Corrigé 3

Exercice 1. Soit A l'événement "réussir le cours d'analyse", et S l'événement "réussir le cours de statistique". Nous savons que la probabilité de réussir l'examen d'analyse, $\mathbb{P}(A)$, est égale à 0.5. Nous savons aussi que $\mathbb{P}(S) = 0.7$, et $\mathbb{P}(A \cap S) = 0.3$.

(a) $\mathbb{P}(\text{réussir au moins un des deux cours}) = \mathbb{P}(A \cup S) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(A \cap S) = 0.5 + 0.7 - 0.3 = 0.9$.

(b) $\mathbb{P}(\text{échouer aux deux cours}) = \mathbb{P}(A^c \cap S^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup S) = 1 - 0.9 = 0.1$.

(c) $\mathbb{P}(\text{échouer en statistiques et réussir en analyse}) = \mathbb{P}(S^c \cap A) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(S \cap A) = 0.5 - 0.3 = 0.2$.

(d) $\mathbb{P}(\text{échouer en analyse et réussir en statistiques}) = \mathbb{P}(A^c \cap S) = \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(S \cap A) = 0.7 - 0.3 = 0.4$.

Exercice 2. (a) La pièce est équilibrée, donc la probabilité qu'elle tombe sur pile est $1/2$. De plus, les lancers sont indépendants, donc la probabilité que la pièce tombe sur pile au premier lancer et sur face au deuxième est de $1/2 \times 1/2 = 1/4$.

(b) Les deux lancers de la pièce de monnaie.

(c) $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$.

(d) Un événement élémentaire est par exemple (P, P), un événement est par example $\{(P, P), (P, F)\}$ (pile au premier lancer).

(e) Cela nous dit que chaque événement élémentaire a la même chance d'apparaître. Donc $\mathbb{P}(\{(P, P)\}) = \mathbb{P}(\{(P, F)\}) = \mathbb{P}(\{(F, P)\}) = \mathbb{P}(\{(F, F)\}) = 1/4$.

(f) $\mathbb{P}(\{(P, P), (P, F)\}) = \mathbb{P}(\{(P, P)\}) + \mathbb{P}(\{(P, F)\}) = 1/4 + 1/4 = 1/2$. $\mathbb{P}(\{(P, F)\}) = 1/4$.

Exercice 3. (a) Le tirage de 4 cartes parmis 32.

(b) L'ensemble fondamental contient tous les groupes de 4 cartes choisies parmi les 32. Il contient $\binom{32}{4}$ éléments, par example :
- les 4 dames,
- le roi de pique, le 8 de cœur, le valet de carreau et le 7 de trèfle,
- ...

(c) Tous les événements élémentaires ont la même chance d'apparaître. La probabilité d'un événement A est donc calculée comme $\frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre total de cas possibles}}$.

(d) (i) Nombre de cas favorables $= 1$. Nombre de cas au total $= \binom{32}{4}$. Probabilité $= \frac{1}{\binom{32}{4}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{1}{35960}$.

(ii) Nombre de cas où on a exactement 2 dames $= \binom{4}{2}\binom{28}{2}$. Probabilité $= \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{2}}{\binom{32}{4}} = 6 \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 27}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{567}{8990}$.

(iii) Nombre de cas où on a exactement 2 dames $= \binom{4}{2}\binom{28}{2}$, nombre de cas où on a exactement 3 dames $= \binom{4}{3}\binom{28}{1}$, nombre de cas où on a exactement 4 dames $= 1$. Probabilité $= \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{2} + \binom{4}{3}\binom{28}{1} + 1}{\binom{32}{4}} = \frac{2381}{35960}$.

(iv) Nombre de cas favorables $= 4\binom{8}{4}$. Probabilité $= \frac{4\binom{8}{4}}{\binom{32}{4}} = 4 \times \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{32\cdot31\cdot30\cdot29} = \frac{7}{899}$.

Noter qu'on aurait aussi pu utiliser un autre ensemble fondamental, par exemple les groupes ordonnés de 4 cartes. Cela nous aurait bien sûr donné le même résultat.

Exercice 4. L'ensemble fondamental contient toutes les paires ordonnées de chiffres entre 1 et 6, donc 36 événements élémentaires ; par exemple $(1,1),(1,2),\ldots$Tous les événements élémentaires ont la même chance d'apparaître. Donc, $\mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, et $\mathbb{P}(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

(a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Les événements A et B sont donc indépendants.

(b) $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Les événements A et C sont donc indépendants.

(c) On a $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(C|A\cap B)\,\mathbb{P}(A\cap B) = 1\cdot\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)$, les événements A, B et C ne sont donc pas indépendants. On aurait aussi pu utiliser le fait que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 9/36 = 1/4$ qui n'est pas égale à $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = 1/8$.

Exercice 5. On considère le même ensemble fondamental que dans l'exercice 4. Considérons les événements

$$\begin{aligned} A &= \text{la somme des deux chiffres vaut } 8 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}, \\ B &= \text{on a lancé un } 6 = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(5,6),(4,6),(3,6),(2,6),(1,6)\}. \end{aligned}$$

Selon la définition, on a

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(2,6),(6,2)\})}{\mathbb{P}(\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\})} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}.$$

Exercice 6. Considérons les événements

$$\begin{aligned} M &= \text{la personne est malade}, \\ S &= \text{la personne est saine}, \\ T_M &= \text{la personne est déclarée malade par le test}, \\ T_S &= \text{la personne est déclarée saine par le test}. \end{aligned}$$

(a) Par la formule des probabilités totales on a $P(T_M) = P(T_M|M)P(M) + P(T_M|S)P(S) = 0.9 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.9 = 0.27$.

(b) Par la formule de Bayes on a $P(M|T_M) = \frac{P(T_M|M)P(M)}{P(T_M)} = \frac{0.9\cdot0.1}{0.27} \approx 0.333$.

Exercice 7. Considérons les événements

$$\begin{aligned} C &= \text{la clé est dans le manteau court}, \\ L &= \text{la clé est dans le manteau long}, \\ V &= \text{la clé est dans la veste trench}, \\ T_C &= \text{la clé est trouvée dans le manteau court}, \\ T_L &= \text{la clé est trouvée dans le manteau long}, \\ T_V &= \text{la clé est trouvée dans la veste trench}, \end{aligned}$$

On sait que

$$\mathbb{P}(C) = p_c, \quad \mathbb{P}(L) = p_l, \quad \mathbb{P}(V) = p_v,$$
$$\mathbb{P}(T_C|C) = \alpha_c \quad \mathbb{P}(T_L|L) = \alpha_l, \quad \mathbb{P}(T_V|V) = \alpha_v.$$

La probabilité recherchée est donc

$$\mathbb{P}(C|T_C^c) = \frac{\mathbb{P}(C \cap T_C^c)}{\mathbb{P}(T_C^c)} = \frac{\mathbb{P}(T_C^c|C)\,\mathbb{P}(C)}{1 - \mathbb{P}(T_C)} =^* \frac{(1 - \mathbb{P}(T_C|C))\,\mathbb{P}(C)}{1 - \mathbb{P}(T_C \cap C)} = \frac{(1 - \mathbb{P}(T_C|C))\,\mathbb{P}(C)}{1 - \mathbb{P}(T_C|C)\,\mathbb{P}(C)} = \frac{p_c - \alpha_c p_c}{1 - \alpha_c p_c}.$$

* ici on a utilisé la formule des probabilités totales pour écrire $\mathbb{P}(T_C) = \mathbb{P}(T_C \cap C) + \mathbb{P}(T_C \cap C^c)$. Mais $\mathbb{P}(T_C \cap C^c) = 0$, parce que Julie ne peut trouver la clé que dans la poche où cette dernière se trouve. Donc $\mathbb{P}(T_C) = \mathbb{P}(T_C \cap C)$.

Exercice 8. Considérons les événements

$$\begin{aligned} A &= \text{Alice gagne,} \\ B &= \text{Benoît gagne,} \\ C &= \text{Céline gagne,} \\ T_i &= \text{le premier pile apparaît au } i^{\text{ième}} \text{ lancer}, \quad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Selon les règles du jeu,

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_{3k+1}, \quad B = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_{3k+2}, \quad C = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_{3k+3}.$$

On a $\mathbb{P}(T_i \cap T_j) = \emptyset$ pour $i \neq j$, et $\mathbb{P}(T_i) = (\frac{1}{2})^i$.
Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T_{3k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{3k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{4}{7}, \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T_{3k+2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2}{7}, \\ \mathbb{P}(C) &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Alice a le plus de chance de gagner.

Exercice 9. Considérons les événements

$$\begin{aligned} O &= \text{le mathématicien a oublié son parapluie dans un magasin,} \\ O_i &= \text{le mathématicien a oublié son parapluie dans le } i^{\text{ième}}\text{magasin}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Nous savons que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(O_1) &= \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}(O_2|O_1^c) &=^* \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}(O_3|O_1^c \cap O_2^c) &=^* \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}(O_4|O_1^c \cap O_2^c \cap O_3^c) &=^* \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

* On ne peut oublier son parapluie dans un magasin que si on est entré le magasin avec le parapluie.

Selon la formule de Bayes la probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}(O_4|O) = \frac{\mathbb{P}(O|O_4)\,\mathbb{P}(O_4)}{\sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(O|O_i)\,\mathbb{P}(O_i)} =^{**} \frac{\mathbb{P}(O_4)}{\sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(O_i)}.$$

** L'égalité découle du fait que $\mathbb{P}(O|O_i) = 1$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Pour calculer $\mathbb{P}(O_2)$ on utilise la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(O_2) = \mathbb{P}(O_2 \cap O_1^c) + \mathbb{P}(O_2 \cap O_1) =^{***} \mathbb{P}(O_2 \cap O_1^c) = \mathbb{P}(O_2|O_1^c)\,\mathbb{P}(O_1^c) = \mathbb{P}(O_2|O_1^c)(1 - \mathbb{P}(O_1)) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}.$$

*** $\mathbb{P}(O_2 \cap O_1) = 0$, parce qu'on ne peut pas oublier le même parapluie dans deux magasins différents.

On calcule $\mathbb{P}(O_3)$ et $\mathbb{P}(O_4)$ de la même manière :

$$\mathbb{P}(O_3) = \mathbb{P}(O_3 \cap (O_1^c \cap O_2^c)) + \mathbb{P}(O_3 \cap (O_1 \cup O_2)) = \mathbb{P}(O_3 \cap (O_1^c \cap O_2^c)) = \mathbb{P}(O_3|O_1^c \cap O_2^c)\,\mathbb{P}(O_1^c \cap O_2^c) =$$
$$= \mathbb{P}(O_3|O_1^c \cap O_2^c)\,\mathbb{P}(O_2^c|O_1^c)\,\mathbb{P}(O_1^c) = \mathbb{P}(O_3|O_1^c \cap O_2^c)(1 - \mathbb{P}(O_2|O_1^c))(1 - \mathbb{P}(O_1)) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64},$$

$$\mathbb{P}(O_4) = \mathbb{P}(O_4 \cap (O_1^c \cap O_2^c \cap O_3^c)) + \mathbb{P}(O_4 \cap (O_1 \cup O_2 \cup O_3)) = \mathbb{P}(O_4 \cap (O_1^c \cap O_2^c \cap O_3^c)) =$$
$$= \mathbb{P}(O_4|O_1^c \cap O_2^c \cap O_3^c)\,\mathbb{P}(O_1^c \cap O_2^c \cap O_3^c) = \mathbb{P}(O_4|O_1^c \cap O_2^c \cap O_3^c)\,\mathbb{P}(O_3^c|O_1^c \cap O_2^c)\,\mathbb{P}(O_1^c \cap O_2^c) =$$
$$= \mathbb{P}(O_4|O_1^c \cap O_2^c \cap O_3^c)\,\mathbb{P}(O_3^c|O_1^c \cap O_2^c)\,\mathbb{P}(O_2^c|O_1^c)\,\mathbb{P}(O_1^c) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{256}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(O_4|O) = \frac{\mathbb{P}(O_4)}{\sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(O_i)} = \frac{\frac{27}{256}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256}} = \frac{27}{175}.$$