SÉRIE 14

Exercice 1. Un dé A a quatre faces rouges et deux noires, tandis qu'un dé B en a deux rouges et quatre noires. Une pièce équilibrée est lancée une fois. Si elle tombe sur pile, on ne joue qu'avec le dé A, tandis que si c'est face, on ne joue qu'avec le dé B.

(i). Montrer que la probabilité qu'une face rouge apparaisse au premier jet de dé est 1/2.

(ii). Si les deux premiers jets de dé donnent rouge, quelle est la probabilité que le troisième soit rouge ?

(iii). Si au moins un des deux premiers jets donne rouge, quelle est la probabilité que le troisième donne rouge ?

(iv). Si les deux premiers jets donnent rouge, quelle est la probabilité que l'on soit en train d'utiliser le dé A ?

(v). Si au moins un des deux premiers jets donne rouge, quelle est la probabilité que l'on soit en train d'utiliser le dé A ?

(vi). Les résultats du premier jet et du deuxième jet sont-ils indépendants ? Justifiez.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{\alpha+1}} & \text{pour } x > 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où c est une constante et $\alpha > 0$ est un paramètre.

(i). Trouver la valeur de c.

(ii). Trouver la fonction de répartition $F_X(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

(iii). Trouver la probabilité conditionnelle $\Pr(X > bz | X > z)$ où $b > 0$ et $z > 1$.

(iv). Calculer l'espérance de X (séparément pour $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$).

(v). Supposer que $\alpha > 2$ et calculer la variance de X.

Exercice 3. Soient X et Z deux variables aléatoires continues ayant pour fonction de densité conjointe

$$f_{X,Z}(x,z) = \begin{cases} \frac{x+z-1}{c} & \text{si } x+z > 1, x < 1, z \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où c est une constante.

(i). Déterminer la constante c.

(ii). Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

(iii). Trouver la densité marginale $f_X(x)$ de X (pour tout $x \in \mathbb{R}$) et la densité marginale $f_Z(z)$ de Z (pour tout $z \in \mathbb{R}$).

(iv). Calculer $\mathrm{Cov}(X, Z)$

(v). Trouver la fonction de répartition conjointe $F_{X,Z}(x,z)$ (pour tout $x, z \in \mathbb{R}$).

(vi). Trouver la fonction de répartition marginale $F_X(x)$ de X (pour tout $x \in \mathbb{R}$) et la fonction de répartition marginale $F_Z(z)$ de Z (pour tout $z \in \mathbb{R}$).

(vii). Trouver la probabilité conditionnelle $\Pr(X \leq 3/4 | Z \leq 3/4)$.

(viii). Trouver la densité conditionnelle $f_{Z|X}(z|x)$ (pour tout $x, z \in \mathbb{R}$).

Exercice 4. Soit $X_1, \ldots, X_{100}$ un échantillon de la distribution ayant pour densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & \text{pour } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Approximer la probabilité $\Pr(-5 \leq X_1 + \cdots + X_{100} \leq 5)$.

(b) Trouver la valeur x telle que la probabilité approximative que la somme de $X_1, \ldots, X_{100}$ dépasse x égale 0.1.

Exercice 5. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon ayant pour distribution celle de l'Exercice 2.

(i). Ecrire la fonction de vraisemblance du paramètre α et utiliser la afin de trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\alpha}_{ML}$ de α.

(ii). Trouver la loi approximative (asymptotique) de l'estimateur $\hat{\alpha}_{ML}$ quand n est grand.

(iii). Construire un intervalle de confiance au niveau approximatif 95% pour α.

(iv). Supposer que $\alpha > 1$ et trouver l'estimateur $\hat{\alpha}_{MOM}$ basé sur la méthode des moments.

Exercice 6. Un contrôle de contenu d'alcool a été effectué sur 183 bouteilles d'une boisson alcoolique dont le contenu d'alcool déclaré sur la vignette est de 38%. Nous supposons que le contenu d'une bouteille suit la loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 inconnues. Le contenu en alcool moyen (empirique) de ces bouteilles est de 37.87% et la variance empirique est de 2.5×10^{-5}.

(a) Peut-on dire que le vrai contenu d'alcool moyen, μ, est différent de la valeur déclarée ? Tester au niveau $\alpha = 1\%$.

(b) Trouver un intervalle de confiance pour le contenu d'alcool moyen au niveau 99%.

Exercice 7. (Cantoni et al. (2009, ex. 8.40)). Un nouveau jeu consiste à jeter 3 dés indépendants. Le gain est directement proportionnel au nombre de six obtenus lors d'un lancer. Un joueur a joué le jeu 100 fois et a obtenu les résultats suivants :

Nombre de six	0	1	2	3
Fréquence observée	48	34	15	3

On souhaite vérifier si les dés ne sont pas truqués. Que peut-on conclure (utiliser un test adéquat...) ?

Référence

Cantoni, E., Huber, P. et Ronchetti, E. (2009). *Maîtriser l'aléatoire : Exercices résolus de probabilités et statistique.* Collection Statistique et probabilité appliquée. Springer.