
CORRIGÉ 11

Exercice 1. (a) Le modèle est :

$$\begin{aligned} X_i &\sim N(\mu, \sigma^2) && \text{pour chaque } i \in \{1, \dots, 12\}, \\ X_1, \dots, X_{12} &\text{ sont indépendantes,} \\ \text{les paramètres } \mu \text{ et } \sigma^2 &\text{ sont inconnus.} \end{aligned}$$

Les hypothèses nulle et alternative sont :

$$H_0 : \mu = 12.2, \quad H_1 : \mu \neq 12.2.$$

(b) Dans des situations similaires, on commence avec la statistique

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n},$$

où μ_0 est la valeur spécifiée dans l'hypothèse, ici $\mu_0 = 12.2$.

On veut que la valeur de la statistique de test soit “petite” si H_0 est vraie, et “grande” si H_1 est vraie. On note que \bar{X}_n est un estimateur de la vraie valeur μ . Donc si H_0 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_n \approx \mu_0$ et $T \approx 0$. En revanche, si H_1 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_n \approx \mu \neq \mu_0$ et $T \gg 0$ ou $T \ll 0$. Si on utilise $|T|$ comme statistique de test, on peut s'attendre à des valeurs “petites” sous H_0 et des valeurs “grandes” sous H_1 .

(c) Les valeurs de la statistique sont extrêmes quand $|T|$ est “trop grande”, i.e. quand $|T| > c$, où c est une valeur critique. Autrement dit, la valeur de la statistique de test est extrême quand $T < -c$ ou $T > c$.

Pour déterminer c , on se rappelle que l'on veut que la probabilité de l'erreur de type I soit égale à α (qui est une petite valeur). L'erreur de type I consiste à rejeter H_0 lorsque H_0 est vraie. Dans notre cas, on veut donc que

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\{T < -c\} \cup \{T > c\}) = 1 - \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}(-c \leq T \leq c). \quad (1)$$

On sait que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

Si H_0 est vraie, $\mu = \mu_0$, et donc $T \sim t_{n-1}$. Ainsi, on peut satisfaire la condition (1) en choisissant $c = s_{100\alpha}(t_{n-1})$, où, pour $a \in \mathbb{R}$, $s_a(t_{n-1})$ est défini par $\mathbb{P}(|T| > s_a(t_{n-1})) = a/100$.

(d) On prend $\alpha = 0.05$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\left| \sqrt{12} \frac{\bar{X}_{12} - 12.2}{S_{12}} \right| > s_5(t_{11}).$$

On a

$$\sqrt{12} \frac{\bar{x}_{12} - 12.2}{s_{12}} = 2.002 \quad \text{et} \quad s_5(t_{11}) = 2.201,$$

donc on ne rejette pas H_0 en faveur de H_1 .

Attention ! Même si on n'a pas rejeté H_0 , on ne dit pas qu'on l'accepte. Quand on fait un test statistique, on cherche une évidence contre H_0 en faveur de H_1 . Quand on ne rejette pas H_0 , cela veut simplement dire qu'il n'y a pas assez d'évidence contre cette hypothèse. Cela n'est pas la même chose que de montrer que H_0 est vraie !

- (e) On prend maintenant $\alpha = 0.10$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\left| \sqrt{12} \frac{\bar{X}_{12} - 12.2}{S_{12}} \right| > s_{10}(t_{11}).$$

On a

$$\sqrt{12} \frac{\bar{x}_{12} - 12.2}{s_{12}} = 2.002 \quad \text{et } s_{10}(t_{11}) = 1.796,$$

donc cette fois on rejette H_0 en faveur de H_1 .

La seule différence avec la partie (d) est qu'ici on permet une plus grande probabilité pour l'erreur de type I. Avec une plus grande probabilité d'erreur de type I permise, on a "moins peur de rejeter". Autrement dit, on se satisfait de moins d'évidence pour rejeter H_0 . Avec nos données, la différence entre 0.05 et 0.10 est assez grande pour changer la conclusion du test.

- (f) Les intervalles de confiance à $100(1 - \alpha)\%$ qu'on a construits dans les parties (b) et (c) de l'Exercice 2 de la série précédente sont en fait les ensembles des valeurs μ_0 telles qu'on ne rejette pas l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ en faveur de l'alternative $H_1 : \mu \neq \mu_0$ au niveau $\alpha\%$.
- (g) La valeur p_{obs} est la probabilité sous H_0 que la statistique de test prenne une valeur aussi extrême ou encore plus extrême que la valeur observée. Dans notre cas, nous avons

$$p_{obs} = \mathbb{P}_{H_0}(\{T < -2.002\} \cup \{T > 2.002\}) = 1 - \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}(-2.002 \leq T \leq 2.002).$$

Si H_0 est vraie, $T \sim t_{11}$, et donc

$$p_{obs} = 1 - (F_{t_{11}}(2.002) - F_{t_{11}}(-2.002)),$$

où $F_{t_{11}}$ est la fonction de répartition de la loi t_{11} . En utilisant la symétrie de cette loi autour de zéro (comme pour la loi $N(0, 1)$), on obtient que

$$p_{obs} = 2(1 - F_{t_{11}}(2.002)) = 2(1 - 0.9647) = 0.071.$$

Noter que la valeur $F_{t_{11}}(2.002)$ peut être trouvée en utilisant un logiciel statistique.

- (h) $p_{obs} > 0.05$, donc on ne rejette pas H_0 en faveur de H_1 au niveau 5 %, mais $p_{obs} < 0.10$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 au niveau 10 %.

En fait, la valeur p_{obs} est le plus petit niveau auquel on rejette H_0 en faveur de H_1 .

- (i) Le modèle :

$$\begin{aligned} X_i &\sim N(\mu, \sigma^2) && \text{pour chaque } i \in \{1, \dots, 12\}, \\ X_1, \dots, X_{12} &\text{ sont indépendantes,} \\ \text{les paramètres } \mu \text{ et } \sigma^2 &\text{ sont inconnus.} \end{aligned}$$

Les hypothèses nulle et alternative sont :

$$H_0 : \mu = 15, \quad H_1 : \mu \neq 15.$$

On rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\sqrt{12} \left| \frac{\bar{X}_{12} - 15}{S_{12}} \right| > s_5(t_{11}),$$

où $s_5(t_{11})$ est le seuil tel que

$$\mathbb{P}(|t_{11}| \geq s_5(t_{11})) = 0.05$$

et que l'on peut lire dans le formulaire du cours.

On a

$$\sqrt{12} \frac{\bar{x}_{12} - 15}{s_{12}} = -3.05 \quad \text{et } s_5(t_{11}) = 2.201,$$

donc on rejette H_0 en faveur de H_1 au niveau 5 %, et on peut dire que le nouveau modèle a une performance différente. On peut de plus conclure que la consommation est inférieure et donc que le nouveau modèle est meilleur.

Exercice 2. On suppose que l'on a deux échantillons indépendants (les variables de chaque échantillon indépendantes entre elles et les deux échantillons indépendants), X_1, \dots, X_6 (les temps observés pour le premier groupe), et Y_1, \dots, Y_6 (les temps observés pour le deuxième groupe), tels que $X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ et $Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$.

Notez que ces suppositions sont discutables. Par exemple, les variances estimées des deux échantillons, s_X^2 et s_Y^2 , semblent être assez différentes. On fait ces suppositions ici quand même afin de pouvoir utiliser une statistique de test simple (la statistique donnée dans l'indication). Il existe d'autres méthodes qui peuvent être utilisées lorsque l'on veut faire des suppositions différentes (par exemple moins restrictives).

L'hypothèse à tester est $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contre l'alternative $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$. Autrement dit, on veut tester $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$ contre $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0$.

On peut baser le test sur la différence entre \bar{X}_6 (l'estimateur de μ_X) et \bar{Y}_6 (l'estimateur de μ_Y). Si H_0 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_6 \approx \bar{Y}_6$, et si H_1 est vraie, on s'attend à ce que $|\bar{X}_6 - \bar{Y}_6| >> 0$. Donc on va rejeter H_0 en faveur de H_1 si $|\bar{X}_6 - \bar{Y}_6| > c$. Ceci est équivalent à $|T| > d$, où

$$T = \sqrt{6+6-2} \times \sqrt{\frac{6 \times 6}{6+6}} \times \frac{\bar{X}_6 - \bar{Y}_6}{\sqrt{5 \times S_X^2 + 5 \times S_Y^2}}. \quad (2)$$

En effet, si H_0 est vraie, on a $\mu_X = \mu_Y$ et donc la statistique donnée dans l'indication se réduit à la statistique T définie en (2). Par ailleurs, on sait d'après l'indication que $T \sim t_{6+6-2}$. On choisit $\alpha = 0.05$ et donc on prend $d = s_5(t_{10})$.

Nous avons $\bar{x}_6 = 2.95$, $\bar{y}_6 = 3.82$, $s_x^2 = 0.094$ et $s_y^2 = 0.478$, ce qui donne

$$t_{obs} = \sqrt{10} \times \sqrt{\frac{36}{12}} \times \frac{2.95 - 3.82}{\sqrt{5 \times 0.094 + 5 \times 0.478}} = -2.81.$$

Par ailleurs, $s_5(t_{10}) = 2.228$. Ainsi, on rejette l'hypothèse H_0 en faveur de H_1 au niveau de 5 %.

Exercice 3. La situation paraît assez similaire à celle de l'exercice 2. On a deux échantillons, X_1, \dots, X_{10} (les temps observés pour le soporifique A), et Y_1, \dots, Y_{10} (les temps observés pour le soporifique B), et on suppose $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Les variables X_i peuvent être supposées indépendantes entre elles, et les variables Y_j peuvent être supposées indépendantes entre elles. Mais il y a une importante différence ! On ne peut pas supposer

que les variables X_i sont indépendantes des variables Y_i , parce que les médicaments ont été administrés aux mêmes personnes. Cela va changer la statistique de test que l'on va utiliser.

Pour obtenir une statistique de test, on peut utiliser le fait que la différence de deux variables normales, $V_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $V_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ est une variable normale $V_1 - V_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \text{Cov}(V_1, V_2))$. Dans notre cas, à la place de deux échantillons, X_1, \dots, X_{10} et Y_1, \dots, Y_{10} , on peut considérer un échantillon Z_1, \dots, Z_{10} , où $Z_i = X_i - Y_i$ pour $i \in \{1, \dots, 10\}$. Les variables Z_i peuvent être supposées indépendantes et normales, $Z_i \sim N(\mu_Z - \mu_Y, \sigma^2)$. Maintenant on peut procéder comme dans l'Exercice 1.

On va tester l'hypothèse $H_0 : \mu_Y = \mu_X + 3$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu_Y \neq \mu_X + 3$. Autrement dit, $H_0 : \mu_X - \mu_Y = -3$ et $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq -3$. On va utiliser la statistique de test T où

$$T = \sqrt{10} \frac{\bar{Z}_{10} + 3}{S_{10}},$$

et on va rejeter H_0 en faveur de H_1 si t_{obs} , la réalisation de T , vérifie $|t_{obs}| > s_5(t_9)$ (on choisit $\alpha = 0.05$).

Dans notre cas, on a

$$\begin{aligned} \bar{z}_{10} &= \bar{x}_{10} - \bar{y}_{10} = 0.75 - 2.19 = -1.44, \\ s_z^2 &= s_x^2 + s_y^2 - 2s_{xy}^2 = 3.20 + 4.63 - 2 \times 3.11 = 1.61, \text{ et} \\ t_{obs} &= \sqrt{10} \frac{3 - 1.44}{\sqrt{1.61}} = 3.9. \end{aligned}$$

Comme $s_5(t_9) = 2.262$, on rejette H_0 en faveur de H_1 . Donc, au niveau 5%, on a montré que l'effet du soporifique B n'a pas une moyenne de 3 heures de plus que celui du soporifique A.

Exercice 4. On a observé les réponses de 800 personnes choisies au hasard. Pour la i ème personne, considérons une variable aléatoire

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la personne choisie est en faveur de l'indépendance,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables X_1, \dots, X_{800} sont iid Bernoulli(p), où $p \in (0, 1)$ est le vrai pourcentage des personnes en faveur de l'indépendance.

Il faut tester $H_0 : p \leq 0.5$ contre $H_1 : p > 0.5$. On peut baser le test sur la différence entre l'estimateur \bar{X}_{800} du paramètre p et sa valeur hypothétique 0.5. Le test rejette H_0 si la variable $\bar{X}_{800} - 0.5$ est significativement grande. Plus précisément, on rejette H_0 quand $\bar{X}_{800} - 0.5 > c$, où c est une constante telle que la probabilité de rejet de H_0 quand H_0 est vérifiée est α (le niveau de signification choisi pour le test). Ainsi, c doit vérifier

$$\max_{p \in [0, 0.5]} \mathbb{P}(\bar{X}_{800} - 0.5 > c) = \alpha. \quad (3)$$

Le théorème central limite nous donne que $\bar{X}_{800} - 0.5$ suit approximativement la loi normale $N(p - 0.5, \frac{p(1-p)}{n})$. Etant donné que les fonctions $p \mapsto p - 0.5$ et $p \mapsto \frac{p(1-p)}{n}$ sont strictement croissantes sur l'intervalle $[0, 0.5]$, il est facile de voir que le maximum apparaissant en (3) est atteint pour $p = 0.5$.

On cherche donc une valeur d telle que

$$\mathbb{P}_{p=0.5}(T > d) = \alpha, \quad (4)$$

où

$$T = \frac{\bar{X}_{800} - 0.5}{\sqrt{0.5 \times (1 - 0.5)/800}}.$$

D'après le théorème central limite, on peut approximer la distribution de T par la loi normale $N(0, 1)$. Ainsi, (4) se réécrit

$$1 - \Phi(d) = \alpha,$$

ce qui donne $d = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$. Donc le test rejette H_0 en faveur de H_1 quand $T > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$. Notons que le niveau de ce test est approximativement α et non exactement α du fait de l'approximation résultant du théorème central limite.

Dans notre cas, $\bar{x}_{800} = 0.55$, donc

$$t_{obs} = \frac{0.55 - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5/800}} = 2.83.$$

Si l'on choisit $\alpha = 0.05$, on a $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = 1.64$. Comme $t_{obs} > 1.64$, on rejette l'hypothèse H_0 en faveur de H_1 . On peut dire que l'on a montré, à un niveau de signification de 5 %, que la majorité de la population est favorable à l'indépendance du Québec.

NB : les données sont inventées.