Corrigé 4

Exercice 1. (a)

$$X:\Omega\to\mathbb{R};\qquad X(i)=i,\qquad i=1,\dots,6.$$
$$Y:\Omega\to\mathbb{R};\qquad Y(i)=\begin{cases}0, & i=1,\dots,5,\\ 1 & i=6.\end{cases}$$

(b) Pour X on a $H=\{1,\dots,6\}$, pour Y on a $H=\{0,1\}$.

(c) Pour X on a

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)=\mathbb{P}(X=x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Pour Y on a

x_i	0	1
$f(x_i)=\mathbb{P}(Y=x_i)$	5/6	1/6

(d) Pour X on a

x_i	1	2	3	4	5	6
$F(x_i)=\mathbb{P}(X\le x_i)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

Pour Y on a

x_i	0	1
$F(x_i)=\mathbb{P}(Y\le x_i)$	5/6	1

Dans les deux cas, on a, pour $x\in[x_i,x_i+1)$, $i=1,\dots,6$, $F(x)=F(x_i)$.

Exercice 2. (a) Oui.

(b) Non, car la condition $\sum_i f(x_i)=1$ n'est pas satisfaite.

(c) Oui.

(d) Non, car $f(x_i)=\mathbb{P}(X=x_i)$ implique que $0\le f(x_i)\le 1$, $i=1,\dots,11$, ce qui n'est pas le cas ici. Par ailleurs, la condition $\sum_i f(x_i)=1$ n'est pas satisfaite.

Exercice 3. (a) Non, car $F(x)=\mathbb{P}(X\le x)$ implique que $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$.

(b) Oui.

(c) Non, car la fonction doit être non décroissante.

Exercice 4. La loi de Bernoulli, $Y\sim\mathcal{B}(1/6)$.

Exercice 5. (a) On sait que $\sum_{x_i}f(x_i)=\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)=1$ et on a

$$\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)=c\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i=\frac{c}{1-(1-p)}=\frac{c}{p}.$$

Il faut donc que $c=p$.

(b) $\mathbb{P}(X=0)=p(1-p)^0=p$.

(c) $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = 1 - p - p(1-p) - p(1-p)^2 =$
$= (1-p)(1 - p - p(1-p)) = (1-p)^2(1-p) = (1-p)^3$.

(d) Par définition de la probabilité conditionnelle on a

$$\mathbb{P}(X > n+m \,|\, X \geq n) = \frac{\mathbb{P}(\{X > n+m\} \cap \{X \geq n\})}{\mathbb{P}(X \geq n)}.$$

Remarquons que $X > n+m$ implique que $X \geq n$. Donc, $\{X > n+m\} \subset \{X \geq n\}$ et $\mathbb{P}(\{X > n+m\} \cap \{X \geq n\}) = \mathbb{P}(X > n+m)$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X > n+m \,|\, X \geq n) = \frac{\mathbb{P}(X > n+m)}{\mathbb{P}(X \geq n)}.$$

Il nous reste donc à calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$ et $\mathbb{P}(X > k)$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$. D'après la loi de la variable X, on a

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} p(1-p)^i = 1 - (1 - (1-p)^k) = (1-p)^k,$$

où l'avant dernière égalité se trouve à l'aide de l'indication $\sum_{i=0}^{k-1} x^i = \frac{1-x^k}{1-x}$. Ainsi, on obtient que

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X \geq k+1) = (1-p)^{k+1}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(X > n+m \,|\, X \geq n) = \frac{\mathbb{P}(X > n+m)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = \frac{(1-p)^{n+m+1}}{(1-p)^n} = (1-p)^{m+1} = \mathbb{P}(X > m).$$

Remarque : Cette loi s'appelle la loi géométrique. On l'utilise par exemple pour modéliser la situation suivante : on réalise des essais indépendants, chacun avec la même probabilité de succès p. La variable aléatoire X qui compte le nombre d'essais jusqu'au premier succès suit une loi géométrique de paramètre p.

La propriété qu'on a démontré dans la partie (d) est caractéristique de la loi géométrique : si on a déjà observé n échecs, la probabilité d'en observer encore m ou plus est la même que la probabilité d'observer au moins m échecs dès le début. On dit que la loi géométrique est "sans mémoire".

Exercice 6. (a) La loi binomiale, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

(b) Pour un système à 5 composants, la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(5, p)$, et le système fonctionne si au moins 3 composants fonctionnent. La probabilité que le système fonctionne est donc

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + \binom{5}{5} p^5.$$

Pour un système à 3 composants, la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(3, p)$, et le système fonctionne si au moins 2 composants fonctionnent. La probabilité que le système fonctionne est donc

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{2} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3.$$

On cherche p tel que

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p) + \binom{5}{5}p^5 > \binom{3}{2}p^2(1-p) + \binom{3}{3}p^3,$$

i.e. tel que

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 - 3p^2(1-p) - p^3 > 0.$$

On peut résoudre cette inégalité par exemple comme suit :

$$\begin{aligned}
& 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 - 3p^2(1-p) - p^3 > 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1-p)[10p(1-p) + 5p^2 - 3] + p^3 - p > 0 \quad \text{(on a divisé par } p^2 > 0) \\
\Leftrightarrow\ & (1-p)[10p(1-p) + 5p^2 - 3] - p(1-p)(1+p) > 0 \\
\Leftrightarrow\ & 10p(1-p) + 5p^2 - 3 - p(1+p) > 0 \quad \text{(on a divisé par } (1-p) > 0) \\
\Leftrightarrow\ & -6p^2 + 9p - 3 > 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2p-1)(-3p+3) > 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2p-1) > 0 \ \text{, car le fait que } 0 < p < 1 \text{ implique que } (-3p+3) > 0 \\
\Leftrightarrow\ & p > 1/2.
\end{aligned}$$