SÉRIE 7

Exercice 1. Calculez l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

(a) $X \sim \mathcal{B}(p)$,

(b) Y avec la densité $f(y) = 5\, y^4$ si $y \in (0,1)$, et $f(y) = 0$ sinon,

(c) Z avec la fonction de fréquences donnée par

z_i	1	2	3	4	5	6
$f(z_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

,

(d) W avec la fonction de répartition $F(w) = 1 - \frac{1}{w^4}$ si $w \geq 1$, et $F(w) = 0$ sinon.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire avec la densité $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ sinon. Reconnaissez-vous cette loi ? En supposant que $\lambda > 2$, calculez $\mathbb{E}[\mathrm{e}^X]$ et $\mathrm{Var}[\mathrm{e}^X]$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire avec la fonction de fréquences donnée par $f(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^k / k!$ pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Reconnaissez-vous cette loi ? Calculez $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X(X-1)]$. En utilisant ces deux valeurs, calculez $\mathrm{Var}[X]$.

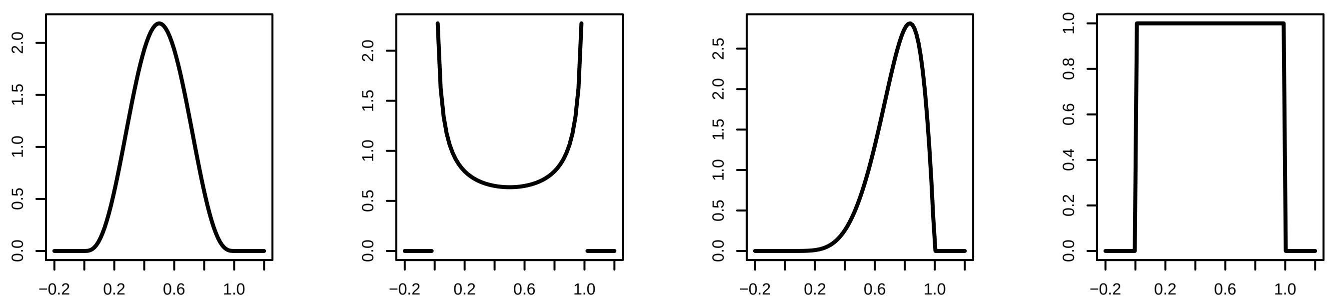
Exercice 4. La loi $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ est une loi continue avec la densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & \text{si } x \in (0,1), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où Γ est la fonction gamma. Dans le cas où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que pour une variable aléatoire $X \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$, on a $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $\mathrm{Var}[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$. Liez les densités ci-dessous avec les lois $\mathrm{Beta}(0.5, 0.5)$, $\mathrm{Beta}(1,1)$, $\mathrm{Beta}(4,4)$, et $\mathrm{Beta}(6,2)$.



Exercice 5. On considère le jet de deux dés indépendants. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre sur le dé ayant la plus grande valeur, et soit Y le nombre de 5 ou de 6 obtenus. Il est facile de vérifier que les lois de X et Y sont données par

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

et

y_i	0	1	2
$f(y_i)$	16/36	16/36	4/36

.

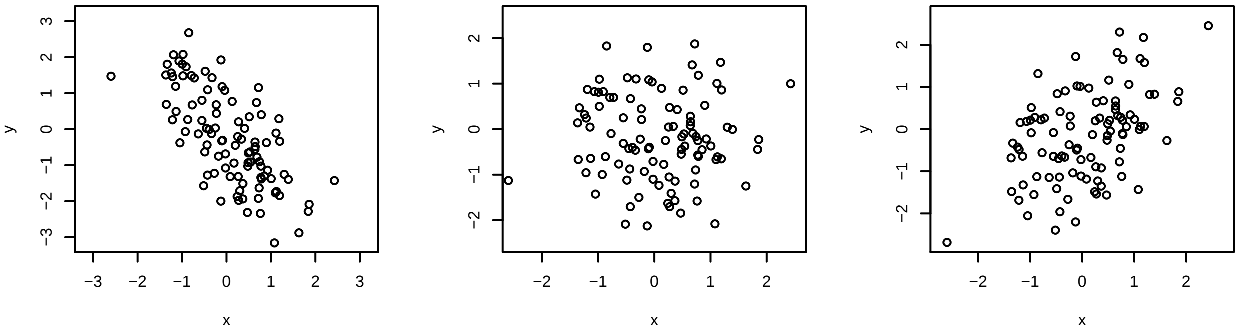
(a) Calculez la loi conjointe de X et Y. Vérifiez qu'il s'agit bien d'une loi conjointe et qu'elle donne les bonnes lois marginales.

(b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(c) Calculez la loi de X sachant $Y = 1$.

(d) Calculez $\text{cov}(X, Y)$.

Exercice 6. Considérons les variables aléatoires X et Y telles que $\text{corr}(X, Y) = r$. On observe quelques réalisations de (X, Y) et on dessine le scatterplot des valeurs observées. Liez les scatterplots suivants avec les situations $r = 0$, $r = 0.5$, $r = -0.7$.



Exercice 7. On définit trois variables aléatoires indépendantes Y_1, Y_2, Y_3 telles que $\mathbb{E}[Y_i] = i$ et $\text{Var}[Y_i] = i$ pour $i = 1, 2, 3$. Soient $Z_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + 2Y_2)$, $Z_2 = \frac{1}{2}(Y_2 - Y_3)$, et $Z_3 = \frac{1}{3}(Y_1 + Y_2 + Y_3)$. Trouvez l'espérance et la variance de Z_i pour $i = 1, 2, 3$, et calculez leur corrélation.

Exercice 8. Une entreprise met en boîte des mélanges pour apéritifs. Ces mélanges contiennent des amandes, des noix de cajou et des cacahuètes. Le poids net de la boîte est exactement 1 kg, mais la proportion de chacun des ingrédients est aléatoire. Puisque la somme des trois poids donne 1, la loi conjointe de deux des trois poids fournit toute l'information sur le contenu. Soit X le poids des amandes et Y celui des noix de cajou. On suppose que la loi conjointe de X et Y est donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} 24\,xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{ et } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Vérifiez que f est bien une densité.

(b) Calculez les lois marginales de X et de Y.

(c) X et Y sont-elles indépendantes ? Justifiez de deux manières différentes.

(d) Calculez $\mathbb{P}(X < Y)$.

(e) Calculez $\mathbb{P}(X < 1/3 \,|\, Y > 1/2)$.

(f) Calculez la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$.

(g) Calculez $\text{cov}(X, Y)$.