Probabilités et Statistique : Formulaire

Linda Mhalla

1 Dénombrement

- Le **nombre de permutations** de n éléments est $n!$.
- Le **nombre d'arrangements** (en tenant compte de l'ordre) de k éléments parmi n est

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- Le **nombre de combinaisons** (sans tenir compte de l'ordre) de k éléments parmi n est

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2 Probabilités d'événements

Soit Ω l'ensemble fondamental.

- **Probabilité conditionnelle** de A sachant B (pour $A, B \subset \Omega$ et B tel que $\Pr(B) > 0$) :

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

- **Formule des probabilités totales :**
Soient $A \subset \Omega$ et $\{B_i\}_{i=1,\dots,n}$ une partition de Ω. On a

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A \mid B_i)\ \Pr(B_i).$$

- **Formule de Bayes :** Soient $A \subset \Omega$ et $\{B_i\}_{i=1,\dots,n}$ une partition de Ω. On a, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(A \mid B_i)\Pr(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \Pr(A \mid B_j)\Pr(B_j)}.$$

3 Valeurs caractéristiques

Soit X une variable aléatoire de fonction de masse (si discrète) ou fonction de densité (si continue) f_X. Soit Y une autre variable aléatoire.

- **Espérance :**

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \sum_i x_i f_X(x_i), & \text{si } X \text{ est discrète,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x, & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

- **Variance :**

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[\{X - \mathrm{E}(X)\}^2\right] = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2.$$

- **Covariance :**

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\left[\{X - \mathrm{E}(X)\}\{Y - \mathrm{E}(Y)\}\right] = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

- **Corrélation :**

$$\rho_{X,Y} = \rho(X, Y) = \mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

4 Quelques distributions et leurs propriétés

4.1 Distributions discrètes

Nom	**Paramètres**	$\Pr(X = k)$	E(X)	Var(X)
Bernoulli, $\mathcal{B}(p)$	$0 \leq p \leq 1$	$p^k(1-p)^{1-k}$, $k = 0, 1$	p	$p(1-p)$
Binomiale, $\mathcal{B}(m, p)$	$m \geq 1$, $0 \leq p \leq 1$	$\binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$, $k = 0, \ldots, m$	mp	$mp(1-p)$
Poisson, Poiss(λ)	$\lambda > 0$	$e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k = 0, 1, \ldots$	λ	λ

4.2 Distributions continues

- **Lois les plus connues :**

Nom	**Paramètres**	$f_X(x)$	E(X)	Var(X)
Uniforme, $U(a, b)$	$a < b$	$1/(b-a)$ si $x \in [a, b]$, 0 sinon	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Exponentielle, $\exp(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\lambda \exp(-\lambda x)$ si $x \geq 0$, 0 sinon	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Normale, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2

- **Loi du khi-deux :**
  Soient ν un entier strictement positif et $X_1, \ldots, X_\nu \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$. La variable aléatoire

$$U = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$$

  suit la loi du khi-deux à ν degrés de liberté. On note $U \sim \chi^2_\nu$.

- **Loi de Student t :**
  Soient ν un entier strictement positif, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $U \sim \chi^2_\nu$ indépendante de Z. La variable aléatoire

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}}$$

  suit la loi de Student t à ν degrés de liberté. On note $T \sim t_\nu$.

5 Théorèmes fondamentaux

- **Loi des petits nombres :**
  Soit $X \sim \mathcal{B}(m, p)$. Si m est grand et p est petit, on peut effectuer l'approximation $X \dot{\sim} \text{Poiss}(\lambda = mp)$.

- **Loi des grands nombres (LGN) :**
  Soient $X_1, \ldots, X_n$ iid d'espérance $\mu < \infty$, et soit

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

  Alors

$$\Pr\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X} = \mu\right) = 1.$$

- **Théorème central limite (TCL) :**
  Soient $X_1, \ldots, X_n$ iid telles que $\text{E}(X_i) = \mu < \infty$ et $0 < \text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, et soit

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \text{E}(\overline{X})}{\sqrt{\text{Var}(\overline{X})}} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\right).$$

  Alors, pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(Z_n \leq z) = \Phi(z),$$

  où Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

6 Estimation

- **Méthode des moments :**
  Si l'on souhaite estimer r paramètres, on résout le système de r équations formé par : moment théorique d'ordre k = moment empirique d'ordre k, pour $k = 1, \dots, r$.

- **Méthode du maximum de vraisemblance :**
  Soient $x_1, \dots, x_n$ des données supposées être une réalisation de $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} f(x; \theta)$. La vraisemblance pour θ est la fonction

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \times f(x_2; \theta) \times \cdots \times f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta).$$

  L'estimateur du maximum de vraisemblance, $\widehat{\theta}_{\text{ML}}$, est l'estimateur dont la réalisation maximise $L(\theta)$ ou, de manière équivalente, la log-vraisemblance $\ell(\theta) = \log L(\theta)$.

  Soit $\widehat{\theta}_{\text{ML}}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ pour un modèle "régulier". Alors, pour n grand,

$$\widehat{\theta}_{\text{ML}} \dot{\sim} \mathcal{N}\left(\theta, J(\widehat{\theta}_{\text{ML}})^{-1}\right),$$

  où $J(\theta) = -\mathrm{d}^2\ell(\theta)/\mathrm{d}\theta^2$ est appelée l'information observée pour θ.

7 Intervalles de confiance et tests

- Soient $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ inconnu et σ^2 connu. On a

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- Soient $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ et σ^2 inconnus, et

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}.$$

  On a

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

- **Test d'adéquation du khi-deux :**
  Supposons que l'on observe n valeurs tombant dans k classes disjointes. Soient $o_1, \dots, o_k$ (réalisations de variables aléatoires notées $O_1, \dots, O_k$) les fréquences observées dans chacune des classes et soient $E_1, \dots, E_k$ les fréquences théoriques correspondantes sous H_0. La statistique de test est

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}.$$

  Sous H_0, T suit approximativement (pour n grand) la distribution χ^2_r, où :

  - $r = k - 1$ si les E_i peuvent être calculés sans avoir à estimer de paramètres inconnus ;
  - $r = k - 1 - c$ si les E_i sont calculés après avoir estimé c paramètres.

- **Test d'indépendance du khi-deux :**
  Nous voulons tester chez des individus l'indépendance de deux caractéristiques : A (pouvant appartenir à h classes) et B (pouvant appartenir à k classes). La statistique de test T est similaire à celle utilisée pour le test d'adéquation du khi-deux. Soit N_{ij} le nombre de personnes se trouvant dans la classe i de la caractéristique A et dans la classe j de la caractéristique B, et soit E_{ij} la fréquence théorique correspondante. Les E_{ij} sont estimés en utilisant l'hypothèse H_0 d'indépendance entre les deux caractéristiques et en estimant les lois marginales (de A et de B) empiriquement à partir des observations. On utilise la statistique de test T définie par

$$T = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_{ij} - N_{i\cdot} N_{\cdot j}/n)^2}{N_{i\cdot} N_{\cdot j}/n},$$

où $N_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} N_{ij}$ et $N_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{h} N_{ij}$. Sous H_0, la statistique T suit approximativement (pour n grand) la loi $\chi^2_{(h-1)(k-1)}$.

8 Régression linéaire simple

Supposons que l'on dispose de n réalisations $Y_1, \ldots, Y_n$ de la variable de réponse Y et de n observations correspondantes, $x_1, \ldots, x_n$, de la covariable x. Nous considérons le modèle de régression linéaire simple avec erreur gaussienne, qui s'écrit

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Les estimateurs du maximum de vraisemblance (ou, de manière équivalente, des moindres carrés) de β_0 et β_1 sont

$$\widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{x} \quad \text{et} \quad \widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}.$$

La variable aléatoire $\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i$ est la valeur ajustée correspondant à (x_i, Y_i) et $R_i = Y_i - \widehat{Y}_i$ est le résidu associé à Y_i. Un estimateur sans biais de σ^2 est S^2, où

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} R_i^2}.$$

On a

$$\operatorname{Var}(\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}.$$

Ainsi, un estimateur sans-biais de la “standard error” de $\widehat{\beta}_1$ est

$$\widehat{\operatorname{sd}}(\widehat{\beta}_1) = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}}.$$

De plus, on a

$$T = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{\widehat{\operatorname{sd}}(\widehat{\beta}_1)} \sim t_{n-2}.$$

9 Tables

Dans les tables suivantes, les valeurs sont arrondies. Le nombre de chiffres significatifs après la virgule est fixe dans une même table.

- **Loi normale :**

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84850	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92786	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169

Table 1: Valeurs de la fonction de répartition ($\Phi(z)$) de la loi normale standard (centrée réduite) $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Table 2: Quantiles de la loi normale centrée réduite. La table donne les valeurs des quantiles z_p pour $p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995$. Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, la table contient donc les valeurs z_p telles que $\Pr(X \leq z_p) = p$.

- **Loi de Student :**

ν	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	ν	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	150	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Table 3: Quantiles de la loi de Student à ν degrés de liberté, t_ν. La table donne les valeurs des quantiles $t_{\nu,p}$ pour $p = 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995$. Si $X \sim t_\nu$, la table contient donc les valeurs $t_{\nu,p}$ telles que $\Pr(X \leq t_{\nu,p}) = p$.

ν	s_5	s_1	$s_{0.1}$	ν	s_5	s_1	$s_{0.1}$
1	12.706	63.657	636.619	21	2.080	2.831	3.819
2	4.303	9.925	31.599	22	2.074	2.819	3.792
3	3.182	5.841	12.924	23	2.069	2.807	3.768
4	2.776	4.604	8.610	24	2.064	2.797	3.745
5	2.571	4.032	6.869	25	2.060	2.787	3.725
6	2.447	3.707	5.959	26	2.056	2.779	3.707
7	2.365	3.499	5.408	27	2.052	2.771	3.690
8	2.306	3.355	5.041	28	2.048	2.763	3.674
9	2.262	3.250	4.781	29	2.045	2.756	3.659
10	2.228	3.169	4.587	30	2.042	2.750	3.646
11	2.201	3.106	4.437	32	2.037	2.738	3.622
12	2.179	3.055	4.318	34	2.032	2.728	3.601
13	2.160	3.012	4.221	36	2.028	2.719	3.582
14	2.145	2.977	4.140	38	2.024	2.712	3.566
15	2.131	2.947	4.073	40	2.021	2.704	3.551
16	2.120	2.921	4.015	50	2.009	2.678	3.496
17	2.110	2.898	3.965	100	1.984	2.626	3.390
18	2.101	2.878	3.922	150	1.976	2.609	3.357
19	2.093	2.861	3.883	200	1.972	2.601	3.340
20	2.086	2.845	3.850	∞	1.960	2.576	3.291

Table 4: Quantiles de la loi de Student à ν degrés de liberté, t_ν. Si $X \sim t_\nu$, la table fournit les valeurs $s_a(t_\nu)$ telles que $\Pr(|X| > s_a(t_\nu)) = a/100$, pour $a = 5, 1, 0.1$.

Lien entre les quantiles donnés par les Tables 3 et 4:

On a, pour toutes les valeurs de ν et pour $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001$,

$$t_{\nu,1-\alpha/2} = s_{100\times\alpha}(t_\nu).$$

- **Loi du khi-deux :**

r	0.90	0.95	0.99	r	0.90	0.95	0.99
1	2.706	3.841	6.635	19	27.204	30.144	36.191
2	4.605	5.991	9.210	20	28.412	31.410	37.566
3	6.251	7.815	11.345	21	29.615	32.671	38.932
4	7.779	9.488	13.277	22	30.813	33.924	40.289
5	9.236	11.070	15.086	23	32.007	35.172	41.638
6	10.645	12.592	16.812	24	33.196	36.415	42.980
7	12.017	14.067	18.475	25	34.382	37.652	44.314
8	13.362	15.507	20.090	26	35.563	38.885	45.642
9	14.684	16.919	21.666	27	36.741	40.113	46.963
10	15.987	18.307	23.209	28	37.916	41.337	48.278
11	17.275	19.675	24.725	29	39.087	42.557	49.588
12	18.549	21.026	26.217	30	40.256	43.773	50.892
13	19.812	22.362	27.688	32	42.585	46.194	53.486
14	21.064	23.685	29.141	34	44.903	48.602	56.061
15	22.307	24.996	30.578	36	47.212	50.998	58.619
16	23.542	26.296	32.000	38	49.513	53.384	61.162
17	24.769	27.587	33.409	40	51.805	55.758	63.691
18	25.989	28.869	34.805	50	63.167	67.505	76.154

Table 5: Quantiles de la loi du khi-deux à r degrés de liberté, χ^2_r. La table donne les valeurs des quantiles $\chi^2_{r,p}$ pour $p = 0.90, 0.95, 0.99$. Si $X \sim \chi^2_r$, la table contient donc les valeurs $\chi^2_{r,p}$ telles que $\Pr(X \leq \chi^2_{r,p}) = p$.

10 Sommes

10.1 Définition

En mathématiques, on a souvent affaire à des sommes composées de nombreux termes. Par exemple,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Plutôt que d'utiliser la notation ... qui est un peu ambiguë, les mathématiciens préfèrent utiliser la notation

$$\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

où:

- Le symbole $\sum$ représente une somme de plusieurs termes.
- Le symbole i représente un compteur. Il va commencer d'une valeur de départ, indiquée en bas du symbole $\sum$ (ici: 1) et suivre toutes les valeurs jusqu'à la valeur finale, indiquée en haut du symbole $\sum$ (ici: n).
- Le symbole x_i représente les éléments d'une suite de n valeurs. On va ajouter successivement les différents termes de la suite pour obtenir la somme désirée.

Pour ceux qui sont à l'aise en programmation informatique, la notation $\sum$ est l'équivalent d'une boucle "for".

10.2 Propriétés

Les propriétés principales du symbole $\sum$ sont:

- **Interaction avec l'addition et la multiplication**
  Pour tous réels a, b:
  $$\sum_{i=1}^{n} (a \times x_i + b) = a \times \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] + n \times b.$$
- **Changement de compteur**
  On a
  $$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}.$$
  Ici, $k = i - 1$ mais n'importe quelle transformation est possible.

11 Séries

11.1 Définition

Pour certaines suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes comportant un nombre fini de termes (dite suite des sommes partielles) définie par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge vers une limite quand $n \to \infty$. On appelle alors somme de la série de terme général x_n cette limite. La somme de la série se note avec ∞ en haut du symbole $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Etudier la série de terme général x_n signifie étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11.2 Propriétés

Quelques propriétés importantes des séries sont:

- **Interaction avec la multiplication**
  Pour tout réel a,
  $$\sum_{i=1}^{\infty}(a \times x_i) = a \times \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$
- **Extraction des premiers termes**
  $$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_1 + \sum_{i=2}^{\infty} x_i.$$
- **Série géométrique**
  Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| < 1$, on a
  $$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \frac{1}{1-\lambda},$$
  et (remarquez le changement du point de départ)
  $$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$
- **Série exponentielle**
  Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda).$$
  On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, "k-factorielle", noté $k!$, vaut
  $$k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 1,$$
  avec par convention $0! = 1$.

12 Intégrales

12.1 Définition

L'intégrale est l'équivalent d'une somme sur un espace continu. Pour calculer une intégrale (avec $a, b \in \mathbb{R}$)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

il faut connaître une primitive de la fonction $f(x)$, i.e., une autre fonction $F(x)$ dont la dérivée est $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Une fonction $f(x)$ peut admettre plusieurs primitives mais elles donnent toutes le même résultat pour la valeur d'une intégrale. Il vaut donc mieux choisir la primitive la plus simple.

Enfin, si $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existe, on définit

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

comme étant égale à cette limite.

12.2 Propriétés

- **Interaction avec l'addition et la multiplication**
  Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (c \times f(x) + d)\mathrm{d}x = c \times \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right) + (b-a) \times d.$$

- **Inversion de l'ordre des bornes**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

- Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- **Primitives classiques**

$$\begin{aligned} f(x) = x^k &\to F(x) = \tfrac{x^{k+1}}{k+1} \text{ pour tout } k \neq -1 \\ f(x) = \exp(\lambda x) &\to F(x) = \tfrac{\exp(\lambda x)}{\lambda} \text{ pour tout } \lambda \neq 0 \\ f(x) = \cos(x) &\to F(x) = \sin(x) \\ f(x) = \sin(x) &\to F(x) = -\cos(x). \end{aligned}$$

- **Intégration par parties**
  Pour toutes fonctions $u(x)$ et $v(x)$, on a

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

  Si on a $\lim_{x\to\pm\infty} u(x)v(x) = 0$, alors on peut prendre la limite de cette expression pour $a = -\infty$ et $b = \infty$, ce qui donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(x)v(x)d\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

- **Intégrales doubles**
  Soit f une fonction à deux variables. On a

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

  Il vous faut donc d'abord calculer l'intégrale simple $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$, ce qui va vous donner une fonction de x, que l'on note par exemple $g(x)$. Ainsi, on obtient

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

  Calculer une intégrale double revient donc simplement à calculer deux intégrales simples successives ! Ici, on a d'abord intégré par rapport à y puis par rapport à x mais on peut également faire l'inverse. En effet,

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y.$$

  Il vous faut donc d'abord calculer l'intégrale simple $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$, ce qui va vous donner une fonction de y, que l'on note par exemple $h(y)$. Ainsi, on obtient

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d h(y)\mathrm{d}y.$$

Selon le contexte, il peut être plus judicieux de d'abord intégrer par rapport à x puis par rapport à y ou l'inverse. Enfin, si la fonction f s'écrit comme le produit d'une fonction de x uniquement et d'une fonction de y uniquement, i.e., $f(x,y) = f_1(x) \times f_2(y)$, alors l'intégrale double correspond au produit des intégrales :

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y.$$