'ancrage donnés et on souhaite que le recollement des courbes soit aussi lisse que possible c'est-à-dire que le vecteur tangent et la courbure soient continus en P_3 et en P_6.
La courbe de Bézier cubique γ_1 aura donc les 4 points de contrôles P_0, P_1, P_2 et P_3.
La courbe de Bézier cubique γ_2 aura donc les 4 points de contrôles P_3, P_4, P_5 et P_6.
La courbe de Bézier cubique γ_3 aura donc les 4 points de contrôles P_6, P_7, P_8 et P_9.

(a) Déterminer les points de direction P_4, P_5, P_7 et P_8 pour que le recollement des 3 courbes de Bézier soit lisse, c'est-à-dire que les dérivées première et seconde soient continues en P_3 et P_6

Solution: Nous avons vu au cours que la condition pour la continuité du vecteur tangent en P_3 est $P_3 - P_2 = P_4 - P_3$ ce qui donne $P_4 = 2P_3 - P_2$. Ici on obtient

$$P_4 = 2P_3 - P_2 = 2 \cdot (2,3) - (1,2) = (3,4).$$

La continuité de la courbure est donnée par la condition (cf. cours) $P_5 = 2P_4 - 2P_2 + P_1$ ce qui donne dans notre cas

$$P_5 = 2 \cdot (3,4) - 2 \cdot (1,2) + (1,1) = (5,5).$$

La condition pour la continuité du vecteur tangent en P_6 est $P_7 = 2P_6 - P_5$ ce qui donne

$$P_7 = 2 \cdot (4,1) - (5,5) = (3,-3).$$

La continuité de la courbure en P_6 est donnée par la condition (cf. cours) $P_8 = 2P_7 - 2P_5 + P_4$ ce qui donne ici

$$P_8 = 2 \cdot (3, -3) - 2 \cdot (5, 5) + (3, 4) = (-1, -12).$$

Les 9 points de contrôles sont donc

$P_0(0,0)$ $P_1(1,1)$ $P_2(1,2)$ $P_3(2,3)$ $P_4(3,4)$ $P_5(5,5)$
$P_6(4,1)$ $P_7(3,-3)$ $P_8(-1,-12)$ $P_9(7,2)$

On constate que les 2 derniers points de direction P_7 et P_8 partent très loin et que la condition de lissage n'est donc pas la plus raisonnable (voir point (g))

(b) Déterminer la courbe de Bézier cubique γ_1 à partir des 4 points de contrôles P_0, P_1, P_2 et P_3 trouvés sous (a).

Solution: La formule du cours nous donne

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 \\
&= (1-t)^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3(t^3 - 2t^2 + t) + 3t^2 - 3t^3 + 2t^3 \\ 3(t^3 - 2t^2 + t) + 6t^2 - 6t^3 + 3t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 3t \\ 3t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On vérifie que $\gamma_1(0) = P_0$ et $\gamma_1(1) = P_3$.

(c) Calculer le vecteur tangent à γ_1 en P_3 ainsi que sa courbure au même point.

Solution: En dérivant 2 fois on obtient

$$\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} 6t^2 - 6t + 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_1''(t) = \begin{pmatrix} 12t - 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Au point P_3 ceci donne le vecteur tangent

$$\gamma_1'(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et le vecteur accélération

$$\gamma_1''(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La courbure est donnée par

$$\kappa = \frac{1}{\|\gamma_1'(1)\|^3} \cdot \det \begin{pmatrix} \gamma_1'(1) & \gamma_1''(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}^3} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{18}}.$$

(d) Déterminer la courbe de Bézier cubique γ_2 à partir des 4 points de contrôles P_3, P_3, P_5 et P_6 **trouvés sous (a)**.

Solution: La formule du cours nous donne pour $s \in [0,1]$ (nous utilisons s pour γ_2 au lieu de t pour bien distinguer γ_1 de γ_2 plus tard)

$$\begin{aligned}
\gamma_2(s) &= (1-s)^3 P_3 + 3(1-s)^2 s P_4 + 3(1-s)s^2 P_5 + s^3 P_6 \\
&= (1-s)^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3(1-s)^2 s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3(1-s)s^2 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s^3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(-s^3+3s^2-3s+1) + 9s(1-2s+s^2) + 15s^2(1-s) + 4s^3 \\ 3(-s^3+3s^2-3s+1) + 12s(1-2s+s^2) + 15s^2(1-s) + s^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4s^3+3s^2+3s+2 \\ -5s^3+3s+3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On vérifie que $\gamma_2(0) = (2,3) = P_3$ et $\gamma_2(1) = (4,1) = P_6$.

(e) Calculer le vecteur tangent à γ_2 en P_3 ainsi que sa courbure au même point.

Solution: En dérivant 2 fois on obtient

$$\gamma_2'(s) = \begin{pmatrix} -12s^2+6s+3 \\ -15s^2+3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_2''(s) = \begin{pmatrix} -24s+6 \\ -30s \end{pmatrix}.$$

Le point P_3 est au début de γ_2 et correspond à $s=0$. On obtient donc

$$\gamma_2'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \gamma_2''(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve le même vecteur tangent et le même vecteur γ'' que sous (d). La courbure est donc aussi de $-\frac{1}{\sqrt{18}}$.

(f) Vérifier que γ_1 et γ_2 ont même vecteur tangent et même courbure en P_3.

Solution: Il suffit de comparer (c) et (e).

Le recollement de γ_1 et γ_2 est comme souhaité : les vecteurs tangents et les courbures sont les mêmes au point de recollement P_3.

(g) Si l'on imposait que la continuité du vecteur tangent (mais pas de la courbure) on pourrait choisir librement P_5.
Si l'on prend $P_5(3,2)$ que doit valoir P_7 pour que les vecteurs tangents soient égaux en P_6 ?
Choisir alors P_8 pour que la courbe γ_3 arrive en P_9 avec une tangente faisant 45^o avec l'horizontale.

Solution: Avec $P_5(3,2)$ on obtient

$$P_7 = 2P_6 - P_5 = (8,2) - (3,2) = (5,0).$$

Pour que le vecteur tangent fasse un angle de 45^o en P_9 on peut choisir $P_8 = (6,1)$ ce qui donne

$$\gamma_3'(P_9) = 3 \cdot \overrightarrow{P_8P_9} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui fait bien un angle de 45^o avec l'horizontale.

Exercice 7. [Développante de la spirale logarithmique]
On désire calculer la développante de la spirale logarithmique

$$(\gamma)\ \begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

à partir de l'origine $O(0,0)$.

(a) Pour quelle valeur de t la courbe tend-elle vers l'origine ?

Solution: La courbe s'enroule de manière de plus en plus serrée autour de l'origine sans jamais l'atteindre lorsque $t \longrightarrow -\infty$. On a en effet

$$\lim_{t \longrightarrow -\infty} x(t) = 0 = \lim_{t \longrightarrow -\infty} y(t) = 0.$$

.

On va donc calculer la développante à partir de $t_0 = -\infty$!!

(b) Calculer la longueur de la spirale logarithmique entre $t_0 = -\infty$ et t.

Solution: On calcule d'abord

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cdot (\cos t - \sin t) \\ e^t \cdot (\sin t + \cos t) \end{pmatrix}.$$

L'élément différentiel de longueur à intégrer est

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \sqrt{e^{2t} \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t \sin t) + e^{2t} \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t \sin t)}\, dt = \sqrt{2} e^t. \end{aligned}$$

La longueur de la spirale logarithmique entre $t_0 = -\infty$ et t vaut donc

$$L(t) = \int_{-\infty}^{t} \sqrt{2} e^u du = \sqrt{2} e^u \Big]_{u=-\infty}^{u=t} = \sqrt{2} e^t.$$

Remarquez que bien que l'intégrale se fasse sur un intervalle infini $]-\infty; t]$, la longueur, elle, est finie !! Il y a une infinité de spirale autour de l'origine mais leurs longueurs est finie.

(c) Calculer les équations paramétriques de la développante de cette spirale à partir de $O(0,0)$.

Solution: Les formules du cours nous donne

$$\begin{aligned} X(t) &= x(t) - \frac{x'(t) \cdot L(t)}{\|\gamma'(t)\|} = e^t \cos t - \frac{e^t(\cos t - \sin t) \cdot \sqrt{2} e^t}{\sqrt{2} e^t} = e^t \sin t \\ Y(t) &= y(t) - \frac{y'(t) \cdot L(t)}{\|\gamma'(t)\|} = e^t \sin t - \frac{e^t(\sin t + \cos t) \cdot \sqrt{2} e^t}{\sqrt{2} e^t} = -e^t \cos t \end{aligned}$$

La développante a donc les équations paramétriques suivantes

$$\begin{cases} X(t) = e^t \sin t \\ Y(t) = -e^t \cos t \end{cases}$$

C'est en fait la même spirale logarithmique que γ mais ayant subi une rotation de $-\frac{\pi}{2}$.

On peut aussi en utilisant les identités $\sin t = \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos t = -\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$ écrire la développante comme

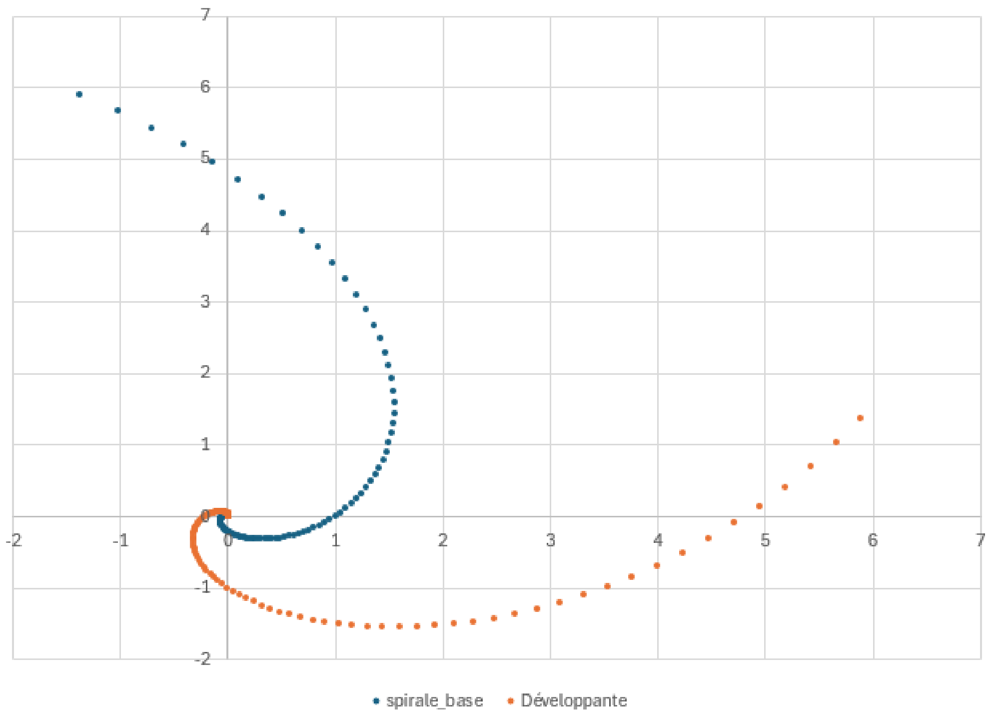
$$\begin{cases} X(t) = e^t \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \\ Y(t) = e^t \sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

et après le changement $s = t - \frac{\pi}{2}$ on obtient

$$\begin{cases} X(s) = e^{s+\frac{\pi}{2}} \cos s = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot e^s \cos s \\ Y(s) = e^{s+\frac{\pi}{2}} \sin s = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot e^s \sin s \end{cases}$$

On peut donc aussi voir la développante comme la spirale de départ qui a subi une homothétie (un agrandissement) d'un facteur $e^{\frac{\pi}{2}} \equiv 4.8104$.

En bleu ci-dessous la spirale logarithmique de départ (enfin une partie) et en orange sa développante.



Exercice 8. [Développante de l'astroïde]

Nous avons rencontré l'astroïde à l'exercice 6 de la série 9 comme développée de l'ellipse. Nous allons montrer ici qu'en choisissant bien le point de départ, nous pouvons obtenir comme développante de l'astroïde une autre astroïde.

Considérons l'arc de l'astroïde (dans le premier quadrant) donné sous forme paramétrique par

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}. \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

et le point $P\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ correspondant à $t = \frac{\pi}{4}$.

(a) Calculer le vecteur tangent $c'(t)$ et sa norme.

(b) En déduire la longueur de l'arc de l'astroïde entre le point P et le point $c(t) = (x(t), y(t))$ c'est-à-dire $L(t) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{t} ds$.

(c) Calculer les coordonnées $X(t), Y(t)$ de la développante de la courbe c à partir du point P.

(d) En utilisant le résultat du point (b), donner la longueur totale de l'arc de l'astroïde. Quelle est alors la longueur de l'astroïde complète, c'est-à-dire si $t \in [0, 2\pi]$?

Solution:

(a) On a en dérivant

$$c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t \\ 3\sin^2 t \cos t \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} v(t) = \|c'(t)\| &= \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 \sin^2 t \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= 3 \cdot |\cos t| \cdot |\sin t| = 3\cos t \cdot \sin t \end{aligned}$$

On a pu laisser tomber les valeurs absolues car $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

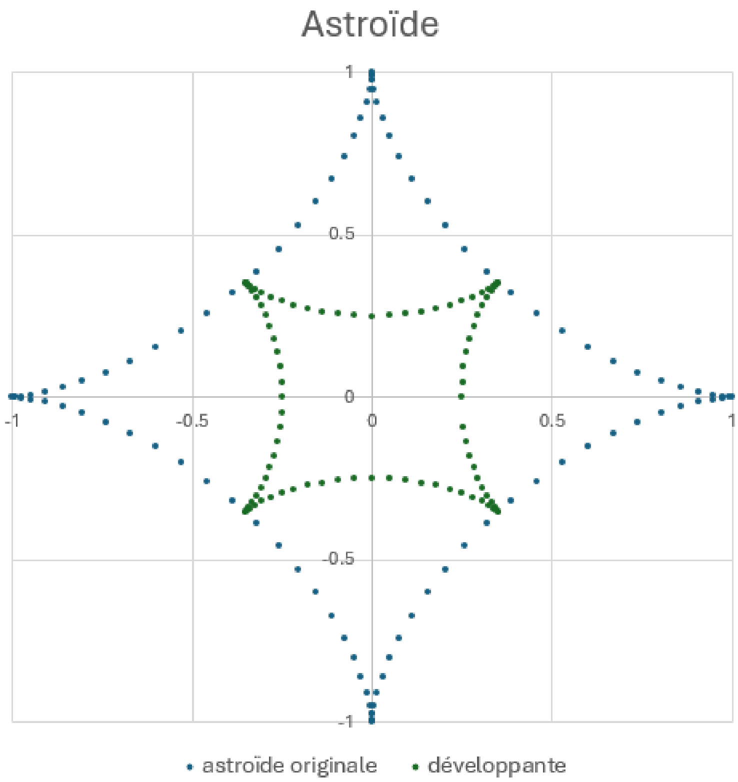
(b) Alors

$$L(t) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{t} 3\cos s \sin s \, ds = \frac{3}{2}\sin^2 s \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{t} = \frac{3}{2}\sin^2 t - \frac{3}{4}.$$

(c) Les coordonnées $X(t), Y(t)$ de la développante de la courbe c à partir du point P sont données par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \frac{L(t)}{v(t)} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} - \frac{\frac{3}{2}\sin^2 t - \frac{3}{4}}{3\cos t \cdot \sin t} \cdot \begin{pmatrix} -3\cos^2 t \sin t \\ 3\sin^2 t \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^3 t + \frac{3}{2}\cos t \sin^2 t - \frac{3}{4}\cos t \\ \sin^3 t - \frac{3}{2}\sin^3 t + \frac{3}{4}\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t + \frac{3}{2}\cos t(1 - \cos^2 t) - \frac{3}{4}\cos t \\ \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{2}\sin^3 t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\cos t - \frac{1}{2}\cos^3 t \\ \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{2}\sin^3 t \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ceci est l'astroïde originale ayant subi une rotation de $\frac{\pi}{4}$ et une homothétie d'un facteur $\frac{1}{2}$. Ceci est un peu technique à montrer mais il suffit de tracer les 2 courbes pour s'en apercevoir.



(d) La longueur totale le l'arc de l'astroïde est l'intégrale de l'élément différentiel de longueur $ds = \|c'(t)\|\,dt$ de $t = 0$ à $t = \frac{\pi}{2}$. Ceci donne

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t \, dt = \frac{3}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Si on considère l'astroïde dans les 4 quadrants (de $t = 0$ à $t = 2\pi$) alors sa longueur est 4 fois plus grande et vaut donc 6.