Corrigé 6

Exercice 1. (a) Discrète.
(b) Continue.
(c) Discrète.
(d) Discrète.
(e) Continue.

Exercice 2. (a) $X \sim \mathcal{B}(800, 0.02)$.
(b) Il s'agit de la loi de Poisson, $X \sim \text{Poiss}(16)$. Selon la loi des petits nombres, la loi $\mathcal{B}(800, 0.02)$ peut être approximée par la loi $\text{Poiss}(\lambda)$ avec $\lambda = 800 \times 0.02 = 16$.

Exercice 3. Soit X la taille en cm. Nous savons que $X \sim \mathcal{N}(176.6, 63.84)$. Donc

$$\mathbb{P}(X > 170) = \int_{170}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{170}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi \times 63.8}} \exp\left\{-\frac{(x-176.6)^2}{2 \times 63.84}\right\} \mathrm{d}x.$$

Malheureusement on ne peut pas calculer cette intégrale. (Bien sûr, il y a beaucoup de logiciels qui peuvent la calculer numériquement.) En revanche, dans les notes de cours on a le tableau de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (slide 67 des notes de cours). Donc nous avons le tableau avec les valeurs de

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \mathrm{d}x$$

pour $z \in \mathbb{R}$. Nous pouvons utiliser ce tableau pour résoudre notre problème.

On sait que pour une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(176.6, 63.84)$ on a $\frac{X-176.6}{\sqrt{63.84}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. De plus,

$$\mathbb{P}(X > 170) = \mathbb{P}\left(\frac{X-176.6}{\sqrt{63.84}} > \frac{170-176.6}{\sqrt{63.84}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-176.6}{\sqrt{63.84}} \le \frac{170-176.6}{\sqrt{63.84}}\right) =$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{170-176.6}{\sqrt{63.84}}\right) = 1 - \Phi(-0.83) = 1 - (1 - \Phi(0.83)) = 0.79673.$$

De la même manière,

$$\mathbb{P}(X > 192 \,|\, X > 180) = \frac{\mathbb{P}(X > 192 \cap X > 180)}{\mathbb{P}(X > 180)} = \frac{\mathbb{P}(X > 192)}{\mathbb{P}(X > 180)} = \frac{\mathbb{P}\left(\frac{X-176.6}{\sqrt{63.84}} > \frac{192-176.6}{\sqrt{63.84}}\right)}{\mathbb{P}\left(\frac{X-176.6}{\sqrt{63.84}} > \frac{180-176.6}{\sqrt{63.84}}\right)} =$$
$$= \frac{1 - \Phi\left(\frac{192-176.6}{\sqrt{63.84}}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{180-176.6}{\sqrt{63.84}}\right)} = \frac{1 - \Phi(1.93)}{1 - \Phi(0.43)} = \frac{1 - 0.97320}{1 - 0.66640} = \frac{0.02680}{0.33360} = 0.08034.$$

Dans l'Exercice 4 de la série 2 on a approximé la distribution des données par la loi normale, et on a utilisé les probabilités calculées sous la loi normale pour approximer le pourcentage attendu. Par exemple, on a utilisé $\mathbb{P}(X \le 170)$ pour approximer le pourcentage des données dans l'intervalle $(-\infty, 170]$. Si on décide d'approximer la distribution des données par une loi normale, on choisit habituellement la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = \bar{x}$ (la moyenne des données) et $\sigma = s_x$ (l'écart-type des données). Il y a bien sûr d'autres possibilités.

Exercice 4. Définissons la variable aléatoire T désignant le temps d'attente de Nicole. On sait que la loi de T sachant qu'elle a choisi le coiffeur A est $\mathrm{U}(0, 30)$, et la loi de T sachant qu'elle a choisi le coiffeur B est $\mathrm{U}(0, 20)$. Autrement dit, la densité de T sachant que Nicole a lancé 5 ou 6 est

$$f_A(x) = \begin{cases} 1/30 & \text{pour } x \in (0, 30), \\ 0 & \text{pour } x \notin (0, 30), \end{cases}$$

et la densité de T sachant que Nicole a lancé 1, 2, 3, ou 4 est

$$f_B(x) = \begin{cases} 1/20 & \text{pour } x \in (0, 20), \\ 0 & \text{pour } x \notin (0, 20). \end{cases}$$

Soit D le chiffre sur le dé.

(a)

$$\mathbb{P}(T > 25 \,|\, D = 5) = \int_{25}^{30} \frac{1}{30} \,\mathrm{d}x = \frac{30 - 25}{30} = 1/6.$$

(b) D'après le théorème des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < 15) &= \mathbb{P}(T < 15 \,|\, D = 5 \text{ ou } D = 6) \cdot \mathbb{P}(D = 5 \text{ ou } D = 6) + \\ &+ \mathbb{P}(T < 15 \,|\, D = 1 \text{ ou } D = 2 \text{ ou } D = 3 \text{ ou } D = 4) \cdot \mathbb{P}(D = 1 \text{ ou } D = 2 \text{ ou } D = 3 \text{ ou } D = 4) = \\ &= \int_0^{15} \frac{1}{30} \,\mathrm{d}x \cdot \frac{2}{6} + \int_0^{15} \frac{1}{20} \,\mathrm{d}x \cdot \frac{4}{6} = \frac{15}{30} \cdot \frac{2}{6} + \frac{15}{20} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(c) D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(D = 4 \,|\, T \geq 15) = \frac{\mathbb{P}(T \geq 15 \,|\, D = 4) \cdot \mathbb{P}(D = 4)}{\mathbb{P}(T \geq 15)} = \frac{\int_{15}^{20} \frac{1}{20} \,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{6}}{1 - \mathbb{P}(T < 15)} = \frac{\frac{5}{20} \cdot \frac{1}{6}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{8}.$$