Série 3

NB : les exercices avec une étoile sont plus difficiles.

Exercice 1. Un étudiant suit un cours d'analyse et un cours de statistique. La probabilité de réussir l'examen d'analyse est de 0.5, tandis que celle de réussir l'examen de statistique est de 0.7. La probabilité de réussir les deux examens est de 0.3.

(a) Calculez la probabilité de réussir au moins un des deux cours.

(b) Calculez la probabilité d'échouer aux deux cours.

(c) Calculez la probabilité d'échouer en statistique et de réussir en analyse.

(d) Calculez la probabilité d'échouer en analyse et de réussir en statistique.

Exercice 2. On lance une pièce de monnaie équilibrée à deux reprises, et ce, de façon indépendante et on observe le résultat des deux lancers.

(a) Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur pile au premier lancer ? Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur pile au premier lancer et sur face au deuxième ?

(b) Quelle expérience aléatoire considérons-nous dans cet exercice ?

(c) Quel est l'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience ?

(d) Donnez un exemple d'événement élémentaire associé à cette expérience. Donnez un exemple d'événement associé à cette expérience.

(e) Comment interpréter l'expression "pièce équilibrée lancée de façon indépendante" en termes de probabilité sur chacun des événements élémentaires ?

(f) Calculez les deux probabilités en (a) en utilisant l'ensemble fondamental Ω et les événements appropriés.

Exercice 3. On dispose d'un jeu de 32 cartes (8 cartes de chaque couleur ; 4 dames au total). On tire 4 cartes au hasard.

(a) Quelle expérience aléatoire considérons-nous dans cet exercice ?

(b) Quel est l'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience ? (Donnez quelques exemples d'événements élémentaires et décrivez le reste.)

(c) Comment définissez-vous la probabilité sur Ω ?

(d) En utilisant votre définition, calculez

   (i) la probabilité d'obtenir 4 dames ;

   (ii) la probabilité d'obtenir exactement 2 dames ;

   (iii) la probabilité d'obtenir au moins 2 dames ;

   (iv) la probabilité d'obtenir 4 cartes d'une même couleur.

Exercice 4. On jette deux dés équilibrés. Considérons les événements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \text{obtenir un chiffre impair sur le premier dé,} \\ B &= \text{obtenir un chiffre pair sur le deuxième dé,} \\ C &= \text{la somme des deux chiffres est un chiffre impair.} \end{aligned}$$

(a) Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?

(b) Est-ce que les événements A et C sont indépendants ?

(c) Est-ce que les événements A, B et C sont indépendants ?

Exercice 5. On jette deux dés équilibrés. Si la somme des deux chiffres vaut 8, quelle est la probabilité d'avoir lancé un 6 ?

Exercice 6. On estime que 10 % d'une population donnée est atteinte d'une certaine maladie. On dispose d'un test afin de vérifier si une personne est atteinte ou pas par la maladie, le test fonctionne comme suit :

— si une personne est malade, le test fonctionne (i.e. il détecte la maladie) avec une probabilité de 0.9 ;

— si une personne est saine, le test ne fonctionne pas (i.e. cette personne est déclarée malade alors qu'elle ne l'est pas) avec une probabilité de 0.2.

(a) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit déclarée malade par le test ?

(b) Quelle est la probabilité qu'une personne détectée comme malade le soit effectivement ?

Exercice 7. * Julie laisse habituellement la clé de sa voiture dans une poche du manteau qu'elle porte en conduisant. Elle a trois manteaux et quand elle a besoin de sa clé, elle ne se souvient plus de quel manteau elle a porté la dernière fois qu'elle a conduit. Elle cherche donc sa clé à chaque fois qu'elle doit prendre sa voiture. De plus elle est souvent en retard, il lui arrive donc de ne pas trouver sa clé même lorsqu'elle cherche dans la bonne poche, car elle ne prend pas le temps de bien regarder.

Aujourd'hui elle pense avoir laissé la clé dans le manteau court avec une probabilité p_c, dans le manteau long avec une probabilité p_l, et dans la veste trench avec la probabilité p_v. Si la clé est dans le manteau court, elle la retrouve pendant la recherche dans ses poches avec une probabilité de α_c. Pour le manteau long, cette probabilité est de α_l, et pour la veste trench elle est de α_v.

Elle a déjà cherché dans le manteau court et elle n'a rien trouvé. Quelle est la probabilité que la clé s'y trouve quand même ?

Exercice 8. * Alice, Benoît et Céline lancent une pièce de monnaie à tour de rôle jusqu'à l'apparition du premier pile. La personne qui obtient pile en premier gagne. Qui a la plus grande probabilité de gagner ?

Exercice 9. * Un mathématicien oublie son parapluie dans un magasin avec une probabilité de 1/4. Aujourd'hui il a pris son parapluie pour faire ses courses, et il a été dans 4 magasins différents. Sachant qu'il est rentré chez lui sans le parapluie, quelle est la probabilité qu'il l'ait oublié dans le dernier magasin ?

Formulaire

(i). Le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

(ii). Le nombre d'arrangements (i.e. en tenant compte de l'ordre) de k éléments parmi n est de : $\frac{n!}{(n-k)!}$. Par exemple, le nombre d'arrangements de 2 boules parmi les 4 boules B_1, B_2, B_3, B_4 est de $\frac{4!}{2!} = 12$, i.e.

$$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_1, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_1, B_3B_2, B_3B_4, B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3.$$

(iii). Le nombre de combinaisons (i.e. sans tenir compte de l'ordre) de k éléments parmi n est de : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Par exemple, le nombre de combinaisons de 2 boules parmi les 4 boules B_1, B_2, B_3, B_4 est de $\frac{4!}{2!2!} = 6$, i.e.

$$B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_2B_3, B_2B_4, B_3B_4.$$

(iv). Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.