CORRIGÉ 8

Exercice 1. (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = n\,\mu,\\ \operatorname{Var}[S_n] &= \operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}[X_i] = n\,\sigma^2.\end{aligned}$$

(b) Avec $b_n = n\mu$ et $a_n = 1/(\sqrt{n}\sigma)$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right] = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] - n\mu\right) = 0,\\ \operatorname{Var}[Z_n] &= \operatorname{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right] = \frac{1}{n\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}[X_i]\right) = 1.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\bar{X}_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \mu,\\ \operatorname{Var}[\bar{X}_n] &= \operatorname{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}[X_i] = \frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

(d) Avec $d_n = \mu$ et $c_n = \sqrt{n}/\sigma$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_n] &= \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\big(\mathbb{E}[\bar{X}_n] - \mu\big) = 0,\\ \operatorname{Var}[Z_n] &= \operatorname{Var}\left[\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right] = \frac{n}{\sigma^2}\operatorname{Var}[\bar{X}_n] = 1.\end{aligned}$$

(e) On ne connaît la loi d'aucune des X_i. Même si on connait $\mathbb{E}[X_i]$ et $\operatorname{Var}[X_i]$, ce n'est pas assez pour déterminer la loi de X_i.

(f) Puisqu'on ne connaît pas la loi de X_i, on ne sait pas quelle est la probabilité $\mathbb{P}(X_i \le x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(g) Par le théorème central limite, la limite de la distribution de Z_n si $n \to \infty$ est $\mathrm{N}(0,1)$. Donc pour n grand, la distribution de Z_n est approximativement $\mathrm{N}(0,1)$.

(h) D'après la partie (g), on a $\mathbb{P}(Z_n \le x) \approx \Phi(x)$, où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi $\mathrm{N}(0,1)$. Cela montre la grande puissance du théorème central limite et le rôle central de la loi $\mathrm{N}(0,1)$.

Exercice 2. (a) $X_i \sim \mathcal{B}(3/5)$ pour $i \in \{1,\dots,100\}$.

(b) $S_{100} \sim \mathcal{B}(100, 3/5)$.

(c)

$$\mathbb{P}(S_{100} \leq 60) = \sum_{i=0}^{60} \binom{100}{i} \left(\frac{3}{5}\right)^i \left(\frac{2}{5}\right)^{100-i} = 0.538.$$

(d) On calcule d'abord $\mathbb{E}[X_i] = 3/5$ et $\mathrm{Var}[X_i] = 3/5 \times 2/5 = 6/25$. La variable standardisée est

$$Z_{100} = \frac{S_{100} - 100 \times 3/5}{\sqrt{100 \times 6/25}} = \frac{S_{100} - 60}{\sqrt{24}}.$$

D'après le théorème central limite, la loi approximative de Z_{100} est $\mathrm{N}(0,1)$.

(e) En utilisant la loi approximative de Z_{100} on obtient

$$\mathbb{P}(S_{100} \leq 60) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{100} - 60}{\sqrt{24}} \leq \frac{60 - 60}{\sqrt{24}}\right) \approx \Phi(0) = 0.5,$$

ce qui est proche du résultat exact obtenu dans la partie (c).

Exercice 3. (a) La loi de X est donnée par la fonction de fréquences

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

.

On a donc $\mathbb{E}[X] = 7/2$ et $\mathrm{Var}[X] = 35/12$.

(b) Maintenant soit X_i le résultat du $i$ème dé, et $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ la somme des 100 résultats. On cherche $\mathbb{P}(340 \leq S_{100} \leq 360)$. Par le théorème central limite, on sait que la variable standardisée

$$Z_{100} = \frac{S_{100} - 100 \times 7/2}{\sqrt{100 \times 35/12}} = \frac{S_{100} - 350}{\sqrt{875/3}}$$

suit approximativement la loi $\mathrm{N}(0,1)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(340 \leq S_{100} \leq 360) &= \mathbb{P}\left(\frac{340 - 350}{\sqrt{875/3}} \leq \frac{S_{100} - 350}{\sqrt{875/3}} \leq \frac{360 - 350}{\sqrt{875/3}}\right) \\
&\approx \Phi(\sqrt{12/35}) - \Phi(-\sqrt{12/35}) \\
&= 2\Phi(\sqrt{12/35}) - 1 = 0.44.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit X_i le nombre de clients qui entrent le $i$ème jour. On a $\mathbb{E}[X_i] = 12$ et $\mathrm{Var}[X_i] = 12$. Le nombre total de clients entrants n jours est $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Par le théorème central limite, on sait que la variable standardisée

$$Z_n = \frac{S_n - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}}$$

suit approximativement la loi $\mathrm{N}(0,1)$ pour n grand.

(a) Avec $n = 22$ nous pouvons calculer

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{22} \geq 250) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_{22} - 22 \times 12}{\sqrt{22 \times 12}} \geq \frac{250 - 22 \times 12}{\sqrt{22 \times 12}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{250 - 22 \times 12}{\sqrt{22 \times 12}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{14}{\sqrt{264}}\right) = \Phi(0.862) = 0.805.
\end{aligned}$$

(b) Maintenant on cherche n tel que $\mathbb{P}(S_n \geq 250) = 0.975$. On veut donc que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S_n \geq 250) = 0.975 \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}} \geq \frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}}\right) = 0.975 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - \Phi\left(\frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}}\right) = 0.975 \\
\Leftrightarrow \quad & \Phi\left(\frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}}\right) = 0.025 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}} = \Phi^{-1}(0.025) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}} = -\Phi^{-1}(0.975) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}} = -1.96 \\
\Leftrightarrow \quad & -n \times 12 + 1.96\sqrt{12}\sqrt{n} + 250 = 0.
\end{aligned}$$

Cela est vrai pour

$$\sqrt{n} = \frac{-1.96\sqrt{12} \pm \sqrt{1.96^2 \times 12 + 4 \times 12 \times 250}}{-2 \times 12} = \begin{cases} 4.86 \\ -4.29 \end{cases}.$$

Puisque $\sqrt{n} \geq 0$, on obtient que $\sqrt{n} = 4.86$ et $n = 23.6$. Si le magasin ouvre ses portes pendant au moins 24 jours, il reçoit au moins 250 clients avec une probabilité plus grande que 0.975.

Exercice 5. Soit X_i le poids du i-ème colis, avec $\mathbb{E}[X_i] = 50$ et $\mathrm{Var}[X_i] = 25$. Le poids total de n colis est donc $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. D'après le théorème central limite, on a que

$$Z_n = \frac{S_n - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5}$$

suit approximativement la loi $\mathrm{N}(0,1)$ pour n grand.

(a) On cherche

$$\mathbb{P}(S_{40} \leq 2050) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{40} - 40 \times 50}{\sqrt{40} \times 5} \leq \frac{2050 - 40 \times 50}{\sqrt{40} \times 5}\right) \approx \Phi(1.581) = 0.9429.$$

(b) On cherche n tel que $\mathbb{P}(S_n > 2000) = 0.04$, c'est à dire que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5} > \frac{2000 - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5}\right) = 0.04 \\
\Leftrightarrow \quad & \Phi\left(\frac{2000 - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5}\right) = 0.96 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2000 - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5} = \Phi^{-1}(0.96) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2000 - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5} = 1.755.
\end{aligned}$$

On en déduit $n = 38.9$, donc le camion ne peut transporter plus de 38 colis.

(c) On cherche x tel que $\mathbb{P}(S_{50} > x) = 0.02$, c'est-à-dire que

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\frac{S_{50} - 50 \times 50}{\sqrt{50} \times 5} > \frac{x - 50 \times 50}{\sqrt{50} \times 5}\right) = 0.02 \\
\Leftrightarrow \quad & \Phi\left(\frac{x - 2500}{\sqrt{2} \times 25}\right) = 0.98 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x - 2500}{\sqrt{2} \times 25} = \Phi^{-1}(0.98) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x - 2500}{\sqrt{2} \times 25} = 2.06 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 2573 \text{ kg.}
\end{aligned}
$$