Examen blanc de mi-semetre

L'enoncé comprends 16 questions couvrant les premières six semaines du cours.

Exercice 1. [Droite]

La droite passant par les points $A = (10, 1)$ et $B = (100, 2)$ coupe l'axe Ox dans le point P. Quelles sont les coordonnées du point P ?

- ☐ $P(190, 0)$
- ☐ $P(-90, 0)$
- ☐ $P(0, \frac{8}{9})$
- ☒ $P(-80, 0)$

Solution: La droite passant par les points $A = (10, 1)$ et $B = (100, 2)$ est determinée à l'aide de la formule suivant :

$$\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-10}{100-10}.$$

Ainsi $y = \frac{1}{90}x + \frac{8}{9}$. Cette droite intersecte l'axe Ox lorsque $y = 0$ ce qui implique que $\frac{1}{90}x - \frac{8}{9} = 0$. Donc les coordonnées du point P sont $(-80, 0)$.

Exercice 2. [Polynôme d'interpolation]

Le polynôme d'interpolation $P(x)$ passant par les points $(0, -1)$, $(1, -2)$, $(2, 0)$ et $(3, 1)$ est :

- ☒ $P(x) = -1 - x + \frac{3}{2}x(x-1) - \frac{2}{3}x(x-1)(x-2)$
- ☐ $P(x) = -1 + x + \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{2}{3}x(x-1)(x-2)$
- ☐ $P(x) = -1 - x + 3x^2 - 4x^3$
- ☐ $P(x) = -1 + x + 3x^2 + 4x^3$

Solution: Le polynôme d'interpolation passant par les points $(0, y_0), (1, y_1), (2, y_2)$ et $(3, y_3)$ est

$$P(x) = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0.$$

On rappelle que les coefficients sont calculés grâce au schéma suivant

$$\begin{array}{cccc}
-1 & & & \\
 & -1 & & \\
-2 & & 3 & \\
 & 2 & & -4 \\
0 & & -1 & \\
 & 1 & & \\
1 & & &
\end{array}$$

Le polynôme cherché est donc

$$P(x) = -1 - x + 3\frac{x(x-1)}{2} - 4\frac{x(x-1)(x-2)}{6}.$$

Exercice 3. [Binôme de Newton]

Dans l'expression de $(7+2x)^{2021}$ le coefficient devant le terme x^{2020} vaut

- ☐ 2^{2021}
- ☐ $2020 \cdot 7$
- ☒ $2021 \cdot 7 \cdot 2^{2020}$
- ☐ $2020 \cdot 2^{2020}$

Solution: D'après la formule de binôme de Newton on a

$$(7+2x)^{2021} = \sum_{k=0}^{2021} \binom{2021}{k} 7^{2021-k}(2x)^k.$$

Ainsi le terme contenant x^{2020} est obtenu lorsque $k = 2020$. En considérant dans la somme $k = 2020$ on obtient le terme

$$\binom{2021}{2020} 7^{2021-2020}(2x)^{2020} = 2021 \cdot 7 \cdot 2^{2020} x^{2020}.$$

Exercice 4. [Polynôme]

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré 11 vérifiant les conditions suivantes :

$$P(1) = 1!,\ P'(1) = 2!,\ P''(1) = 3!, \dots,\ P^{(10)}(1) = 11!$$

Alors :

- ☒ Il existe une infinité de polynômes P vérifiant ces conditions.
- ☐ Un tel polynôme P n'existe pas.
- ☐ Il existe un unique polynôme P vérifiant ces conditions.
- ☐ Si P est un polynôme qui vérifie ces conditions, alors

$$P(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \cdots + 11(x-1)^{10} + 12(x-1)^{11}.$$

Solution: En utilisant le fait que si $f(x) = (x-1)^n$ alors

$$f^{(m)}(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ n! & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases},$$

nous pouvons définir un unique polynôme du dixième degré qui satisfait les dix conditions données sur ses dérivées :

$$P(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \cdots + 11(x-1)^{10}.$$

Or, étant donné que le polynôme doit être du onzième degré, nous pouvons ajouter un terme

$$P(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \cdots + 11(x-1)^{10} + a_{11}(x-1)^{11}.$$

où $a_{11} \in \mathbb{R}$. Il existe donc une infinité de polynômes du onzième degré qui satisfont les dix conditions données sur les dérivées.

Exercice 5. [Propriétés des logarithmes]

Soit $x > 0$ et soit $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction logarithme naturel. Alors l'expression

$$\ln\left((x+1)^2\right) - \ln\left(x^2\right)$$

vaut :

- ☐ $2\ln\left(x^2 - 1\right)$
- ☒ $2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
- ☐ $\ln(2x-1)$
- ☐ $\ln(2x+1)$

Solution: Par les propriétés des logarithmes on a

$$\begin{aligned} \ln\left((x+1)^2\right) - \ln\left(x^2\right) &= 2\ln(x+1) - 2\ln(x) \\ &= 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Exercice 6. [Logarithmes et coefficients binomiaux]

Soient n et k des entiers positifs tels que $k \leq n$ et soit $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction logarithme naturel. Alors l'expression

$$\ln\left(\binom{n}{k}\right)$$

vaut

- ☐ $\ln(n) - \ln(k)$
- ☒ $\ln(n!) - \ln(k!) - \ln((n-k)!)$
- ☐ 0
- ☐ $\ln(n) - \ln(k) - \ln(n-k)$

Solution: Comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

par les propriétés des logarithmes, on obtient

$$\ln\left(\binom{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) = \ln(n!) - \ln(k!) - \ln((n-k)!).$$

Exercice 7. [Fonctions trigonométriques]

Si les trois angles internes d'un triangle ont tous une tangente positive, alors :

☐ Il s'agit d'un triangle rectangle.

☒ Tous les angles internes du triangle sont aigus.

☐ Ce triangle a un angle interne obtus.

☐ Il n'est pas possible que les trois angles internes aient une tangente positive.

Solution: Les trois angles internes d'un triangle sont compris entre 0 et π non compris. La tangente d'un angle est positive que si l'angle est compris entre 0 et $\pi/2$, en effet pour $0 < x < \pi$ on a que $\tan(x) > 0$ si $0 < x < \pi/2$. Ainsi les trois angles internes sont compris entre 0 et $\pi/2$, c'est-à-dire que les trois angles sont aigus.

Exercice 8. [Rélations trigonométriques]

Soit x un angle. L'expression $\cos^4(x) - \sin^4(x)$ est égale

☐ $\cos^3(x) - \sin^3(x)$

☐ $\cos(x) - \sin(x)$

☒ $\cos^2(x) - \sin^2(x)$

☐ 1

Solution: L'identité remarquable de la différence de carré implique que

$$\cos^4(x) - \sin^4(x) = \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Exercice 9. [Fonctions hyperboliques]

L'expression $\sinh(\ln(2))$ vaut

☐ $\frac{5}{4}$

☐ 5

☐ $\frac{3}{2}$

☒ $\frac{3}{4}$

Solution: Comme $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, alors

$$\sinh(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - e^{\ln(1/2)}}{2} = \frac{2 - 1/2}{2} = \frac{3}{4}.$$

Exercice 10. [Dérivation des fonctions trigonométriques]

La dérivé de la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{2}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ en un point $x \neq 0$ vaut

- ☐ 1
- ☐ $\frac{\pi}{4}$
- ☒ 0
- ☐ $\frac{2+x^2}{4+x^2}$

Solution: Rappelons que $\big(\arctan(x)\big)' = \frac{1}{1+x^2}$ alors étant donné que nous avons à deriver des fonctions composées :

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2/x)^2}\left(\frac{2}{x}\right)' + \frac{1}{1+(x/2)^2}\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{x^2}{x^2+4}\left(-\frac{2}{x^2}\right) + \frac{4}{4+x^2}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Exercice 11. [Droite tangente à une courbe]

L'équation de la droite tangente à la courbe définie par la fonction $f(x) = x^2(1-\log_\pi(x))$ au point d'abscisse π s'écrit :

- ☒ $y = -\frac{\pi}{\ln(\pi)}x + \frac{\pi^2}{\ln(\pi)}$
- ☐ $y = (2\pi - \frac{\pi}{\ln(\pi)})(x-\pi^2)$
- ☐ $y = -\pi x + \pi^2$
- ☐ $y = -\ln(\pi^\pi)x + \ln(\pi^{\pi^2})$

Solution: Pour déterminer la droite tangente, nous devons calculer la dérivée de f :

$$f'(x) = 2x(1-\log_\pi(x)) - x^2\left(\frac{1}{x\ln(\pi)}\right)$$

La pente de la droite tangente à la courbe définie par la fonction $f(x) = x^2(1-\log_\pi(x))$ au point d'abscisse π vaut

$$f'(\pi) = -\frac{\pi}{\ln(\pi)}$$

La droite tangente passe par le point $(\pi, f(\pi)) = (\pi, 0)$, ainsi l'équation cherchée de la droite tangente est : $y = -\frac{\pi}{\ln(\pi)}(x-\pi) = -\frac{\pi}{\ln(\pi)}x + \frac{\pi^2}{\ln(\pi)}$

Exercice 12. [Dérivés d'ordre supérieur]

La dérivée quatrième de la fonction $h(x) = \sin(x)e^x + 1$ en $x = \frac{\pi}{4}$ vaut

- ☒ $-2\sqrt{2}\,e^{\pi/4}$
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ 0
- ☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}e^{\pi/4}$

Solution: On a

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \cos(x)e^x + \sin(x)e^x = (\cos(x) + \sin(x))e^x \\
h''(x) &= (-\sin(x) + \cos(x))e^x + (\cos(x) + \sin(x))e^x = 2\cos(x)e^x \\
h'''(x) &= -2\sin(x)e^x + 2\cos(x)e^x = 2(\cos(x) - \sin(x))e^x \\
h^{(iv)}(x) &= 2(-\sin(x) - \cos(x))e^x + 2(\cos(x) - \sin(x))e^x = -4\sin(x)e^x
\end{aligned}$$

Ainsi pour $x = \pi/4$ on obtient $h^{(iv)}(\pi/4) = -4\sin(\pi/4)e^{\pi/4} = -2\sqrt{2}\,e^{\pi/4}$.

Exercice 13. [Intégrale définie]
L'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$$

vaut

- ☐ $\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $\dfrac{\pi}{6}$
- ☒ $\dfrac{\pi}{4}$
- ☐ $\dfrac{\pi}{8}$

Solution: La primitive de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin(x)$. Ainsi, en effectuant le changement de variable $z = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2/2}}\,dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz \\
&= \arcsin(z)\Big|_{z=0}^{z=1/\sqrt{2}} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 14. [Aire sous la courbe]
L'aire sous la courbe $f(x) = x^{\pi-e}$ entre les droites verticales $x = 0$ et $x = \ln(3)$ vaut

- ☐ $\ln^{\pi-e+1}(3)$
- ☒ $\dfrac{\ln^{\pi-e+1}(3)}{\pi-e+1}$
- ☐ $\dfrac{\pi-e-1}{\ln^{\pi-e+1}(3)}$
- ☐ $\ln(3)$

Solution: Nous devons calculer l'intégrale

$$\int_0^{\ln(3)} x^{\pi-e}\,dx = \frac{1}{\pi-e+1}x^{\pi-e+1}\Big|_{x=0}^{x=\ln(3)} = \frac{\ln^{\pi-e+1}(3)}{\pi-e+1}.$$

Exercice 15. [Intégrale indéfinie]

L'intégrale indéfinie $\int \frac{x^2}{\sqrt{7+x^3}}\,dx$ vaut

- ☒ $\frac{2\sqrt{7+x^3}}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $\frac{\sqrt{7+x^3}}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $-\frac{2\sqrt{7+x^3}}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $\frac{3\sqrt{7+x^3}}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

Solution: En effectuant le changement de variable $z = 7 + x^3$ on obtient $dz = 3x^2\,dx$ ainsi

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{7+x^3}}\,dx = \int \frac{1}{3\sqrt{z}}\,dz = \frac{2}{3}\sqrt{z} + C = \frac{2}{3}\sqrt{7+x^3} + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 16. [Primitive]

Une primitive de la fonction

$$\frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}$$

est

- ☒ $e^{\arctan(x)} - \frac{1}{x}$
- ☐ $e^{\arctan(x)} + \frac{1}{x}$
- ☐ $e^{\arctan(x)} + \ln(x)$
- ☐ $e^{\tan(x)} - \frac{1}{x}$

Solution: En dérivant $e^{\arctan(x)} = (\arctan(x))' e^{\arctan(x)} = \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan(x)}$, cela suggère le changement de variable $z = \arctan(x)$ dans le calcul de l'entier suivant

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\,dx &= \int \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \int e^z\,dz - \frac{1}{x} + C \\
&= e^z - \frac{1}{x} + C \\
&= e^{\arctan(x)} - \frac{1}{x} + C
\end{aligned}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.