SÉRIE 10

Exercice 1. Rappelez-vous les Exercices 4 et 5 de la série précédente. Vous voulez de nouveau estimer le numéro de plaque le plus élevé dans le canton à l'aide des numéros que vous avez relevés au parking de l'EPFL.

Vous utilisez le modèle avec un échantillon i.i.d. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, d'une distribution uniforme $\mathrm{U}[0, \theta]$, $\theta > 0$. Dans la série précédente vous avez proposé deux estimateurs différents et montré que l'estimateur du maximum de vraisemblance est $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Maintenant vous voulez estimer θ à l'aide d'un intervalle de confiance à 95 %.

(a) Montrez que l'intervalle $I_n = (M_n,\ 0.05^{-1/n} \times M_n)$ est un intervalle de confiance à 95 % pour θ.

(b) Quelle est la longueur D_n de I_n ? Trouvez $\mathbb{E}[D_n]$, l'espérance de D_n. Calculez la limite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[D_n]$ et commentez le résultat.

(c) Calculez l'intervalle I_n pour les données de l'exercice 4 de la série précédente.

Pour gagner du temps, vous pouvez utiliser les résultats concernant M_n obtenus dans la série précédente.

Exercice 2. Une entreprise d'automobiles veut publier des informations sur la consommation d'un nouveau modèle de voiture. Pour 12 voitures de ce modèle on mesure la consommation d'essence, en litres, pour parcourir 100 km, et on obtient les résultats suivants :

$$14.60, 11.21, 11.56, 11.37, 13.68, 15.07, 11.06, 16.58, 13.37, 15.98, 12.07, 13.22.$$

(a) Supposez que la consommation d'essence pour une voiture de ce modèle est une variable aléatoire $X \sim \mathrm{N}(\mu, 3.5)$ avec μ inconnu, et que les données récoltées sont indépendantes. Donnez un intervalle de confiance à 95 % pour μ (la moyenne empirique de l'échantillon est $\bar{x} = 13.31$).

On va maintenant abandonner l'hypothèse de variance connue (ce qui est plus réaliste). On considère toujours un modèle normal, mais cette fois on suppose que $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ^2 inconnus. Les données récoltées sont toujours considérées indépendantes.

(b) Donnez un intervalle de confiance à 95 % pour μ (la variance empirique de l'échantillon est $\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2 = 3.69$).

(c) Donnez un intervalle de confiance à 90 % pour μ. Commentez la différence avec la partie (b).
Le seuil à utiliser est : $s_{10} = 1.796$ pour $\nu = 11$.

(d) Que l'entreprise peut-elle faire pour obtenir un intervalle de confiance à 95 % plus étroit que celui obtenu dans la partie (b) ?

Exercice 3. Un contrôle de qualité est effectué sur la production de pailles d'une usine. Les pailles produites dans cette usine sont vendues dans des paquets de 100 pièces, et on voudrait estimer le pourcentage de pièces défectueuses dans un paquet.

On prélève 18 paquets aléatoirement et on compte le nombre de pièces défectueuses dans chaque paquet. Soit Y_i le nombre de pièces défectueuses dans le $i^{\text{ième}}$ paquet. On a observé les résultats suivants :

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}	y_{18}
0	1	1	1	1	1	0	1	2	1	0	1	1	2	0	0	0	2

(a) Proposez un modèle statistique pour résoudre ce problème d'estimation.

(b) Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le pourcentage cherché.

(c) Donnez un intervalle de confiance approximatif à 95 % pour le pourcentage cherché, basé sur l'approximation de la distribution de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour un échantillon de grande taille.