Corrigé 7

Exercice 1. (a) Il s'agit d'une variable discrète, et pour une variable discrète on a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_i} \big(x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i)\big),$$

où les x_i sont toutes les valeurs que X peut prendre. Une variable Bernoulli peut prendre les valeurs 0 et 1, et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ tandis que $\mathbb{P}(X = 1) = p$. On obtient donc

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Pour calculer la variance on utilise la formule

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Pour une variable discrète on a

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x_i} \big(x_i^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i)\big),$$

donc

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p, \quad \text{et } \mathrm{Var}[X] = p - p^2 = p(1 - p).$$

(b) Il s'agit d'une variable continue, et pour une variable continue on a

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f(y)\,\mathrm{d}y,$$

où f est la densité de Y. Ici

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 5\,y^5\,\mathrm{d}y = \left[\frac{5}{6}\,y^6\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Pour calculer la variance on utilise la formule

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2.$$

Pour une variable continue on a

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 \cdot f(y)\,\mathrm{d}y,$$

donc

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 5\,y^6\,\mathrm{d}y = \left[\frac{5}{7}\,y^7\right]_0^1 = \frac{5}{7}, \quad \text{et } \mathrm{Var}[Y] = \frac{5}{7} - \frac{25}{36} = \frac{5}{252}.$$

(c) Il s'agit d'une variable discrète, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sum_{z_i} z_i \cdot \mathbb{P}(Z = z_i) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2},\\
\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{z_i} z_i^2 \cdot \mathbb{P}(Z = z_i) = \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 6}{6} = \frac{91}{6},\\
\mathrm{Var}[Z] &= \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.
\end{aligned}$$

(d) Il s'agit d'une variable continue de densité $f(w) = F'(w) = 4\,w^{-5}$ si $w > 1$, et $f(w) = 0$ sinon. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W] &= \int_{\mathbb{R}} w \cdot f(w)\,\mathrm{d}w = \int_1^\infty 4\,w^{-4}\,\mathrm{d}w = \left[-\frac{4}{3}\,w^{-3}\right]_1^\infty = \frac{4}{3},\\
\mathbb{E}[W^2] &= \int_{\mathbb{R}} w^2 \cdot f(w)\,\mathrm{d}w = \int_1^\infty 4\,w^{-3}\,\mathrm{d}w = \left[-\frac{4}{2}\,w^{-2}\right]_1^\infty = 2,\\
\mathrm{Var}[W] &= \mathbb{E}[W^2] - (\mathbb{E}[W])^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. X est une variable exponentielle. Il s'agit d'une variable continue, et pour une variable continue on a

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $f(x)$ est la densité de X et $g(x)$ est une fonction. En utilisant le fait que $\lambda > 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{e}^X] &= \int_0^\infty e^{x} \cdot \lambda\,e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_0^\infty e^{-(\lambda-1)\,x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\lambda}{\lambda-1} e^{-(\lambda-1)\,x}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda-1},\\
\mathbb{E}\big[\left(\mathrm{e}^X\right)^2\big] &= \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{2X}\big] = \int_0^\infty e^{2x} \cdot \lambda\,e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_0^\infty e^{-(\lambda-2)\,x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\lambda}{\lambda-2} e^{-(\lambda-2)\,x}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda-2},\\
\mathrm{Var}[\mathrm{e}^X] &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^X\right)^2 - \left(\mathbb{E}\mathrm{e}^X\right)^2 = \frac{\lambda}{\lambda-2} - \frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. X est une variable Poisson. Il s'agit d'une variable discrète, et pour une variable discrète on a

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i} g(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i),$$

où les x_i sont toutes les valeurs que X peut prendre et $g(x)$ est une fonction.

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^\infty k \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda \sum_{l=0}^\infty \frac{\lambda^l}{l!} = \lambda,\\
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^\infty k(k-1) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=2}^\infty \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^2 \sum_{k=2}^\infty \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^2 \sum_{l=0}^\infty \frac{\lambda^l}{l!} = \lambda^2,\\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Les densités sont dans l'ordre : Beta(4, 4), Beta(0.5, 0.5), Beta(6, 2), et Beta(1, 1).

Exercice 5. (a) La loi conjointe est

		X					
		1	2	3	4	5	6
	0	1/36	3/36	5/36	7/36	0	0
Y	1	0	0	0	0	8/36	8/36
	2	0	0	0	0	1/36	3/36

Toutes les probabilités sont entre 0 et 1, et en les sommant on obtient 1. Il s'agit bien d'une loi conjointe.

En sommant les probabilités dans chacune des lignes du tableau on obtient la loi marginale de Y, et en sommant dans les colonnes on obtient la loi marginale de X.

(b) Non. Pour qu'elles le soient, il faut que $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\,\mathbb{P}(Y = y_j)$ pour chaque i, j. Or $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1)$.

(c) D'après la définition,

$$\mathbb{P}(X = x_i \,|\, Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i,\, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)}.$$

On obtient la loi conditionnelle

x_i	5	6
$f(x_i \,\|\, 1)$	1/2	1/2

.

(d) D'après la définition

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= 0 \times \frac{1+3+5+7}{36} + 1 \times 5 \times \frac{8}{36} + 1 \times 6 \times \frac{8}{36} + 2 \times 5 \times \frac{1}{36} + 2 \times 6 \times \frac{3}{36} = \frac{134}{36}, \\
\mathbb{E}[X] &= 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36}, \\
\mathbb{E}[Y] &= 0 \times \frac{16}{36} + 1 \times \frac{16}{36} + 2 \times \frac{4}{36} = \frac{24}{36}, \\
\mathrm{cov}(X, Y) &= \frac{4824 - 161 \times 24}{1296} = \frac{20}{27}.
\end{aligned}$$

Exercice 6. Les scatterplots sont (dans l'ordre) : $r = -0.7$, $r = 0$, $r = 0.5$.

Exercice 7. En utilisant la linéarité de l'espérance, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_1] &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[Y_1] + 2\mathbb{E}[Y_2]\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}, \\
\mathbb{E}[Z_2] &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[Y_2] - \mathbb{E}[Y_3]\right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}, \\
\mathbb{E}[Z_3] &= \frac{1}{3}\left(\mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] + \mathbb{E}[Y_3]\right) = \frac{1+2+3}{3} = 2.
\end{aligned}$$

On sait que, étant donné deux variables indépendantes X et Y et des constantes a et b, on a $\mathrm{Var}[aX + bY] = a^2\,\mathrm{Var}[X] + b^2\,\mathrm{Var}[Y]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Z_1] &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{Var}[Y_1] + 4\,\mathrm{Var}[Y_2]\right) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}, \\
\mathrm{Var}[Z_2] &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{Var}[Y_2] + \mathrm{Var}[Y_3]\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}, \\
\mathrm{Var}[Z_3] &= \frac{1}{9}\left(\mathrm{Var}[Y_1] + \mathrm{Var}[Y_2] + \mathrm{Var}[Y_3]\right) = \frac{1+2+3}{9} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Calculons d'abord les covariances. Il est facile de vérifier que la covariance est un produit scalaire, c'est-à-dire que $\mathrm{cov}(X + Y, Z) = \mathrm{cov}(X, Z) + \mathrm{cov}(Y, Z)$, $\mathrm{cov}(aX, Y) = a\mathrm{cov}(X, Y)$

et $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$ où X, Y, Z sont des variables aléatoires, et a est une constante. On sait aussi que pour X et Y indépendantes, on a $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$. On trouve

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cov}(Y_2, Y_2) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Var}(Y_2) = 1,$$

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_3) = \tfrac{1}{6}\,\mathrm{Cov}(Y_1, Y_1) + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Cov}(Y_2, Y_2) = \tfrac{5}{6}$$

et

$$\mathrm{Cov}(Z_2, Z_3) = -\tfrac{1}{6}.$$

La corrélation entre Z_i et Z_j est définie par

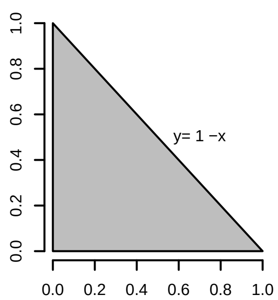
$$\mathrm{Cor}(Z_i, Z_j) = \frac{\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}[Z_i]\,\mathrm{Var}[Z_j]}}.$$

Ainsi $\mathrm{Cor}(Z_1, Z_2) = 4\sqrt{5}/15$, $\mathrm{Cor}(Z_1, Z_3) = 5\sqrt{6}/18$ et $\mathrm{Cor}(Z_2, Z_3) = -\sqrt{30}/30$.

Exercice 8. (a) On a bien $f(x,y) \geq 0$ pour tout x et y. De plus il faut que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$$

Dans notre cas l'ensemble $A = \{(x,y);\, f(x,y) > 0\}$ est un peu compliqué, donc il faut être prudent en spécifiant les bornes des deux intégrales. En fait, l'ensemble A est la



partie grise sur le dessin ci-dessus. Donc, on a $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{1-y} 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

$$\int_0^1\int_0^{1-y} 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 24y\left(\int_0^{1-y} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y}\mathrm{d}y = \int_0^1 12y(1-y)^2\,\mathrm{d}y = 1,$$

et on voit bien que $f(x,y)$ est une densité.

(b) La densité marginale de X est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

De nouveau, il faut être prudent en spécifiant les bornes de l'intégrale. On a

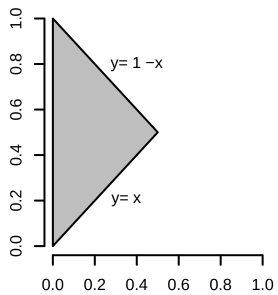
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{1-x} 24xy\,\mathrm{d}y = 12x(1-x)^2 \quad \text{si } x \in [0,1],$$

et $f_X(x) = 0$ sinon. Par symétrie on a également $f_Y(y) = 12y(1-y)^2$ si $y \in [0,1]$ et $f_Y(y) = 0$ sinon.

(c) X et Y ne sont pas indépendantes car $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$. En fait, on peut voir cela directement de la forme de A. Si la région $\{(x,y);\, f(x,y)>0\}$ n'est pas rectangulaire, les deux variables ne peuvent pas être indépendantes.

(d)
$$\mathbb{P}(X<Y) = \int\int_{\{(x,y);\, x<y\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pour calculer cette intégrale on veut intégrer $24xy$ dans la région ci-dessous.



On obtient

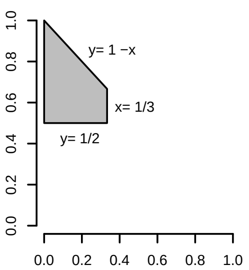
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X<Y) &= \int_0^{1/2}\int_0^y 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{1/2}^1\int_0^{1-y} 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{1/2} 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y \mathrm{d}y + \int_{1/2}^1 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{1/2} 12y^3\,\mathrm{d}y + \int_{1/2}^1 12y(1-y)^2\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{16} + 6 - 8 + 3 - \frac{6}{4} + \frac{8}{8} - \frac{3}{16} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ce qui peut être aussi deviné directement par la symétrie du problème.

(e) D'après la définition on a

$$\mathbb{P}(X<1/3\,|\,Y>1/2) = \frac{\mathbb{P}(X<1/3,\, Y>1/2)}{\mathbb{P}(Y>1/2)}.$$

Pour calculer $\mathbb{P}(X<1/3,\, Y>1/2)$ on intègre $24xy$ dans la région ci-dessous.



On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 1/3,\, Y > 1/2) &= \int_{1/2}^{2/3}\int_0^{1/3} 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{2/3}^{1}\int_0^{1-y} 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{1/2}^{2/3} 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/3}\mathrm{d}y + \int_{2/3}^{1} 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y}\mathrm{d}y \\
&= \int_{1/2}^{2/3} \frac{12}{9}y\,\mathrm{d}y + \int_{2/3}^{1} 12y(1-y)^2\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{27} - \frac{1}{6} + 6 - 8 + 3 - \frac{24}{9} + \frac{64}{27} - \frac{48}{81} = \frac{13}{54}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\mathbb{P}(Y > 1/2) = \int_{1/2}^{1} 12y(1-y)^2\,\mathrm{d}y = 6 - 8 + 3 - \frac{6}{4} + \frac{8}{8} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X < 1/3 \,|\, Y > 1/2) = \frac{13 \times 16}{54 \times 5}.$$

(f) Pour la densité conditionnelle de Y sachant $X = x \in (0,1)$, on a

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{24xy}{12x(1-x)^2} = \frac{2y}{(1-x)^2}$$

pour $0 \le y \le 1 - x$ et $f_{Y|X}(y|x) = 0$ autrement.

(g) On a

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 12x^2(1-x)^2 dx = 12\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{2}{5}.$$

De même $\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{5}$ par symétrie. Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^{1-y} 24x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 8(1-y)^3y^2\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{3} - 6 + \frac{24}{5} - \frac{4}{3} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} = -\frac{2}{75}.$$