SÉRIE 8

Exercice 1. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et de variance σ^2, et soient $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\bar{X}_n = S_n/n$.

(a) Calculez $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathrm{Var}[S_n]$.

(b) Trouvez les constantes a_n et b_n telles que la variable aléatoire $Z_n = a_n\,(S_n - b_n)$ vérifie $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ et $\mathrm{Var}[Z_n] = 1$.

(c) Calculez $\mathbb{E}[\bar{X}_n]$ et $\mathrm{Var}[\bar{X}_n]$.

(d) Trouvez les constantes c_n et d_n telles que la variable aléatoire $Z_n = c_n\,(\bar{X}_n - d_n)$ vérifie $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ et $\mathrm{Var}[Z_n] = 1$. (Notez que ce Z_n est le même que le Z_n dans la partie (b).)

(e) Que pouvez-vous dire de la loi de X_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$?

(f) Que pouvez-vous dire de $\mathbb{P}(X_i \leq x)$ pour une constante $x \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$?

(g) Que pouvez-vous dire de la loi de Z_n si n est grand ?

(h) Que pouvez-vous dire de $\mathbb{P}(Z_n \leq x)$ pour une constante $x \in \mathbb{R}$ si n est grand ?

Exercice 2. On considère 100 lancers indépendants d'une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur face est $3/5$. Soient X_i, $i \in \{1, \dots, 100\}$, les variables aléatoires telles que $X_i = 1$ si on est tombé sur face au $i$ème jet et $X_i = 0$ sinon.

(a) Quelle est la loi de X_i pour $i \in \{1, \dots, 100\}$?

(b) Quelle est la loi de $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$?

(c) Calculez $\mathbb{P}(S_{100} \leq 60)$.

(d) Standardisez S_{100} de la même manière que dans l'exercice précédent et donnez la loi approximative de la variable standardisée.

(e) En utilisant le résultat de la partie (d) calculez $\mathbb{P}(S_{100} \leq 60)$ et comparez ce résultat approximatif avec le résultat exact obtenu dans la partie (c).

Exercice 3. Soit X le résultat du jet d'un dé équilibré.

(a) Trouvez $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.

(b) On lance 100 dés équilibrés de façon indépendante. Calculez approximativement la probabilité que la somme des 100 résultats soit comprise entre 340 et 360.

Exercice 4. On suppose que le nombre de clients entrant dans un magasin un jour donné est une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 12$, et on suppose que le nombre de clients pour des jours différents est indépendant.

(a) Approximez la probabilité qu'il y ait au moins 250 entrées durant un mois de 22 jours ouvrables.

(b) Combien de jours le magasin devra-t-il ouvrir ses portes pour être sûr à 97.5 % d'accueillir au moins 250 clients ?

Exercice 5. Un camion doit livrer des colis dont le poids est supposé être une variable aléatoire de moyenne 50 kg et d'écart-type 5 kg.

(a) Calculer approximativement la probabilité que le poids total de 40 de ces colis ne dépasse pas 2.05 tonnes.

(b) Combien de colis peut transporter le camion si l'on veut que la charge totale ne dépasse 2 tonnes qu'avec une probabilité approximative de 0.04 ?

(c) Il faut livrer 50 colis. Quelle doit être la capacité de charge du camion si l'on veut que la charge ne dépasse la capacité qu'avec une probabilité approximative de 0.02 ?