Algèbre Linéaire Avancée II

Alexis Michelat*

11 juin 2025

*. EPFL B, Station 8, CH-1015 Lausanne, Switzerland alexis.michelat@epfl.ch

Table des matières

Introduction

L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite, la géométrie n'est qu'une algèbre figurée.

Sophie Germain, *Pensées diverses*, [6]

Avant d'entamer ce cours, posons-nous une question simple : qu'est-ce que l'algèbre linéaire ?

L'algèbre (linéaire) constitue avec l'analyse (dérivation, calcul intégral, etc) l'une des deux bases principales des mathématiques. De manière extrême, on pourrait y inclure la géométrie, mais on observera que le mathématicien moderne utilise des classifications phénoménologiques qui tendent à séparer la géométrie entre ses aspects algébriques (géométrie affine, géométrie projective, géométrie algébrique) et ses propriétés analytiques (géométrie différentielle, géométrie complexe, et analyse géométrique). Ces dénominations mixtes ne sont pas le seul produit du caprice et tendent à définir de manière précise la classification phénoménologique des concepts mathématiques abordés (Grothendieck attachait beaucoup d'importance aux noms des concepts qu'il découvrit, et pensait avec raison que cela aidait l'intuition grandement ; tous les noms attachés à ses idées sont beaux et évocateurs : schémas, sites, topos ou topoi, cohomologie étale, cohomologie cristalline, motifs, etc. Quand il s'agit de décrire une réalité délicate, le nom joue un rôle capital — on comparera avec profit le nom des personnages de *Jean Santeuil* avec ceux de *À la Recherche du Temps perdu*).

En présence d'un phénomène complexe, qu'on pourrait décrire phénoménologiquement par une équation mathématique *non-linéaire* (avec des termes quadratiques par exemple), une manière utile et qui a fait ses preuves de mieux comprendre le phénomène est de *linéariser* l'équation, ce qui permet en général de soit la résoudre explicitement, soit de la comprendre plus aisément. Il s'agit ensuite de comprendre comment l'étude du cas linéaire se généralise au cas non-linéaire, et ce genre de problème constitue une part non-négligeable de l'analyse de la plupart des phénomènes dits naturels (par exemple, la stabilité de l'espace de Minkowski — et ses généralisations à Schwarzschild et à Kerr — a d'abord été établie dans le cas linéaire avant d'être démontrée par Christodoulou et Klainerman ; [4]). Dans ce cours, on s'intéresse donc à cette première étape du cheminement scientifique, qui a des applications à tous les domaines des sciences mais aussi aux autres parties des mathématiques. En général, si on peut montrer qu'un problème non-linéaire se réduit à un problème linéaire, on est en bonne voie pour résoudre le problème en question (mais pas toujours !). En revanche, si le problème se reformule en termes combinatoires, les chances de le résoudre deviennent très minces — heureusement, nous n'aurons pas affaire à ce genre de problèmes dans ce cours.

Un des concepts majeurs du cours est celui de spectre d'un opérateur linéaire (le concept mathématique rejoint ici largement l'intuition physique), qui permet d'un point de vue mathématique de comprendre de manière plus aisée la structure d'une application linéaire en la réécrivant d'une manière plus simple. Beaucoup d'importance sera donnée aux notions de diagonalisation, et celles-ci se généralisent en dimension infinie et donnent lieu à nombre d'applications analytiques. Une autre notion-clef est celle de produit scalaire, qui permet d'effectuer les opérations géométriques usuelles de l'espace euclidien dans tout espace vectoriel (de dimension finie ou non), et permet même de donner un sens à la notion de dérivée pour les fonctions prenant leurs valeurs dans un espace courbé (mais nous ne verrons pas cet aspect dans le cours même s'il sera mentionné en passant dans les exemples ; notons ici qu'on ajoutera de temps à autre à la fin des chapitres des sections dites « hors-piste », qui ne sont pas au programme, mais jouent un rôle culturel qui peut aider à donner plus de corps au sujet ; dans une veine similaire, les passages mettant en jeu des notions ardues ou hors-programme seront signalées par un panneau de signalisation inspiré de celui de Bourbaki (« virage dangereux »)). La difficulté du cours tient au nombre de notions abordées ainsi qu'à l'abstraction parfois grande de certains concepts. Les preuves sont en général simples et courtes, et on s'efforcera de les rendre aussi peu astucieuses que possible (on ne développe pas son intuition algébrique avec des *tricks* !). Cette abstraction est malheureusement nécessaire à qui veut étudier la physique moderne, car celle-ci fait non seulement appel à des notions mathématiques très récentes, mais également à des notions mathématiques qui n'ont pas encore été découvertes ! [*] Un mot enfin au lecteur peu algébriste : si l'intuition analytique est assez développée, elle permet de traiter efficacement de nombreux problèmes d'algèbre, qu'on peut souvent (dans le cas de l'algèbre linéaire) résoudre avec des manipulations semblables à celles effectuées en analyse. Certaines preuves seront très analytiques, et d'autres aussi algébriques que possible, mais l'accent sera mis sur la naturalité des preuves.

L'algèbre linéaire, c'est un beau sujet dont on ne saurait faire l'impasse, et le but principal de ce cours est de développer une familiarité suffisante avec ces méthodes algébriques afin qu'elles deviennent un acquis sur lequel vous pourrez baser votre apprentissage ou vos recherches futures. N'hésitez pas à m'interrompre et à poser des questions sur le cours et le polycopié, je serai également présent une fois par semaine (le dimanche normalement) sur le forum ED discussion. J'espère que vous prendrez autant de plaisir à suivre ce cours — et à le faire vôtre — que j'en ai eu à l'écrire, en me basant principalement sur les notes de cours de Marc Troyanov qui vient de partir à la retraite et dont je salue ici le travail. Le livre de Michael Artin ([1]) ainsi que le traité de Herbert Federer ([5]) sont les autres sources majeures de ce cours.

∗. On pensera à la théorie des cordes.

Chapitre 9

Structure des endomorphismes

> The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be *beautiful*; the ideas like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematicics.
>
> G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*

9.1 Notations et rappels

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On définit l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes par $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Un élément $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est écrit sous la forme $A = \{a_{i,j}\}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ (où $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$) et sous la forme du tableau suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ sera généralement écrit sous la forme d'un vecteur colonne, et on définit la multiplication d'un vecteur par une matrice par

$$AX = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_i \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{m,j} x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

Si $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on définit le produit matriciel $AB \in \mathrm{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ de telle sorte que pour tout $1 \le i \le m$ et $1 \le j \le p$, on a

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Les matrices permettent donc de représenter les applications linéaires de manière compacte, et le produit matriciel correspond à la composition des fonctions linéaires.

Si $m = n$, on définit $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un homomorphisme multiplicatif, le déterminant, qui possède la propriété suivante : une matrice A est inversible (ou de manière équivalente, l'application linéaire sous-jacente est bijective) si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Une formule explicite (et presque inutile) pour le déterminant est la suivante :

$$\det(A) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{Ind}(\lambda) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\lambda(i)},$$

où la somme est prise l'ensemble des permutations $\mathfrak{S}_n$, et Ind est l'indice de la permutation, qui vaut $(-1)^N$, où N est le nombre de couples $1 \leq i < j \leq n$ tels que $\lambda(i) > \lambda(j)$.

Remarque 9.1.1. Si vous êtes familier avec le produit extérieur *, on a

$$e_{\lambda(1)} \wedge e_{\lambda(2)} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda(n)} = \mathrm{Ind}(\lambda)\, e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n, \tag{9.1.1}$$

où $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Le déterminant vérifie les propriétés suivantes :

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour tout $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$
3. $$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = a_{1,1} \times \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
$$- a_{1,2} \times \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \times \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

À l'aide de ces propriétés, ainsi que celles relatives à l'invariance du déterminant par opérations élémentaires, permettent de calculer aisément tous les déterminants qui apparaîtront dans ce cours.

On peut ainsi définir le groupe des matrices inversibles par

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \cap \{A : \det(A) \neq 0\}.$$

Il est connu sous le nom de *groupe général linéaire*. Nous utiliserons parfois également la notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans la suite du cours.

9.2 Motivation

Soit V et W deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ (dans la plupart des applications †, on aura $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On rappelle que $\mathscr{L}(V, W)$ est l'ensemble des applications *linéaires* $f : V \to W$, c'est-à-dire,

*. Le produit extérieur vérifie les axiomes suivants : 'est une application bilinéaire antisymétrique : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y, z \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\begin{aligned} &x \wedge x = 0 \\ &(\lambda x) \wedge y = x \wedge (\lambda y) = \lambda(x \wedge y) \\ &x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z \\ &(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z. \end{aligned}$$

On a donc $x \wedge y = -y \wedge x$, ce qui permet de montrer facilement la formule (9.1.1).

†. À l'analyse ou à la physique.

des applications qui vérifient pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in V$ l'identité suivante :

$$f(\lambda\, x + y) = \lambda\, f(x) + f(y). \tag{9.2.1}$$

Si $W = V$, on écrira simplement $\mathscr{L}(V) = \mathscr{L}(V, W)$. En physique, les applications linéaires entre espaces de fonctions (typiquement, entre espaces de Hilbert de dimension infinie) permettent de décrire de nombreux phénomènes (nous verrons des exemples plus loin dans le cours), et certains système dynamiques (faisant par exemple apparaît l'attracteur de Lorentz) se comprennent plus aisément en réécrivant le système dans des coordonnées idoines. Afin de décrire plus simplement l'action de telles fonctionnelles ou lagrangiens, il est souvent utile de trouver les bonnes coordonnées où l'action s'analyse plus aisément. Dans ce cours, nous traiterons le cas de la dimension finie. Par exemple, soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$, on ait

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x \end{pmatrix}. \tag{9.2.2}$$

Cette fonction est un exemple simple de système dynamique. Une question naturelle est d'étudier la trajectoire de ce point par itérations de f. Il est donc nécessaire de calculer $f^{(n)}$ quand $n \to \infty$. C'est assez simple dans ce cas précis de trouver une expression directe des puissances de f par récurrence (mettre les dessins du système d'Arnold), mais le problème devient trivial si l'on diagonalise la matrice A sous-jacente à l'endomorphisme f. Le polynôme caractéristique de f est donné par

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \det \begin{pmatrix} 2 - X & 1 \\ 1 & -X \end{pmatrix} \\ &= -X(2 - X) - 1 = X^2 - 2X - 1 = (X - 1)^2 - 2 = \left(X - 1 - \sqrt{2}\right)\left(X - 1 + \sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

Il existe donc une matrice inversible (qu'on peut calculer explicitement en exercice) $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ telle que

$$f^{(n)}(x) = P \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{9.2.3}$$

En général, s'il n'est pas toujours possible de diagonaliser une matrice, on peut néanmoins la transformer en une matrice *par blocs* dont chaque bloc est soit diagonal, soit triangulaire supérieur. De manière abstraite, soit $f \in \mathscr{L}(V)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel $W \subset V$ est invariant si $f(W) \subset W$, ou en d'autres termes, si la restriction de f à W induit un endomorphisme $f_{|W} \in \mathscr{L}(W)$.

9.3 Triangulation

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure si

$$A = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

ou de manière équivalente, $a_{i,j} = 0$ pour tout $1 \leq j < i \leq n$. De manière similaire, on dit que A est triangulaire inférieure si $a_{i,j} = 0$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$. Les notions étant équivalentes quitte à transposer la matrice, on dira par la suite que A est triangulaire si elle est triangulaire supérieure.

Définition 9.3.1. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulable s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.

De manière similaire, on dit qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(V)$ (d'un espace vectoriel de dimension finie) est triangulable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Proposition 9.3.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(V)$. Alors, f est triangulable si et seulement s'il existe une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de V telle que pour tout $1 \leq i \leq n$,*

$$f(e_i) \in \mathrm{Vect}\,\{e_1, \cdots, e_i\}\,.$$

Théorème 9.3.3. *Un endormorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est triangulable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*

Démonstration. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$. Si f est triangulable dans une base donnée et A est la matrice correspondante, on a

$$\begin{aligned}\chi_f(\lambda) = \det\left(A - \lambda\,\mathrm{I}_n\right) &= \det\begin{pmatrix} a_{1,1}-\lambda & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2}-\lambda & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & a_{3,3}-\lambda & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n}-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\lambda - a_{i,i}),\end{aligned}$$

ce qui montre que le polynôme caractéristique est scindé.

Démontrons la réciproque par récurrence. Si $n = 1$, il n'y a rien à prouver, et supposons donc que $\dim(V) = n \geq 2$ et que la propriété est établie pour tout $k \leq n-1$. C'est le premier exemple de preuve de ce type que nous verrons dans ce cours, et le principe est simple : on décompose l'espace en somme orthogonale de telle sorte que la restriction de f possède encore la propriété de récurrence sur le sous-espace (dans ce cas celle d'avoir un polynôme caractéristique scindé).

Le polynôme caractéristique de f étant scindé, il existe en particulier $\lambda_1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $e_1 \in V \setminus \{0\}$ tels que $f(e_1) = \lambda_1\, e_1$. Soit $W_1 = \mathrm{Vect}\,\{e_1\}$. Complétons e_1 en une base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de V, et soit $W_2 = \mathrm{Vect}\,\{e_2, \cdots, e_n\}$. Alors, W_2 est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de V. Considérons la restriction $f_{|W_2} : W_2 \to W_2$. *A priori*, on a seulement $f_{|W_2} : W_2 \to V$. Par conséquent, si $\pi : V = W_1 \oplus W_2 \to W_2$ est la projection canonique sur le second facteur, on définit $\widetilde{f} = \pi \circ f_{|W_2} : W_2 \to W_2$. Comme f laisse W_1 invariant, on a

$$\chi_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\chi_{\widetilde{f}}(\lambda),$$

ce qui montre que $\widetilde{f}$ est également scindé. En appliquant l'hypothèse de récurrence (ce qui est possible car W_2 est de dimension $n-1$), on obtient le résultat souhaité. ☐

Corollaire 9.3.4. *Toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est triangulable.*

Démonstration. Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. ☐

Remarque 9.3.5. Le résultat est aussi valable sur le corps des nombres algébriques. En particulier, une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ est triangulable sur le corps des nombres algébriques.

Corollaire 9.3.6. *Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, le coefficient de degré $n-1$ du polynôme caractéristique de A est égal à $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer A triangulaire supérieure. En particulier, on a

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} - \lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\,\lambda^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} \\ &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + \det(A) \qquad (9.3.1)\end{aligned}$$

☐

Corollaire 9.3.7. *La trace d'une matrice sur $\mathbb{C}$ est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, et son déterminant est le produit de ses valeurs propres comptées avec multiplicité.*

Démonstration. Le résultat se lit sur la formule (9.3.1). ☐

9.4 Polynômes matriciels

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme et $f \in \mathscr{L}(V)$, où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on définit

$$P(f) = a_d\, f^d + \cdots + a_1\, f + a_0$$

si

$$P(X) = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0,$$

où l'on a noté

$$f^i = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{i \text{ fois}}.$$

De même, si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on définit

$$P(A) = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 \,\mathrm{I}_n.$$

Le résultat suivant regroupe quelques propriétés formellement immédiates.

Proposition 9.4.1. *1. L'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X] &\to \mathscr{L}(V) \\ P &\mapsto P(f) \end{aligned}$$

est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. En particulier, pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$PQ(f) = P(f) \circ Q(f).$$

2. Si $W \subset V$ est un espace invariant par f, alors ce sous-espace est invariant par $P(f)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

3. Si $f \in \mathscr{L}(V)$ et $g \in \mathrm{GL}(V)$, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$P(g^{-1} \circ f \circ g) = g^{-1} \circ P(f) \circ g.$$

4. Si $v \in V$ est un vecteur propre de f de valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$ associé au vecteur propre v.

Démonstration. 1. Si

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

et

$$Q = \sum_{j=0}^{m} b_k X^j,$$

on obtient

$$PQ = \sum_{k=0}^{d+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k,$$

ce qui montre que

$$PQ(f) = \sum_{k=0}^{d+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) f^k = \left(\sum_{i=0}^{d} a_i f^i \right) \circ \left(\sum_{j=0}^{m} b_k f^j \right)$$

$$= P(f) \circ Q(f).$$

2. Si $f(W) = W$, alors $f^2(W) \subset f(W) \subset W$, et par récurrence, on a $f^i(W) \subset W$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a pour tout $a_i \in \mathbb{K}$

$$\sum_{i=0}^{d} a_i f^i(W) \subset W.$$

3. En effet, on remarque par associativité de la composition que

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f \circ g)^2 &= (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) = (g^{-1} \circ f) \circ (g \circ g^{-1}) \circ (f \circ g) \\ &= (g^{-1} \circ f) \circ \mathrm{Id}_V \circ (f \circ g) = (g^{-1} \circ f) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f \circ f) \circ g \\ &= g^{-1} \circ f^2 \circ g\end{aligned}$$

par définition de $f^2 = f \circ f$. Par récurrence, on montre facilement que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$(g^{-1} \circ f \circ g)^i = g^{-1} \circ f^i \circ g,$$

ce qui montre également que pour tous $a_i \in \mathbb{K}$ $(0 \leq i \leq d)$, on a

$$\sum_{i=0}^{d} a_i (g^{-1} \circ f \circ g)^i = \sum_{i=0}^{d} a_i g^{-1} \circ f^i \circ g = g^{-1} \circ \left(\sum_{i=0}^{m} a_i f^i\right) \circ g = g^{-1} \circ P(f) \circ g$$

si $P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. La propriété est donc démontrée.

4. Si $f(v) = \lambda\, v$, alors $f^2(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$, et par récurrence, on a $f^i(v) = \lambda^i v$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on obtient

$$\sum_{i=0}^{d} a_i f^i(v) = \left(\sum_{i=0}^{d} a_i \lambda^i\right) v,$$

ce qui montre si $P = a_d X^d + \cdots + a_0$ que $P(f)v = P(\lambda)v$, ou de manière équivalente, que v est un vecteur propre de $P(f)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$. $\square$

Remarque 9.4.2. On peut définir d'autres opérations sur les matrices, en prenant par exemple l'exponentielle d'une matrice

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \mathrm{I}_n + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^4}{24} + \cdots$$

Il faut montrer la convergence de cette série, et nous ne traiterons pas de ces questions d'analyse ici (voir par exemple [1, Chapitre 4, Section 8]). Remarquons cependant que si on munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme (nous verrons cette notion au Chapitre 11) multiplicative, c'est-à-dire, qui vérifie $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ pour tout $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors la convergence est triviale. Cette notion prend toute son importance en géométrie différentielle — l'étude de la notion d'espaces courbés, ou de variétés (vous verrez cela en relativité générale, et on en dira un mot dans une section hors-piste).

Une conséquence importante de la première propriété

Remarque 9.4.3. La réciproque de la quatrième propriété est vraie sur $\mathbb{C}$, mais il faut bien choisir *l'inverse* de la valeur propre en question. En effet, on peut supposerr que la matrice est triangulaire supérieure, ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\chi_{A^n}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i,i}^n - \lambda\right),$$

ce qui montre bien que pour toute valeur propre μ de A^n, il existe une racine n-ième de μ (c'est-à-dire, $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda^n = \mu$) qui est valeur propre de A. En général, on a

$$\chi_{P(A)}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(P(a_{i,i}) - \lambda\right).$$

Par conséquent, si $\mu \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $P(A)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $P(\lambda) = \mu$ tel que λ soit une valeur propre de A.

9.5 Polynôme annulateur et polynôme minimal

Cette section va nous donner la terminologie nécessaire pour montrer de manière quantitative le résultat suivant : les puissances d'une matrice carrée ne forment par une famille linéairement indépendante. En effet, $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension n^2. Par conséquent, la famille

$$\left\{A^0 = \mathrm{I}_n, A, A^2, \cdots, A^{n^2}\right\}$$

n'est pas libre, et il existe $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n^2} \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_{n^2} A^{n^2} + \cdots + \lambda_1 A + \lambda_0 \, \mathrm{I}_n = 0.$$

Ceci montre que si A est une matrice carrée n-dimensionnelle, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ de degré $\deg(P) \leq n^2$ tel que

$$P(A) = 0.$$

On dit qu'un tel polynôme est un *polynôme annulateur* de A. Dans la section suivante, on montrera que ce résultat reste vrai avec un polynôme de degré au plus n, ce qui constitue une nette amélioration. Dans le cas le plus intéressant où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le résultat peut être prouvé par un argument d'analyse [*].

Définition 9.5.1. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ annule une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ si $P(A) = 0$. De même, on dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(V)$ si $P(f) = 0$.

On a la proposition évidente [†] suivante.

Proposition 9.5.2. *1. Soit $f \in \mathscr{L}(V)$ et $g \in \mathrm{GL}(V)$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de f, alors P est également un polynôme annulateur de $g^{-1} \circ f \circ g$.*

2. Deux matrices semblables ont mêmes polynômes annulateurs.

3. Si A est la matrice de $f \in \mathscr{L}(V)$ dans une base quelconque, alors $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de f si et seulement si P est un polynôme annulateur de A.

Démonstration. On a finalement, suivant la demande populaire, donné la preuve en classe.

1. Cela découle immédiatement du point 3. de la Proposition 9.4.1

2. En effet, c'est la version matricielle de la propriété précédente.

3. Si P est polynôme annulateur de f, la multiplication matricielle correspondant à la composition, on en déduit que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ représentant f, on a $P(A) = 0$.

Réciproquement, si P est polynôme annulateur de $A = \mathrm{Mat}(f)$ dans une base fixée (et arbitraire), montrons que P annule toute matrice A' représentant f dans une autre base. En effet, il existe $G \in \mathrm{GL}(V)$ telle que $A' = G^{-1}AG$. La version matricielle du point 3. de la Proposition 9.4.1 montre que $P(A') = G^{-1}P(A)G$. La matrice G étant inversible, on a donc $P(A') = 0$ si et seulement si $P(A) = 0$. Par conséquent, P est également polynôme annulateur de A'. De plus, si P est polynôme annulateur de A, pour tout $x \in V$, si $x' = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{K}^n$ représente le vecteur x dans la base correspondant à A, on a $P(f)(x) = P(A)x' = 0$. Par conséquent, P est aussi polynôme annulateur de f, ce qui conclut la preuve de la proposition. $\square$

Remarque 9.5.3. En d'autres termes, pour trouver les polynômes annulateurs d'une application linéaire f, il suffit de trouver les polynômes annulateurs d'une représentation matricielle arbitraire de f.

∗. Indications : montrer en premier lieu le résultat pour les matrices diagonalisables (quel polynôme choisissez-vous ? Commencez avec le cas des matrice 2×2, sans forcément supposer qu'elles sont diagonalisables), puis montrer le résultat par densité, i.e., montrer qu'une matrice complexe est arbitrairement proche d'une matrice diagonalisable et conclure par un argument de continuité. Nous écrirons cette preuve en détail plus loin, mais il est bon de commencer à y réfléchir *maintenant.*

†. Cela ne vous dispense pas d'en écrire la preuve ! Les preuves laissées en exercice seront traitées en classe en fonction de la demande populaire. Et n'hésitez pas à utiliser le forum.

Définition 9.5.4. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. On dit qu'un polynôme $P = X^{\deg(P)} + \cdots \in \mathbb{K}[X]$ est le polynôme minimal de $f \in \mathscr{L}(V)$ si P est un polynôme annulateur de f ($P(f) = 0$) et si pour tout polynôme non-nul $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ de degré $\deg(Q) < \deg(P)$, on a $Q(f) \neq 0$. On note généralement $\mu_f \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme minimal d'un endormorphisme f.

Remarque 9.5.5.
1. L'existence du polynôme minimal découle de la discussion en début de chapitre.
2. On remarque que la normalisation pour le coefficient de plus haut degré est nécessaire pour l'unicité. Autrement, le polynôme minimal serait défini modulo multiplication par un scalaire non-nul.

Proposition 9.5.6. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie.*
1. *Le polynôme minimal d'un endomorphisme sur V est l'unique polynôme unitaire de degré minimal qui annule f.*
2. *Le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur.*
3. *Deux endomorphismes conjugués ont même polynôme minimal.*

Démonstration. Seule la seconde assertion mérite une preuve. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est le polynôme minimal et $Q \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur, on a par définition $\deg(Q) \geq \deg(P)$. Par conséquent, on peut effectuer la division euclidienne de Q par P et il existe $R, S \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$Q = PS + R,$$

où $\deg(R) < \deg(P)$. On obtient en particulier $R(f) = Q(f) - PS(f) = Q(f) - P(f)S(f) = 0$, ce qui montre que R est un polynôme annulateur de f. Comme $\deg(R) < \deg(P)$, on obtient $R = 0$ (autrement la définition de P comme polynôme minimal serait contredite), ce qui montre que $P|Q$ (P divise Q). $\square$

Remarque 9.5.7. La preuve de la seconde assertion montre également la première. En effet, si P est un polynôme annulateur de degré minimal, et Q est un autre polynôme annulateur de degré minimal, alors $P|Q$, ce qui montre qu'il existe $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PS$. Or, les polynômes P et Q sont de même degré, ce qui montre que $\deg(Q) = \deg(PS) = \deg(P) + \deg(S) = \deg(P)$, et on en déduit que $\deg(S) = 0$, ce qui est équivalent à $S \in \mathbb{K}$. De plus, les coefficients dominants de P et Q étant tous deux égaux à 1 par définition du polynôme minimal, on en déduit que $S = 1$, ce qui montre bien que $P = Q$.

9.6 Théorème de Cayley-Hamilton

9.6.1 Preuve pour les matrices complexes

Commençons à prouver le théorème pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (la preuve fonctionne aussi pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, car il suffit de considérer des matrices comme des éléments de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{M}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ respectivement, où $\overline{\mathbb{Q}}$ est la clôture algébrique de l'ensemble des nombres rationnels) pour se libérer des lourdeurs algébriques qui nuisent à l'intuition *.

Théorème 9.6.1 (Théorème de Cayley-Hamilton, cas complexe)**.** *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, on a $\chi_A(A) = 0$, où χ_A est le polynôme caractéristique de A.*

Remarque 9.6.2. On mentionne en passant le piège commun d'essayer de remplacer $\lambda = A$ dans la définition du polynôme caractéristique ($\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)$, ce qui n'a pas de sens car λ doit être scalaire).

Démonstration. On commence par prouver le théorème pour $n = 2$ (auquel cas l'hypothèse $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ n'est pas nécessaire). Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

*. Forcément analytique ! L'intuition algébrique est un mythe bien plus dangereux que celui du « sens physique »... Le lecteur n'aura pas tort que conjecturer que l'auteur de ces notes n'a « aucun sens physique » (dixit l'examinateur des Mines).

on calcule directement

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = 0.$$

Si A est diagonale, on a

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - \lambda)\,.$$

Par conséquent, on a

$$\chi_A(A) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,1}-a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{1,1}-a_{n,n} \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} a_{n,n}-a_{1,1} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n}-a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Les matrices semblables ayant le même polynôme caractéristique, le résultat est également vérifié si A est diagonalisable. À présent, pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, considérons pour tout $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \mathbb{Q}_+^*$ (on choisit les perturbations dans $\mathbb{Q}$ pour que la preuve s'applique aux autres corps mentionnés ci-avant la preuve) la perturbation

$$A_\varepsilon = A + \mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n).$$

La matrice A étant semblable à une matrice triangulaire supérieure, on peut supposerr sans perte de généralité que A est triangulaire supérieure. On a donc

$$\chi_{A_\varepsilon}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} + \varepsilon_i - \lambda)\,.$$

En particulier, pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que $\varepsilon_i < \delta$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et tels que les racines $\{\lambda_i = a_{i,i} + \varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de χ_{A_ε} soient toutes distinctes. En particulier, χ_{A_ε} admet n racines distinctes, ce qui montre que A est diagonalisable. Par conséquent, on a

$$\chi_{A_\varepsilon}(A_\varepsilon) = 0. \tag{9.6.1}$$

Le résultat s'ensuit en prenant $\delta \to 0$. En effet, les coefficients $a_i(\varepsilon)$ $(0 \leq i \leq n)$ de χ_{A_ε} diffèrent de deux de χ_A par des polynômes en les nombres ε_i. La fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \mapsto a_i(\varepsilon)$ est donc une fonction continue, ce qui montre que

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \cdots \lim_{\varepsilon_n \to 0} a_i(\varepsilon) = a_i(0) = a_i(A).$$

On peut donc prendre la limite dans l'équation (9.6.1) pour obtenir le résultat souhaité. □

Remarque 9.6.3. On pourrait croire que cette preuve est unique à $\mathbb{C}$, mais il n'en est rien. En vérité, elle fonctionne pour tout anneau intègre $\mathbb{A}$ (qui n'a pas de diviseurs de 0). Si $\mathbb{A}$ est un anneau intègre, considérons son corps des fractions $\mathbb{K}$ — c'est le plus petit corps commutatif contenant $\mathbb{A}$, et on peut montrer* qu'il existe toujours. Le corps $\mathbb{K}$ admet une clôture algébrique $\overline{\mathbb{K}}$, et on peut donc considérer toute matrice sur $\mathbb{A}$ comme une matrice sur $\overline{\mathbb{K}}$. Si on munit $\overline{\mathbb{K}}$ de sa topologie de Zariski (dont les fermés sont les ensembles algébriques — on dit qu'un ensemble est algébrique si c'est le lieu des zéros d'une famille de polynômes ; par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $P = X_1^2 + X_2^2 - 1$, l'ensemble correspondant est le cercle $S^1 = \mathbb{R}^2 \cap \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\right\}$), on peut étendre l'argument de densité à ce contexte. Ces arguments mettent en jeu des notions (théorie de Galois et géométrie algébrique) qui dépassent de loin le cadre de ce cours, mais il est intéressant de voir un phénomène inverse à celui de la preuve par Alexandre Grothendieck du Théorème de Ax-Grothendieck (où une preuve sur les corps finis se généralise à une preuve sur $\mathbb{C}$). On peut préférer une preuve plus simple, mais preuve plus simple ne rime pas toujours avec preuve plus intuitive.†

$*$. Dans le cas où $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, on a simplement $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

†. « Tout finira par les astuces » aurait dit Nietzsche.

9.6.2 Preuve générale

Montrons à présent le théorème de Cayley-Hamilton en toute généralité. Nous introduisons pour cela une nouvelle notion, celle du polynôme matriciel.

Définition 9.6.4. Un polynôme matriciel sur un corps $\mathbb{K}$ est un élément de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})[X]$. C'est donc une somme formelle

$$P = \sum_{i=0}^{d} A_i\, X^i = A_d X^d + \cdots + A_0,$$

où $A_i \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 9.6.5. On voit ici $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ comme un anneau.

Pour tout $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on définira donc

$$P(T) = \sum_{i=0}^{n} A_i T^i$$

où le produit est entendu au sens matriciel. Il faut faire attention au fait suivant : en général, si $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})[X]$ et $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $(PQ)(T)$ et $P(T)Q(T)$ sont des matrices *distinctes*. C'est dû au fait que $PQ = QP$ en temps que polynôme et non en tant que matrice (à cause de la non-commutativité du produit matriciel). Par exemple, si

$$P = AX \qquad \text{et} \qquad Q = BX,$$

on a

$$PQ(T) = ABT^2$$

tandis que

$$P(T)Q(T) = ATBT.$$

Si $A, B, T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ et $BT \neq TB$, on voit donc que $PQ(T) \neq P(T)Q(T)$. C'est bien entendu la seule obstruction au résultat.

Proposition 9.6.6. *Soit $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})[X]$. Si $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec tous les coefficients de P et Q, on a*

$$PQ(T) = P(T)Q(T).$$

La preuve est laissée en exercice.

Théorème 9.6.7 (Théorème de Cayley-Hamilton, cas général)**.** *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, on a $\chi_A(A) = 0$, où χ_A est le polynôme caractéristique de A.*

Démonstration. La preuve de la formule de Laplace pour l'inverse d'une matrice s'applique également à une matrice à coefficients dans un anneau intègre* comme $\mathbb{K}[X]$. Par conséquent, pour tout $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})[X]$, on a

$$\det(Q) \cdot \mathrm{I}_n = \mathrm{Cof}(Q)^t \cdot Q(t).$$

On applique cette formule à $Q = A - X\,\mathrm{I}_n$, ce qui montre que

$$\chi_A(X) \cdot \mathrm{I}_n = \mathrm{Cof}\,(A - X\,\mathrm{I}_n)^t\,(A - X\,\mathrm{I}_n).$$

*. Sans diviseurs de 0.

Par le lemme précédent, on peut appliquer cette identité à toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec A, ce qui montre que pour tout $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec A, on a

$$\chi_A(T) = \mathrm{Cof}\,(A-T)^t\,(A-T).$$

Comme A commute trivialement avec lui-même, on obtient

$$\chi_A(A) = \mathrm{Cof}\,(A-A)^t\,(A-A) = 0,$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

Corollaire 9.6.8. *Le polynôme minimal d'un endormorphisme de dimension finie divise son polynôme caractéristique.*

Démonstration. Appliquer la Proposition 9.5.6. □

On dispose donc d'un algorithme (assez inefficace) pour trouver le polynôme minimal. Il suffit de tester $P(A)$ pour tout diviseur $P \in \mathbb{K}[X]$ de $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$. C'est assez fastidieux et d'intérêt assez limité. La chose vraiment intéressante était d'améliorer la borne naïve $\deg(P) \leq n^2$ sur le degré du polynôme minimal P en $\deg(P) \leq n$.

9.7 Vecteurs propres généralisés et théorème de réduction primaire

Définition 9.7.1. Soit $f \in \mathscr{L}(V)$ un endormorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. On dit qu'un vecteur $v \in V \setminus \{0\}$ est un vecteur propre généralisé de f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $v \in \mathrm{Ker}\left((f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^m\right)$.
2. Le plus petit entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^m\, v = 0$ est l'ordre du vecteur propre généralisé v.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la multiplicité généralisée d'ordre k de f est définie par

$$\delta_{f,\lambda}(k) = \dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^k\,.$$

On définit de même $\delta_{A,\lambda}(k) = \dim \mathrm{Ker}\,(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)^k$ si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Lemme 9.7.2. *Un vecteur propre généralisé est un vecteur propre.*

Démonstration. En effet, si $\lambda \in \mathbb{K}$ est vecteur propre généralisé d'ordre m de f on a trivialement

$$0 = (f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^m\, v = (f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)\left((f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{m-1}\, v = (f - \lambda\,\mathrm{Id}_V) w,\right.$$

où $w = (f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{m-1}\, v \in V \setminus \{0\}$ par définition de m. □

On a le théorème suivant, que nous prouverons dans la section suivante.

Théorème 9.7.3 (Théorème de réduction primaire)**.** *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$. Soit $(s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{N}$ et*

$$P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{s_i} \in \mathbb{K}[X],$$

où $\sigma(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\} \subset \mathbb{K}$ est le spectre de f. Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. *Le sous-espace $U_i = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i\,\mathrm{Id}_V)^{s_i}$ est invariant par f pour tout $1 \leq i \leq r$.*
2. *La restriction de $f - \lambda_i\,\mathrm{Id}_V$ à U_i est un endormorphisme nilpotent.*

3. On a

$$\operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$$

et

$$\dim \operatorname{Ker} P(f) = \sum_{i=1}^{r} \delta_{f,\lambda_i}(s_i).$$

Corollaire 9.7.4. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$. Si $\sigma(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ est le spectre de f, le polynôme spectral de f est défini par*

$$\nu_f = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i) \in \mathbb{K}[X].$$

Alors, on a

$$\operatorname{Ker} \nu_f(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i(f)},$$

où l'on a noté pour tout $1 \leq i \leq n$ l'espace propre de f associé à la valeur propre λ_i par $E_{\lambda_i}(f)$.

Corollaire 9.7.5. *Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si son polynôme spectral l'annule, i.e., $f \in \mathscr{L}(V)$ est diagonalisable si et seulement si ν_f est un polynôme annulateur de f.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du Corollaire 9.7.4, car f est diagonalisable si et seulement V est somme directe d'espaces vectoriels. □

Théorème 9.7.6. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est diagonalisable.*
2. *Le polynôme spectral $\nu_f \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de f.*
3. *Le polynôme minimal coïncide avec le polynôme spectral, i.e., $\mu_f = \nu_f$.*
4. *Il existe un polynôme scindé à racines distinctes annulant f.*

La preuve est laissée en exercice. Notons également que le polynôme spectral divise toujours le polynôme minimal.

Proposition 9.7.7. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$. Alors, le polynôme spectral divise le polynôme minimal : autrement dit, on a $\nu_f | \mu_f$. En d'autres termes, si $\lambda \in \sigma(f)$ est une valeur propre de f, alors $(X - \lambda) | \mu_f$.*

Démonstration. Rappelons que le polynôme spectral est donné par

$$\nu_f = \prod_{\lambda \in \sigma(f)} (X - \lambda).$$

Soit $\lambda \in \sigma(f)$. Alors, il existe un vecteur propre $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $f(v) = \lambda\, v$. On a donc $f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda\, v) = \lambda\, f(v) = \lambda^2 v$, et par une récurrence immédiate, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'identité $f^k(v) = \lambda^k v$. Soit à présent $a_i \in \mathbb{K}$ tels que le polynôme minimal soit donné sous la forme

$$\mu_f = X^d + a_{d-1}\, X^{d-1} + \cdots + a_1\, X + a_0,$$

où $d \geq 1$. Alors, on calcule

$$\mu_f(f)(v) = \left(f^d + a_{d-1}\, f^{d-1} + \cdots + a_1\, f + a_0 \operatorname{Id}_V\right)(v) = \left(\lambda^d + a_{d-1}\, \lambda^{d-1} + \cdots + a_1\, \lambda + a_0\right) v = \mu_f(\lambda) v.$$

Comme μ_f est un polynôme annulateur, on a $\mu_f(f) = 0$, ce qui montre en particulier que $\mu_f(f)(v) = 0$, et comme $v \neq 0$, l'équation précédente montre que $\mu_f(\lambda) = 0$. En d'autres termes λ est une racine du polynôme μ_f, ce qui montre que $(X - \lambda) | \mu_f$. Le résultat étant vérifié pour tout $\lambda \in \sigma(f)$, on en déduit que $\nu_f | \mu_f$. □

Remarque 9.7.8. Par conséquent, quand on recherche le polynôme minimal, il faut tester tous les polynômes du type

$$\prod_{\lambda\in\sigma(f)} (X-\lambda)^{\alpha(\lambda)},$$

où $1 \leq \alpha(\lambda) \leq m(\lambda)$ et $m(\lambda) \in \mathbb{N}^*$ est la multiplicité algébrique de $\lambda \in \sigma(f)$.

Définition 9.7.9. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$. Si $\lambda \in \sigma(f)$ est une valeur propre de multiplicité algébrique $m_\lambda \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel

$$N_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{m_\lambda}$$

est le sous-espace propre généralisé, ou sous-espace caractéristique associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$.

Corollaire 9.7.10. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$. Si le polynôme caractéristique de f est scindé, alors les propriétés suivante sont vérifiées.*

1. *On a la décomposition en somme directe*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} N_{\lambda_i}(f),$$

   où $\sigma(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ est le spectre de f.
2. *Pour tout $1 \leq i \leq r$, l'ensemble des vecteurs propres* **généralisés** *associés à λ_i est égal à $N_{\lambda_i}(f) \setminus \{0\}$.*

Démonstration. En vertu du Théorème de Cayley-Hamilton, on a $\mathrm{Ker}\chi_f(f) = V$, ce qui nous permet d'appliquer le Théorème de réduction primaire au polynôme $P = \chi_f \in \mathbb{K}[X]$, ce qui montre la première affirmation. La seconde s'ensuit immédiatement. $\square$

9.8 Lemme des noyaux et preuve du Théorème 9.7.3

Théorème 9.8.1 (Lemme des noyaux)**.** *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et supposons que P admet une factorisation première*

$$P = \prod_{i=1}^{r} Q_i,$$

où Q_i et Q_j sont premiers entre eux pour tout $1 \leq i \neq j \leq r$. Soit $W_i = \mathrm{Ker}\,Q_i(f)$ $(1 \leq i \leq r)$. Alors, les sous-espaces vectoriels W_i sont invariants par f et on a la décomposition suivante en somme directe :

$$\mathrm{Ker}\,P(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i.$$

Démonstration. On montre le résultat par récurrence. Pour $r = 1$, il n'y a rien à démontrer. Montrons l'assertion pour $r = 2$. En vertu du Théorème de Bezout, comme Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, il existe des polynômes $R_1, R_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$Q_1R_1 + Q_2R_2 = 1.$$

En particulier, on a

$$Q_1(f)R_1(f) + Q_2(f)R_2(f) = \mathrm{Id}_V.$$

Soit $v \in \mathrm{Ker}\,Q_1(f) \cap \mathrm{Ker}\,Q_2(f)$. On a

$$v = Q_1(f)R_1(f)(v) + Q_2(f)R_2(f)(v) = R_1(f)(0) + R_2(f)(0) = 0$$

par hypothèse sur v.

Soit à présent $v \in \operatorname{Ker} Q_1(f) + \operatorname{Ker} Q_2(f)$. Alors, il existe $v_1 \in \operatorname{Ker} Q_1(f)$ et $v_2 \in \operatorname{Ker} Q_2(f)$ tels que $v = v_1 + v_2$. On a donc

$$P(f)(v) = Q_1(f)Q_2(f)(v) = Q_1(f)Q_2(f)(v_1) = Q_2(f)Q_1(f)(v_1) = 0.$$

Enfin, si $v \in \operatorname{Ker} P(f)$, montrons que $v \in \operatorname{Ker} Q_1(f) + \operatorname{Ker} Q_2(f)$. On a

$$v = Q_1(f)R_1(f)(v) + Q_2(f)R_2(f)(v) = v_2 + v_1$$

Vérifions que $v_i \in \operatorname{Ker} Q_i(f)$ pour tout $i = 1, 2$. En effet, on a

$$Q_1(f)(v_1) = Q_1(f)Q_2(f)R_2(f)(v) = R_2(f)P(f)(v) = 0,$$

et l'on montre de même que $Q_2(f)(v_2) = 0$.

La preuve est donc complète car pour le cas général, on écrit $P = Q_1 S$ (où $S = Q_2 \cdots Q_r$) et on applique l'hypothèse de récurrence. □

Théorème 9.8.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$. Soit $(s_1, \cdots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ et*

$$P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{s_i},$$

où $\sigma(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ est le spectre de f. Alors, les propriétés suivantes sont vérifées :

1. *Le sous-espace $U_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^{s_i}$ est invariant par f.*
2. *La restriction de $f - \lambda \operatorname{Id}_V$ à U_i est un endormorphisme nilpotent.*
3. *On a*

$$\operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$$

et

$$\dim \operatorname{Ker} P(f) = \sum_{i=1}^{r} \delta_{f,\lambda_i}(s_i).$$

Démonstration. On a $x \in U_i$ si et seulement si $(f - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^{s_i}(x) = 0$, ce qui montre que

$$(f - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^{s_i}(f(x)) = f\left((f - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^{s_i}(x)\right) = 0$$

ce qui montre que $f(U_i) \subset U_i$.

La seconde assertion est triviale car la restriction de $(f - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^{s_i}$ à U_i est nulle par définition.

Enfin, la troisième provient d'une application directe du lemme des noyaux. □

9.9 Décomposition de Dunford

Lemme 9.9.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$. Si le polynôme caractéristique de f est scindé et f a une unique valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, alors $f - \lambda_1 \operatorname{Id}_V$ est nilpotent.*

Démonstration. Les hypothèses entraînent que $\sigma_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^n$. En vertu du Théorème de Cayley-Hamilton, on a $(f - \lambda_1 \operatorname{Id}_V)^n = 0$, ce qui montre que $f - \lambda_1 \operatorname{Id}_V$ est nilpotent. □

Théorème 9.9.2 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors, il existe une matrice* diagonalisable *$D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice* nilpotente *$N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $DN = ND$ et*

$$A = D + N.$$

Démonstration. Par hypothèse, le polynôme caractéristique admet la décomposition suivante

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{m_i},$$

où $\sigma(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ est le spectre de f. Pour tout $1 \leq i \leq r$, soit $N_i = N_{\lambda_i}(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_i \mathrm{I}_n)^{m_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i. Le Théorème de réduction primaire montre qu'on a la décomposition orthogonale suivante :

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$$

De plus, N_i est invariant par f pour tout $1 \leq i \leq r$. On choisit une base

$$\{e_1, \cdots, e_{m_1}, e_{m_1+1}, \cdots, e_{m_1+m_2}, \cdots, e_n\}$$

telle que pour tout $1 \leq i \leq r$, $\left\{e_{m_{i-1}+1}, \cdots, e_{m_{i-1}+m_i}\right\}$ soit une base de N_i (où l'on a noté $m_0 = 0$). Il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ telle que

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_r \end{pmatrix},$$

où $B_i \in \mathrm{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ pour tout $1 \leq i \leq r$. En triangulant chaque bloc (ce qui est possible car le polynôme caractéristique est scindé), on peut sans perte de généralité supposer que B_i est triangulaire supérieure pour tout $1 \leq i \leq r$. De plus, les coefficients diagonaux de B_i sont tous égaux à λ_i, ce qui montre que $B_i = \lambda_i \,\mathrm{I}_{m_i} + T_i$, où T_i est une matrice triangulaire supérieure stricte, et en particulier nilpotente. Enfin, T_i commute trivialement avec $\lambda_i \,\mathrm{I}_{m_i}$, ce qui conclut la preuve du théorème. □

Remarque 9.9.3. Cette décomposition permet de calculer aisément les puissances d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé (c'est donc possible dans tout corps algébriquement clos), et on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i N^{k-i},$$

et cette formule n'a qu'un nombre fini de termes non-nuls *indépendamment* de k.

9.10 Sous-espace cycliques d'un endormorphisme

Proposition 9.10.1. *Soit $f \in \mathscr{L}(V)$ et $v \in V$ un vecteur propre généralisé d'ordre m. Alors, les vecteurs $u_i = (f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{m-i} v$ $(1 \leq i \leq m)$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Comme précédemment, on voit que le résultat est trivial pour $m = 1$ (car dans ce cas, v est un vecteur propre). On suppose donc que $m \geq 2$. Par définition, on a

$$(f - \lambda\,\mathrm{Id})u_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad (f - \lambda\,\mathrm{Id})u_i = u_{i-1} \;\text{ pour tout }\; 2 \leq i \leq m, \tag{9.10.1}$$

ce qui montre que $f(u_1) = \lambda\, u_1$ et $f(u_i) = u_{i-1} + \lambda\, u_i$ pour tout $2 \leq i \leq m$. Par conséquent, l'espace $U = \mathrm{Vect}\,\{u_1, \cdots, u_m\}$ est invariant par f. Soit à présent $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = 0. \tag{9.10.2}$$

On obtient par (9.10.1)

$$(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{m-1} u_i = \alpha_m u_m,$$

ce qui montre (comme $u_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$ en vertu de la définition de m, l'ordre de la valeur propre généralisée) que $\alpha_m = 0$. Par récurrence, en appliquant $(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{m-i}$ à (9.10.2) pour $2 \leq i \leq m-1$, on obtient $\alpha_m = \alpha_{m-1} = \cdots = \alpha_2 = 0$, et il ne reste plus que l'équation $\alpha_1 u_1 = 0$ qui montre également que $\alpha_1 = 0$ (car $u_1 \neq 0$). Par conséquent, la combinaison linéaire était triviale, ce qui montre que la famille $\{u_1, \cdots, u_m\}$ était linéairement indépendante. □

Cette proposition permet d'introduire la définition suivante.

Définition 9.10.2. Un sous-espace vectoriel U d'un espace vectoriel V est dit cyclique pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(V)$ s'il contient un vecteur propre généralisé d'ordre $m = \dim(U)$.

Remarque 9.10.3. La Proposition 9.10.1 fournit donc une base de tout espace vectoriel cyclique, et la matrice de la restriction de f à U est donnée (si la valeur propre généralisée est $\lambda \in \mathbb{K}$) par

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On dit qu'une telle matrice est un bloc de Jordan de taille m. La forme canonique de Jordan, que nous allons démontrer dans la section suivante, est un algorithme qui permet de décomposer tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé (c'est donc toujours possible si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos [*]) en somme de blocs de Jordan.

Lemme 9.10.4. *Soit V un espace vectoriel de dimension $m \in \mathbb{N}$ sur un corps $\mathbb{K}$. Supposons que $f \in \mathscr{L}(V)$ est λ-cyclique d'ordre m de vecteur propre généralisé $v \in V \setminus \{0\}$, et pour tout $1 \leq i \leq m$, soit $u_i = (f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{m-i} v$. Alors pour tout $1 \leq k \leq m$ç, on a*

1. *$\{u_1, \cdots, u_k\}$ est une base de* $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^k$.
2. *$\{u_1, \cdots, u_{m-k}\}$ est une base de* $\mathrm{Im}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^k$.

9.11 Forme normale de Jordan

Théorème 9.11.1 (Théorème de réduction de Jordan)**.** *Soit V un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$ un endormorphisme dont le polynôme caractéristique $\chi_f \in \mathbb{K}[X]$ est scindé. Alors, V admet une décomposition en somme directe de sous-espaces* cycliques *invariants par f. De plus, le nombre de sous-espace cycliques associés à une valeur propre $\lambda \in \sigma(f)$ est égal à la multiplicité géométrique de λ.*

Démonstration. Soit $\sigma(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\} \subset \mathbb{K}$ le spectre de f. On peut faire deux réductions. Le Théorème de réduction primaire ainsi que le Théorème de Cayley-Hamilton montrent que V est somme directe des espaces $N_{\lambda_i}(f)$ (le sous-espace caractéristique associé à λ_i) et que f est invariant sur $N_{\lambda_i}(f)$ pour tout $1 \leq i \leq r$. On peut donc supposer que f a une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire, que $V = N_\lambda(f)$.

Par conséquent, $g = f - \lambda\,\mathrm{Id}_V$ est nilpotent d'ordre n en vertu du Lemme 9.9.1. De plus, la matrice identité laissant tout sous-espace vectoriel invariant, un sous-espace vectoriel $W \subset V$ est invariant par f si et seulement s'il est invariant par g. De même, W est λ-cyclique pour f si et seulement si W est λ-cyclique pour g. Par conséquent, on peut supposer que f est nilpotent.

On prouve le théorème par récurrence sur l'ordre de nilpotente m de f. Si f est nilpotent d'ordre 1, on a $f = 0$, et la décomposition de Jordan est vérifiée trivialement (dans n'importe quelle base). On suppose donc le théorème démontré pour tous les endomorphismes nilpotents d'ordre $k \leq m-1$, où $m \geq 2$ est un entier fixé. Soit $f \in \mathscr{L}(V)$ un endormorphisme nilpotent d'ordre m. Soit $W = \mathrm{Im}\,(f)$ et $U \subset V$ un sous-espace vectoriel tel que

$$\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Ker}(f) \cap W) \oplus U.$$

[*]. Et donc en particulier pour les matrices complexes, qui sont sans doute celles qui apparaissent le plus en physique.

Les sous-espaces U et W de V sont invariants par f, car $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont trivialement invariants par f. De plus, comme $U \subset \mathrm{Ker}(f)$, on a $f_{|U} = 0$, et la restriction de f à W est nilpotente d'ordre $m-1$ (car pour tout $v \in \mathrm{Im}\,(f)$, il existe $u \in V$ tel que $v = f(u)$, ce qui montre que $f^{m-1}(v) = f^m(u) = 0$). Par hypothèse de récurrence, il existe une décompositon de W en somme directe de sous-espaces invariants cycliques :

$$W = \mathrm{Im}\,(f) = \sum_{i=1}^{p} f(W_i) \qquad \text{et } f(W_i) \subset W_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p.$$

Pour tout $1 \leq i \leq p$, soit $\mathscr{C}_i = \left\{v_1^i, \cdots, v_{m_i}^i\right\}$ une base cyclique de W_i, où $m_i = \dim(W_i)$. Comme $W_i \subset W = \mathrm{Im}\,(f)$, il existe $u_i \in V$ tel que $v_{m_i}^i = f(u_i)$, et on note

$$\mathscr{B}_i = \mathscr{C}_i \cup \{v_i\} = \left\{v_1^i, \cdots, v_{m_i}^i, u_i\right\} \qquad \text{et} \qquad V_i = W_i + K\, v_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_i).$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. La réunion $\mathscr{B} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} \mathscr{B}_i$ est une famille libre de V.
2. $\mathscr{B}_i = \mathscr{C}_i \cup \{v_i\} = \left\{v_1^i, \cdots, v_{m_i}^i, u_i\right\}$ est une base de V_i.
3. V_i est invariant par f.
4. V_i est cyclique d'ordre $m_i + 1$ pour f.

Pour simplifier, on écrit $u_i = v_{m_i+1}^i$. Soit $\alpha_i^j \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i+1} \alpha_i^j v_j^i = 0. \tag{9.11.1}$$

Comme dans la preuve précédente, on obtient

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=2}^{m_i+1} \alpha_i^j v_{j-1}^i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i+1} \alpha_i^j f(v_j^i) = 0.$$

Comme la réunion des familles $\mathscr{C}_i$ est une base de W, on en déduit que $\alpha_i^j = 0$ pour tout $j \geq 2$. Par conséquent, (9.11.1) est réduite à

$$\sum_{j=1}^{m_1+1} \alpha_1^j v_j^i = 0,$$

ce qui montre que $\alpha_1^j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq m_1 + 1$.

La seconde affirmation est donc vérifiée car la famille $\mathscr{B}_i$ est libre et engendre V_i. Enfin, les affirmations 3. et 4. découlent du fait que $f(\mathscr{B}_i) \subset \mathscr{B}_i \cup \{0\}$ et que $\mathscr{B}_i$ est une base cyclique de V_i par construction.

Pour conclure la preuve du théorème, on affirme que

$$V = U \oplus \bigoplus_{i=1}^{p} V_i.$$

En effet, on a

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim(U) + \dim\left(\mathrm{Ker}(f) \cap W\right) = \dim(U) + p,$$

et $\dim(V_i) = \dim(W_i) + 1$. Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}\dim\left(U \oplus \bigoplus_{i=1}^{p} V_i\right) &= \dim(\mathrm{Ker}(f)) - p + \sum_{i=1}^{p}(\dim(W_i) + 1) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \sum_{i=1}^{p} \dim(W_i) \\ &= \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim(W) = \dim(V).\end{aligned}$$

Finalement, on décompose U en une somme arbitraire directe de sous-espaces invariants de dimension 1, ce qui donne la décomposition voulue. $\square$

9.12 Applications du théorème de Jordan

9.12.1 Reformulation matricielle

On peut reformuler le théorème de Jordan sous la forme matricielle suivante.

Théorème 9.12.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$ un endormorphisme. Si le polynôme caractéristique de f est scindé, il existe une base de V dans laquelle la matrice de f est donnée par*

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_{i_1}) & \cdots & \cdots & 0_{m_p} \\ 0_{m_1} & J_{m_2}(\lambda_{i_2}) & \cdots & 0_{m_p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{m_1} & 0_{m_2} & \cdots & J_{m_p}(\lambda_{i_p}) \end{pmatrix} \tag{9.12.1}$$

Le nombre de blocs de Jordan associés à chaque valeur propre λ_i est égal à la multiplicité géométrique de λ_i.

Remarque 9.12.2. Quitte à passer à la clôture algébrique $\overline{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$, le théorème est toujours vérifié, mais les coefficients de la matrice seront *a priori* à valeurs dans $\overline{\mathbb{K}}$ et non dans $\mathbb{K}$. Par exemple, une matrice à coefficients rationnels admet une forme de Jordan dont les coefficients sont des nombres algébriques (racines de polynômes à coefficients entiers ; si le polynôme minimal est de degré au moins 5, la théorie de Galois montre que les coefficients de la matrice ne peuvent pas toujours être exprimés sous forme de radicaux — de nombres rationnels ; par exemple, les racines du polynôme $X^5 + X + 1$ s'expriment sous forme de radicaux, mais pas celles de $X^5 + 3X + 1$).

Définition 9.12.3. Une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme s'écrit sous forme diagonale en blocs de Jordan est dite base de Jordan.

Proposition 9.12.4. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$ un endormorphisme dont le polynôme caractéristique de f est scindé, et supposons que sa matrice de Jordan dans une base de Jordan soit donnée par* (9.12.1)*. Pour tout $1 \leq i \leq p$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $\alpha_{\lambda_i(m)}$ le nombre de blocs de Jordan de taille m associés à la valeur propre λ_i. Alors, on a*

$$\alpha_{\lambda_i}(m) = 2\,\delta_{\lambda_i}(m) - \delta_{\lambda_i}(m+1) - \delta_{\lambda_i}(m-1) \tag{9.12.2}$$

où $\delta_{\lambda_i}(k) = \dim\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V\right)^k$ est la k-ième multiplicité généralisée.

Démonstration. On a $\dim\,\mathrm{Ker}\left(J_m(\lambda_i) - \lambda_i\right)^k = \min\{k, m\}$, ce qui montre que

$$\delta_{\lambda_i}(k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{\lambda_i}(j)\min\{j,k\} \qquad \text{où } n = \dim(V).$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2\,\delta_{\lambda_i}(m) - \delta_{\lambda_i}(m+1) - \delta_{\lambda_i}(m-1) &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\lambda_i}(j)\left(2\,\min\{j,m\} - \min\{j,m-1\} - \min\{j,m+1\}\right) \\ &= \alpha_{\lambda_i}(m). \end{aligned}$$

En effet, si $j \leq m-1$, on a

$$\min\{j,m\} = \min\{j,m-1\} = \min\{j,m+1\} = j,$$

ce qui montre que $2\,\min\{j,m\} - \min\{j,m-1\} - \min\{j,m+1\} = 0$. Si $j = m$, on a

$$2\,\min\{j,m\} - \min\{j,m-1\} - \min\{j,m+1\} = 2m - (m-1) - m = 1.$$

Enfin, si $j \geq m+1$, on a

$$2\,\min\{j,m\} - \min\{j,m-1\} - \min\{j,m+1\} = 2m - (m-1) - (m+1) = 0,$$

et l'identité est donc démontrée. □

Corollaire 9.12.5. *Toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de type* (9.12.1). *De plus, cette matrice est unique à permutation des blocs près.*

Démonstration. Le corps $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, le polynôme caractéristique de A est scindé et on obtient la première partie du corollaire. L'unicité découle de la proposition précédente. □

Définition 9.12.6. Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et s'il existe $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit de type (9.12.1), on dit que A' est la forme canonique de Jordan de A, et on note $A' = J[A]$.

Remarque 9.12.7. Pour parler de *la* matrice de Jordan, il faudrait définir une classe d'équivalence pour prendre en compte l'unicité modulo permutation des blocs, mais nous accepterons à titre exceptionnel cet abus de notation (qui ne saurait porter à confusion).

Proposition 9.12.8. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(V)$ un endormorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. De plus, on suppose que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont respectivement donnés par*

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{m_i} \qquad \text{et} \qquad \mu_f = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{s_i},$$

alors les propriétés suivantes sont vérifiées pour la matrice de Jordan de f :

1. *La taille de chaque bloc de Jordan $J_{p_i}(\lambda_i)$ est au plus égale à s_i.*
2. *Pour tout $1 \leq i \leq r$, il existe au moins un bloc de Jordan $J_{s_i}(\lambda_i)$ de taille s_i.*
3. *Le nombre total de blocs de Jordan pour λ_i est égal à la multiplicité géométrique de λ_i.*
4. *La somme des tailles des blocs de Jordan pour λ_i est égale à la multiplicité algébrique m_i de λ_i.*
5. *La dimension de V est égale à la somme des dimensions de tous les blocs de Jordan.*
6. *Le nombre de blocs de Jordan de chaque taille pour la valeur propre λ_i est déterminé par les multiplicités généralisées $\delta_{\lambda_i}(k)$ $(1 \leq k \leq s_i)$ suivant l'équation* (9.12.2).

Théorème 9.12.9. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $f, g \in \mathscr{L}(V)$ deux endomorphismes de polynôme caractéristique scindé. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f et g sont conjugués.*
2. *On a $\sigma(f) = \sigma(g)$ et $\delta_{f,\lambda}(k) = \delta_{g,\lambda}(k)$ pour toute valeur propre λ et tout entier $k \in \mathbb{N}$.*
3. *f et g ont la même forme de Jordan.*

9.12.2 Exemples explicites

À présent, on calcule des exemples concrets de formes de Jordan.

Exemple 9.12.10. Soit $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que le polynôme caractéristique est donné par $\chi_A = (X-2)^3(X-3)$. Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ (et même sur $\mathbb{Q}$), ce qui implique que A admet une forme de Jordan. On a trois possibilités *a priori* pour la forme de Jordan :

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(3)$$

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J_2(2) \oplus \oplus J_1(2) \oplus J_1(3)$$

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = J_3(2) \oplus J_1(3).$$

Dans ce cas, il suffit de calculer la multiplicité géométrique de 2 pour trouver la forme adéquate. On a

$$A - 2\,\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{I}_4)$, si et seulement si

$$\begin{cases} -2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

On a donc $x_4 = 0$, et en ajoutant $2(L_4)$ à (L_1) et $-3(L_4)$ à (L_2), les deux premières lignes donnent l'unique équation $x_3 + x_4 = 0$, ce qui donne donc $x_3 = 0$, et finalement, l'équation restante est $x_1 + x_2 = 0$. Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{I}_4)$ et la multiplicité géométrique de $\lambda_1 = 2$ est donc égale à 1. Il y a donc un unique bloc de Jordan associé à $\lambda_1 = 0$, ce qui montre que la forme de Jordan de A est donnée par

$$J(A) = J_3(2) \oplus J_1(3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver une base de Jordan, on choisit un vecteur propre quelconque associé à $\lambda_2 = 3$ et on le complète en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide d'une base cyclique associée au vecteur propre $\lambda_1 = 2$. On calcule successivement

$$(A - 2\,\mathrm{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2\,\mathrm{I}_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base de $\mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{I}_4)^2$ est donc donnée par

$$\mathscr{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et une base de $\mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{I}_4)^3$ est donnée par

$$\mathscr{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent, le vecteur $e_4 = (0,0,0,1)^t$ est tel que $e_4 \in \mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{I}_4)^3$ mais $e_4 \notin \mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}_4)^2$. Il va donc nous fournir une base cyclique. On pose donc $u_3 = e_4$, et les deux autres vecteurs de la base cyclique sont donnés par

$$u_2 = (A - 2\,\mathrm{I}_4)u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = (A - 2\,\mathrm{I}_4)u_2 = (A - 2\,\mathrm{I}_4)^2 u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, on a

$$A - 3\,\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ce qui montre qu'on a

$$\mathrm{Ker}(A - 3\,\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}(u_4) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On peut donc prendre la matrice de passage

$$P = \mathrm{Mat}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et on peut vérifier que

$$P^{-1}AP = J(A),$$

où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour finir, on note que le polynôme minimal n'est autre que le polynôme caractéristique (le calcul de $(A-2\,\mathrm{I}_4)^3(A-3\,\mathrm{I}_4)$ est facile à effectuer, mais cela découle aussi de Cayley-Hamilton car $(A-2\,\mathrm{I}_4)^3 \neq 0$), ce qui permet également de retrouver la bonne forme de Jordan en vertu de la Proposition 9.12.8.

On mentionne un second type d'exemple qui nécessite moins de calculs, où l'on peut déterminer la forme de Jordan directement à l'aide du polynôme minimal.

Exemple 9.12.11. Soit $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est donné par $\chi_A = -(X - 2\,i)^3(X - \sqrt{2})^2$ et dont le polynôme minimal est donné par $\mu_A = (X - 2\,i)^2(X - \sqrt{2})$. Alors, on prétend que la forme de Jordan est donnée par

$$J(A) = J_2(2\,i) \oplus J_1(2\,i) \oplus J_1(\sqrt{2}) \oplus J_1(\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2\,i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

En effet, en vertu de la Proposition 9.12.8, il existe un bloc de Jordan de taille 2 associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2i$, et un bloc de Jordan de taille 1 associé à la valeur propre $\lambda_2 = \sqrt{2}$. Par conséquent, le nombre de blocs de Jordan associé à λ_1 (resp. λ_2) étant égal à 3 (resp. 2), il existe un autre bloc de Jordan de taille 1 associé à λ_1 (resp. λ_2), ce qui donne la formule précédente.

9.13 Endomorphismes réels

Sur $\mathbb{R}$, le polynôme caractéristique peut être scindé en monômes d'ordre au plus 2. On a donc le résultat suivant *.

Lemme 9.13.1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel non-nul de coefficient dominant 1. Alors, il existe $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $r, s \in \mathbb{N}$ et $m_i, n_j \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s)$ tels que P admette la factorisation suivante :*

$$P = \prod_{i=1}^{r} \left(X^2 + b_i X + c_i\right)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} (X - a_i), \tag{9.13.1}$$

où pour tout $1 \leq i \leq r$, $X^2 + b_i X + c_i$ est irréductible sur $\mathbb{R}$, i.e., $b_i^2 - 4c_i < 0$.

Définition 9.13.2. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(V)$. Si le polynôme caractéristique χ_f de f admet une factorisation de la forme (9.13.1), on définit son spectre réel de f par

$$\sigma_{\mathbb{R}}(f) = \{a_1, \cdots, a_s\}$$

et son spectre complexe par

$$\sigma_{\mathbb{C}}(f) = \left\{x_1^+, x_1^-, \cdots, x_r^+, \cdots, x_r^-, a_1, \cdots, a_s\right\},$$

où $x_i^\pm = \dfrac{-b_i \pm i\sqrt{4c_i - b_i^2}}{2}$ sont les racines complexes de $X^2 + b_i X + c_i$.

En particulier, on voit que $\lambda \in \sigma_{\mathbb{R}}(f)$ si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}$ et s'il existe un vecteur propre $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $f(v) = \lambda v$. De plus, on a $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}(f)$ si et seulement si $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathbb{C}}(f)$. On dit que $\sigma_{\mathbb{C}}(f) \setminus \sigma_{\mathbb{R}}(f) = \left\{x_1^+, x_1^-, \cdots, x_r^+, \cdots, x_r^-\right\}$ sont les valeurs propres complexes de f. Intuitivement, une valeur propre complexe correspond à une valeur propre d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de f considérée comme matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On va donc introduire une nouvelle notion qui permettra de faire cette extension de manière intrinsèque (sans avoir à choisir une base).

Définition 9.13.3. Soit V un espace vectoriel réel. Le complexifié $V_{\mathbb{C}}$ de V est l'espace vectoriel défini de la manière suivante :

1. Comme groupe abélien, on a $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ muni de la loi de produit abélienne $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.
2. Si $\lambda = \alpha + i\,\beta \in \mathbb{C}$, alors

$$\lambda \cdot (u, v) = (\alpha\, u - \beta\, v, \beta\, u + \alpha\, v).$$

Exemple 9.13.4. 1. Le complexifié de $\mathbb{R}^n$ est $\mathbb{C}^n$.
2. Le complexifié de $\mathbb{R}[X]$ est $\mathbb{C}[X]$.
3. $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est le complexifié de $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque 9.13.5. En particulier, on peut formellement voir les éléments de $V_{\mathbb{C}}$ sous la forme $(u, v) = u + i\,v$, où $i^2 = -1$. C'est ce que nous ferons par la suite.

De même, si $w = u + i\,v \in V_{\mathbb{C}}$, on définit son conjugué $\overline{w}$ par $\overline{w} = u - i\,v$, et on a $w \in V$ si et seulement si $w = \overline{w}$. On dit alors que w est réel. On définit enfin les parties réelles et imaginaires par

$$\mathrm{Re}\,(w) = \frac{u + \overline{u}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(w) = \frac{u - \overline{u}}{2\,i}.$$

$*$. Pour la preuve, factoriser le polynôme sur $\mathbb{C}$ et utiliser la condition $P \in \mathbb{R}[X]$ pour regrouper les termes complexes conjugués

Enfin, si $f \in \mathscr{L}(V)$, on lui associe canoniquement un endormorphisme $f_{\mathbb{C}} \in \mathscr{L}(V_{\mathbb{C}})$ tel que pour tout $u, v \in V$, on ait

$$f_{\mathbb{C}}(u + i\,v) = f(u) + i\,f(v).$$

Proposition 9.13.6. *Soit $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base d'un espace vectoriel réel V. Alors,*

$$\{e_1, \cdots, e_n, i\,e_1, \cdots, i\,e_n\}$$

est une base réelle *de son complexifié $V_{\mathbb{C}} = V + i\,V$. En particulier, si A est la matrice de f dans $\mathscr{B}$, alors c'est aussi la matrice de $f_{\mathbb{C}}$ pour la base* complexe *$\mathscr{B}$.*

Remarque 9.13.7. $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est aussi une base *complexe* de $V_{\mathbb{C}}$, ce qui veut dire que $\dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(V)$, tandis que $\dim_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}}) = 2\,\dim_{\mathbb{R}}(V)$.

Théorème 9.13.8. *Soit V u espace vectoriel réel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(V)$ et $\lambda = \alpha + i\,\beta \in \sigma_{\mathbb{C}}(f)$ une valeur propre complexe ($\beta \neq 0$) de f. Alors, il existe deux vecteurs $u, v \in V$ linéairement indépendants tels que*

$$\begin{cases} f(u) = \alpha\,u - \beta\,v \\ f(v) = \beta\,u + \alpha\,v \end{cases}$$

En particulier, le sous-espace $U = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\,\{u, v\}$ est de dimension 2 et est invariant par f.

Démonstration. Il suffit de montrer l'indépendance linéaire. Si $u = 0$, alors $\beta v = \alpha\,u - f(u) = 0$, et comme $u + i\,v$ est un vecteur propre de $f_{\mathbb{C}}$, on a $v \neq 0$, ce qui implique contrairement à l'hypothèse que $\beta = 0$. Si $v = \gamma\,u$ ($\gamma \in \mathbb{R}$), alors

$$(\beta + \alpha\,\gamma)u = \beta\,u + \alpha\,v = f(v) = f(\gamma\,u) = \gamma\,f(u) = \gamma(\alpha\,u - \beta\,v) = \gamma(\alpha - \beta\,\gamma)u$$

ce qui montre que $\beta = -\beta\,\gamma^2$, ou $\gamma^2 = -1$, ce qui est absurde car $\gamma \in \mathbb{R}$. ☐

Remarque 9.13.9. Si on suppose que $\dim(V) = 2$, alors la matrice de f dans la base $\{u, v\}$ est donnée par

$$K(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Théorème 9.13.10. *Tout endormorphisme f d'un espace vectoriel de dimension 2 admet une base dans laquelle la matrice de f est donnée par*

$$\mathrm{Diag}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad J_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \textit{ou} \qquad K(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{9.13.2}$$

Corollaire 9.13.11. *Tout matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est semblable à l'une des matrices* (9.13.2).

Ce théorème se généralise en toute dimension de la manière suivante.

Théorème 9.13.12. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(V)$. Soit $\alpha_1 \pm \beta_1, \cdots, \alpha_r \pm \beta_r \in \mathbb{C}$ ses valeurs propres complexes (qu'on suppose deux à deux distinctes) et $\gamma_1, \cdots, \gamma_s \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres réelles. Alors, il existe une base de V dans laquelle la matrice de f est égale à*

$$A = K(\alpha_1, \beta_1) \oplus \cdots \oplus K(\alpha_r, \beta_r) \oplus J,$$

où J est une matrice de Jordan de valeurs propres $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$.

Chapitre 10

Espace dual et formes bilinéaires

> L'année 1955 marque un tournant crucial dans mon travail mathématique : celui du passage de l'« analyse » à la « géométrie ». Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de « pays promis » aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller... Et cette impression de richesse accablante, au delà de toute mesure, n'a fait que se confirmer et s'approfondir au cours des ans, jusqu'à aujourd'hui même.
>
> Alexandre Grothendieck, *Récoltes et semailles*

Contrairement à ce que suggère cette citation, on passe à présent à une partie bien plus analytique et même géométrique.

10.1 Espace dual

Définition 10.1.1. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. L'espace dual est l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$, et on le note

$$E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K}).$$

On dit qu'un élément de E' est une *forme linéaire* (et parfois que c'est un covecteur, mais nous n'utiliserons pas cette terminologie).

Remarques 10.1.2.
1. On vérifie sans peine en exercice que cet ensemble est bien un espace vectoriel (la combinaison linéaire d'applications linéaires est encore linéaire).
2. L'espace dual est généralement écrit E^* dans la littérature anglo-saxonne. En revanche, la notation E' est la plus courante dans la littérature francophone.

Exemple 10.1.3.
1. Si $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, il existe un vecteur $a \in \mathbb{K}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on ait
$$f(x) = a \cdot x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$
2. La trace $\mathrm{Tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
3. Soit $E = C^0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles. Alors, l'application $\delta_0 : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $f \in C^0(\mathbb{R})$, on ait $\delta_0(f) = f(0)$ est une forme linéaire. [*]

[*]. Vous la verrez plus tard comme une *mesure* dans la théorie de la mesure, et comme une distribution dans la *théorie des distributions.* C'est, dans un seul précis, la dérivée de la fonction de Heaviside $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}$, la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et 0 sinon.

4. Soit $E = C^0([0,1])$, et $I : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ telle que
$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$
Alors, I est une forme linéaire sur $C^0([0,1])$.
5. Soit
$$L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) = C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$
l'espace des fonctions de carré intégrable et fixons $g \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors, l'application $[g] : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $g \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on ait
$$[g](f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$$
est une forme linéaire sur $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Grâce à l'inégalité élémentaire $2ab \leq a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$, notez que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a
$$|[g](f)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||g(x)|dx \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx < \infty.$$

Proposition 10.1.4. *Tout espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à son dual.*

Démonstration. On a
$$\dim_{\mathbb{K}}(E') = \dim_{\mathbb{K}} \mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = \dim(E) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}}(E).$$
□

Remarque 10.1.5. En dimension infinie, l'espace dual n'est jamais isomorphe à son dual, mais en analyse fonctionnelle, on introduit une notion métrique permettant d'identifier un espace à son dual dans les cas favorables (un tel espace est dit *réflexif*, et l'espace L^2 mentionné dans l'exemple précédent en est un exemple célèbre et très utile). La notion d'espace vectoriel devient plus analytique en dimension infinie, car une application linéaire n'est pas forcément continue !

Proposition 10.1.6. *Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E, et $\{e'_1, \cdots, e'_n\} \subset E'$ la famille telle que pour tout $1 \leq i,j \leq n$, on ait*
$$e'_i(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{si } i = j \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$
Alors, $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est une base de E', dite base duale *de $\{e_1, \ldots, e_n\}$.*

Démonstration. Comme E' est de dimension n, il suffit de montrer que $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ est libre. Soit $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda \cdot (e'_1, \cdots, e'_n) = 0$. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a
$$0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j e'_j(e_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i,$$
ce qui montre que $\lambda = 0$ et que $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ est libre. □

Proposition 10.1.7. *Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ la base duale. Pour tout $x \in E$, on a*
$$x = \sum_{i=1}^n e'_i(x)e_i$$
et pour tout $f \in E'$, on a
$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i)e'_i.$$

Démonstration. En effet, si

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

on en déduit par linéarité que $e_i'(x) = x_i$ (pour tout $1 \leq i \leq n$), et de la même manière, si

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i',$$

on obtient $f(e_i) = f_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. □

Définition 10.1.8. Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire. L'application duale $f' \in \mathscr{L}(F', E')$ est l'application linéaire telle que pour tout $f'(\varphi) = \varphi \circ f$ pour tout $\varphi \in F'$.

Exemple 10.1.9. La définition peut donner le tournis. On remarque que l'application duale est une application linéaire qui prend ses valeurs sur un ensemble d'application linéaire (à valeurs dans un autre ensemble d'applications linéaires). Ce genre de fonctions est parfois appelé fonctionnelle, et on en a vu des exemples plus haut.

Donnons à présent quelques exemples.

1. Soit

$$E = l^1(\mathbb{N}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cap \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

   l'espace des suites sommables, et $f : l^1(\mathbb{N}) \to l^1(\mathbb{N})$ le *décalage à gauche**, telle que pour tout $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$, on ait $f(x) = \{x_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_1, x_2, \dots\}$. Alors, si $\varphi : l^1(\mathbb{N}) \to l^1(\mathbb{N})$ est une application linéaire, on a

$$f'(\varphi)(x) = \varphi(f(x)) = \varphi\left(\{x_1, x_2, \cdots\}\right).$$

   Par exemple, si $\varphi(x) = \{x_0\}_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient $f'(\varphi) = \{x_1\}_{n \in \mathbb{N}}$.

2. On définit comme précédemment l'espace des suites réelles de carré intégrable (à valeurs complexes dans cet exemple) par

$$l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} \cap \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

   Soit $f : l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C}) \to l^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ telle que pour tout $x = \{x_n\}_{n \geq 1} \in l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$, on ait

$$y_n = (f(x))_n = \frac{x_n}{n}.$$

   La suite $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ étant de carré sommable, on en déduit que cette application linéaire est bien définie. En effet, on a comme dans l'exemple (10.1.3)

$$\sum_{n \geq 1} |y_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{|x_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} |x_n|^2 = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} |x_n|^2 < \infty.$$

   Notons qu'il n'est pas utile de connaître la valeur de $\zeta(2)$ †. Alors, si $\varphi \in (l^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{C}))'$, on a pour tout $x \in l^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$

$$f'(\varphi)(x) = \varphi(f(x)) = \varphi\left(\left\{ \frac{x_n}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} \right).$$

*. *Left shift* en anglais.

†. ζ est la fonction zêta de Riemann et le calcul de sa valeur en $s = 2$, connu sous le nom de problème de Bâle, est un résultat célèbre d'Euler ($1735 - 1741$).

On a le résultat élémentaire suivant.

Théorème 10.1.10. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E et $\{f_1, \cdots, f_m\}$ est une base de F, et si A est la matrice de f dans ces bases, alors la matrice de l'application duale $f' \in \mathscr{L}(F', E')$ dans les bases duales est la matrice transposée A^t de A.*

La preuve est laissée en exercice.

Corollaire 10.1.11. *Si E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$, on a $\mathrm{Rang}(f') = \mathrm{Rang}(f)$.*

Démonstration. En effet, le rang d'une matrice et de sa transposée est le même. □

10.2 Accouplement entre espaces vectoriels

Définition 10.2.1. Un *accouplement** entre deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$ est une application bilinéaire $\beta : E \times F \to \mathbb{K}$, c'est-à-dire :

1. Pour tout $y \in F$, $E \to \mathbb{K}, x \mapsto \beta(x,y)$ est une forme linéaire sur E ($\beta(\,\cdot\,, y) \in E'$).
2. Pour tout $x \in E$, $F \to \mathbb{K}, y \mapsto \beta(x,y)$ est une forme linéaire sur F ($\beta(x, \,\cdot\,) \in F'$).

Exemple 10.2.2.

1. Modifions l'exemple précédent sur $L^2(\mathbb{R})$:
$$\beta(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$$
définit un accouplement sur $L^2(\mathbb{R})$.
2. Soit
$$l^1(\mathbb{N}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cap \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$
l'espace des suites réelles sommables et
$$l^\infty(\mathbb{N}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cap \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$
l'espace des suites bornées. Alors, l'application de produit terme à terme est un accouplement :
$$\beta(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n, \qquad x \in l^1(\mathbb{N}), y \in l^\infty(\mathbb{N}).$$
3. Si $1 < p < \infty$, on définit de manière similaire
$$l^p(\mathbb{N}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cap \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\}.$$
Alors, le accouplement précédent est bien défini sur $l^p(\mathbb{N}) \times l^{p'}(\mathbb{N})$ si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. En effet, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$ on a l'inégalité suivante :
$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}. \tag{10.2.1}$$
La fonction log étant concave, on obtient directement
$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log\left(a^p\right) + \frac{1}{p'}\log\left(b^{p'}\right) = \log(a) + \log(b) = \log(ab).$$

*. *Pairing* en anglais.

Il suffit ensuite de prendre l'exponentielle de cette inégalité (la fonction exp étant croissante). Sans utiliser la convexité, par homogénéité, il suffit d'établir l'inégalité suivante :

$$f(t)=\frac{1}{p}t^p+\frac{1}{p'}-t\geq 0 \qquad \text{pour tout } t\geq 0.$$

En effet, on a $p'=\dfrac{p}{p-1}=1+\dfrac{1}{p-1}$, ce qui montre en supposant que $b>0$ et en divisant l'équation par $b^{p'}$ que (10.2.1) est équivalente

$$\frac{a}{b^{\frac{1}{p-1}}}\leq\frac{1}{p}\frac{a^p}{b^{\frac{p}{p-1}}}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}\left(\frac{a}{b^{\frac{1}{p-1}}}\right)^p+\frac{1}{p'}.$$

On pose donc $t=\dfrac{a}{b^{\frac{1}{p-1}}}$. La fonction f est dérivable et on a

$$f'(t)=t^{p-1}-1.$$

Par conséquent, f' est strictement décroissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[1,\infty[$. Comme $f(0)=\dfrac{1}{p'}>0$ et $f(1)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}-1=0$, on en déduit que $f(t)\geq 0$ pour tout $t\geq 0$ (et même que $f(t)>0$ si $t\neq 1$; l'inégalité (10.2.1) est donc stricte si $a^p\neq b^{p'}$).

4. Tout espace vectoriel E admet un accouplement avec son dual, dit *accouplement canonique* :

$$\begin{aligned} V'\times V&\to\mathbb{K}\\ (f,x)&\to f(x). \end{aligned}$$

Il ne dépend pas du choix d'une base.

Accouplement et dualité

À tout accouplement $\beta:E\times F\to\mathbb{K}$ entre espaces vectoriels, on associe par dualité deux applications linéaires $\beta_g:E\to F'$ et $\beta_d:F\to E'$ telles que pour tout $(x,y)\in E\times F$, on ait

$$\beta_g(x)(y)=\beta(x,y) \qquad \text{et} \qquad \beta_d(y)(x)=\beta(x,y).$$

Cela peut sembler un simple jeu de notations, mais ces applications ont des applications intéressantes.

Définition 10.2.3. Un accouplement $\beta:E\times F\to\mathbb{K}$ est dit *non-dégénéré* si $\mathrm{Ker}(\beta_g)=\{0\}$ et $\mathrm{Ker}(\beta_d)=\{0\}$. En d'autres termes, pour tout $x\in E$, on a $\mathrm{Ker}(\beta_g(x))=\{0\}$ et pour tout $y\in F$, on a $\mathrm{Ker}(\beta_d(y))=\{0\}$.

Corollaire 10.2.4. *Soit $\beta:E\times F\to\mathbb{K}$ un accouplement entre espaces vectoriels de dimension finie. Alors, β est non-dégénéré si et seulement β_g et β_d sont des isomorphismes.*

Démonstration. L'injectivité de β_g montre que $\dim(E)\leq\dim(F')=\dim(F)$, tandis que l'injectivité de β_d montre que $\dim(F)\leq\dim(E')=\dim(E)$, ce qui montre que $\dim(E)=\dim(F)$. Les applications β_g et β_d étant injectives à valeurs dans des espaces vectoriels de même dimension, on en déduit que ce sont des isomorphismes. □

La notation $\langle\mathrm{bra},\mathrm{ket}\rangle$ de Dirac

Si $\beta:E\to F\to\mathbb{K}$ est un accouplement, on note parfois

$$\langle x|y\rangle_\beta=\beta(x,y),$$

et l'indice β n'est généralement pas écrit. On a donc

$$\beta_g(x)=\langle x|\cdot\rangle \qquad \text{et} \qquad \beta_d(y)=\langle\cdot|y\rangle,$$

ce que Dirac note de manière encore plus compacte

$$\beta_g(x)=\langle x| \qquad \text{et} \qquad \beta_d(y)=|y\rangle,$$

10.3 Formes bilinéaires sur un espace vectoriel

Définition 10.3.1. Une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E est un accouplement sur $E \times E$, c'est-à-dire, une application bilinéaire $B : E \times E \to \mathbb{K}$.

Exemple 10.3.2.

1. L'accouplement
$$B(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx \qquad f,g \in L^2(\mathbb{R})$$
défini précédemment est une application bilinéaire.
2. Sur $l^2(\mathbb{N})$, on a également un accouplement
$$B(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n \qquad x,y \in l^2(\mathbb{R}).$$
3. De manière plus simple, le produit scalaire (nous étudierons cette notion au chapitre suivant) standard sur $\mathbb{R}^n$ donné par
$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad x,y \in \mathbb{R}^n$$
est une application bilinéaire, et de manière générale, si $\alpha \in \mathbb{R}^n$, l'application $B_\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par
$$B_\alpha(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$$
4. Sur $\mathbb{C}^n$, on définit de même pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^n$ l'application bilinéaire
$$B_\alpha(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i.$$
On verra plus loin la notion de produit scalaire hermitien, mais ce produit « naïf » sur $\mathbb{C}^n$ apparaît également dans de nombreux contextes naturels (courbes nulles, surfaces minimales, etc).
5. L'application suivante
$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \qquad x,y \in \mathbb{C}^n$$
n'est *pas* une forme bilinéaire sur $\mathbb{C}^n$. Le vérifier en exercice.
6. Sur $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la trace fournit une forme bilinéaire $\mathfrak{B}$ via la formule suivante :
$$\mathfrak{B}(A,B) = \mathrm{Tr}(A^t B).$$

Définition 10.3.3. Soit B une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, et soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. La matrice de Gram de B par rapport à la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est donnée par
$$G = \{g_{i,j}\}_{1\le i,j\le n} = \{B(e_i, e_j)\}_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

Si on se donne une base, une forme bilinéaire est donc équivalente à sa matrice de Gram via la formule explicite suivante.

Proposition 10.3.4. *Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base d'un espace vectoriel E et B une forme linéaire sur E de matrice de Gram G. Alors, pour tout $x, y \in E$, on a*
$$B(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j} x_i y_j$$
si G est la matrice de Gram de B.

Démonstration. On a

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

ce qui montre par bilinéarité que

$$B(x,y) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} B(e_i, e_j) x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j} x_i x_j.$$

□

Remarque 10.3.5. On peut aussi écrire de manière plus compacte

$$B(x,y) = x^t \, G \, y = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1} & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Corollaire 10.3.6. *Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ sont deux bases de E et P est la matrice de changement de base, alors les matrices de Gram de B sont liées par l'expression suivante :*

$$G' = P^t G P.$$

En particulier, les matrices G et G' ont le même rang.

Démonstration. Si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ dans la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et $x = (x'_1, \cdots, x'_n)$ dans la base $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$, alors $x = Px'$, ce qui montre que pour tout $x, y \in E$, on a

$$B(x,y) = x^t G y = (Px')^t \, G(Py') = (x')^t P^t G P y'$$

et comme $B(x,y) = (x')^t G' y$, on en déduit que $G' = P^t G P$. □

Définition 10.3.7. Le rang d'une forme bilinéaire est le rang de sa matrice de Gram dans une base quelconque.

Définition 10.3.8. Deux matrices $G, G' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites congruentes s'il existe une matrice inversible P telle que $G' = P^t G P$.

10.4 Produit tensoriel

Le produit tensoriel permet de considérer les applications bilinéaires comme des applications linéaires. La définition peut paraître abstraite, et nous l'utiliserons assez peu, mais elle est à connaître car elle permet de comprendre la structure algébrique se cachant derrière de nombreuses notions analytiques qui sont de grande importance en physique (une métrique — riemannienne ou lorentzienne — est une section d'un produit tensoriel du fibré cotangent par lui-même, les différentielles quadratiques (holomorphes) sont aussi des sections du fibré symétrique, etc). On suivra l'approche de Federer ([5, **1.1.1**]). Il n'est *pas* important de retenir les preuves (assez abstraites et qu'on ne rencontrera plus dans la suite du cours), mais il serait bon de s'habituer à rencontrer des énoncés aussi abstraits que la définition suivante. L'abstraction n'est qu'un problème d'habitude. * Une droite mathématique (qui est sans épaisseur) est *déjà* une abstraction, et elle n'a pas de sens physique. Mais c'est justement cette abstraction qui devrait aider les physiciens à comprendre la structure du réel physique (théorie des cordes). Les nombres complexes en sont une autre, et la théorie des catégories n'en est pas une moins utile. Si nous n'étudierons pas cette dernière dans ce cours, certaines de ses idées fondamentales seront utilisées dans la suite de cette partie. Ce qu'Alexandre Grothendieck nommait avec regret *abstract nonsense*, c'est une manière des plus amusantes de faire des mathématiques.

∗. "Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them." John von Neumann.

Définition 10.4.1. Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels réels V_1 et V_2 est l'espace vectoriel $V_1 \otimes V_2$ qui est muni d'une application bilinéaire $\mu : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ et qu'on caractérise de la manière suivante : pour toute application bilinéaire $f : V_1 \times V_2 \to W$ à valeurs dans un espace vectoriel W, il existe une unique application linéaire $g : V_1 \otimes V_2 \to W$ telle que $f = g \circ \mu$.

En d'autres termes, le produit tensoriel permet de transformer les applications bilinéaires en applications linéaires (et c'est également vrai pour les applications multilinéaires). L'application g n'est autre que l'application linéaire qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \otimes V_2 \arrow[d, dashed, "g"] \\
V_1 \times V_2 \arrow[ur, "\mu"] \arrow[r, "f"] & W
\end{tikzcd}$$

Pour tout $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, on a donc $f(v_1, v_2) = g(\mu(v_1, v_2)) = g(v_1 \otimes v_2)$. En effet, on note généralement $\mu(v_1, v_2) = v_1 \otimes v_2$.

C'est probablement le premier exemple non-trivial de diagramme commutatif que vous verrez, et l'existence du produit tensoriel correspond à ce qu'on appelle une propriété universelle en théorie des catégories.

Existence et unicité du produit tensoriel. L'unicité à isomorphisme près est immédiate. En effet, si $V_1 \otimes V_2$ et $V_1 \widehat{\otimes} V_2$ sont deux produits tensoriels, si $\mu : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ est l'application universelle définie ci-dessus, il existe une application linéaire $\nu : V_1 \widehat{\otimes} V_2 \to V_1 \otimes V_2$ telle que $\mu = \nu \circ \widehat{\mu}$, où $\widehat{\mu} : V_1 \times V_2 \to V_1 \widehat{\otimes} V_2$. De même, il existe une application linéaire $\widehat{\nu} : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \widehat{\otimes} V_2$ telle que $\widehat{\mu} = \widehat{\nu} \circ \mu$. Par conséquent, on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \widehat{\otimes} V_2 \arrow[d, dashed, "\nu"] \\
V_1 \times V_2 \arrow[ur, "\widehat{\mu}"] \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\widehat{\mu}"'] & V_1 \otimes V_2 \arrow[d, dashed, "\widehat{\nu}"] \\
 & V_1 \widehat{\otimes} V_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & V_1 \otimes V_2 \arrow[d, dashed, "\widehat{\nu}"] \\
V_1 \times V_2 \arrow[ur, "\mu"] \arrow[r, "\widehat{\mu}"] \arrow[dr, "\mu"'] & V_1 \widehat{\otimes} V_2 \arrow[d, dashed, "\nu"] \\
 & V_1 \otimes V_2
\end{tikzcd}$$

On a donc $\mu = \nu \circ \widehat{\nu} \circ \mu$ et $\widehat{\mu} = \widehat{\nu} \circ \nu \circ \widehat{\mu}$, ce qui implique, les applications μ et $\widehat{\mu}$ étant surjectives (cela se verra dans la construction, mais on peut le vérifier directement), que $\nu \circ \widehat{\nu} = \mathrm{Id}_{V_1 \otimes V_2}$ et $\widehat{\nu} \circ \nu = \mathrm{Id}_{V_1 \widehat{\otimes} V_2}$. L'isomorphisme linéaire entre $V_1 \otimes V_2$ et $V_1 \widehat{\otimes} V_2$ est donc fourni par $\widehat{\nu}$ (dont l'inverse est ν).

Passons à présent à l'existence. Soit F l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles sur $V_1 \times V_2$ qui s'annulent presque partout (c'est-à-dire, pour toute valeur sauf pour un nombre fini). En d'autres termes, on a $f \in F$ si $f : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$ et s'il existe un ensemble fini $S \subset V_1 \times V_2$ tel que $f = 0$ sur $(V_1 \times V_2) \setminus S$. Considérons à présent l'application $\varphi : V_1 \times V_2 \to F$ telle que $\varphi(v_1, v_2) = \delta_{v_1, v_2}$, i.e.,

$$\varphi(v_1, v_2)(w_1, w_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } w_1 = v_1 \text{ et } w_2 = v_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'idée du produit tensoriel est de « rendre linéaire » cette application via un passage au quotient. Soit $G \subset F$ l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{cases} (x, y) \mapsto \varphi(x, v_2) + \varphi(y, v_2) - \varphi(x + y, v_2) & v_2 \in V_2 \\ (x, y) \mapsto \varphi(v_1, x) + \varphi(v_1, y) - \varphi(v_1, x + y) & v_1 \in V_1 \\ (x, y) \mapsto \varphi(\lambda\, x, y) - \lambda\, \varphi(x, y) & \lambda \in \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \varphi(x, \lambda\, y) - \lambda\, \varphi(x, y) & \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le produit scalaire $V_1 \otimes V_2$ de V_1 par V_2 est donc fourni par le quotient $V_1 \otimes V_2 = F/G$, et $\mu = \pi \circ \varphi$, où $\pi : F \to F/G$ est la projection canonique.

Le raisonnement est typique de l'approche utilisée en théorie des catégories. On cherche un objet satisfaisant certaines propriétés qui le rendent unique, puis on démontre son existence (ce type de raisonnement est également connu sous le nom « d'analyse-synthèse »).

Le produit tensoriel est distributif sur les sommes directes (ce qui justifie sa notation, et nous permettra de construire une base simple).

Proposition 10.4.2. *Si $V_1 = P \oplus Q$ est en somme directe, on a l'isomorphisme $V_1 \otimes V_2 \simeq (P \otimes V_2) \oplus (Q \otimes V_2)$.*

Démonstration. Si $f : V_1 \times V_2 \to W$ est une application bilinéaire, elle induit deux applications bilinéaires $f_P = P \times V_2 \to W$ et $f_Q : Q \times V_2 \to W$ telles que $f = f_P \circ \pi_P + f_Q \circ \pi_Q$, où $\pi_P : P \to V_1$ et $\pi_Q : Q \to V_1$ sont les projections canoniques. Les notations sont un peu lourdes, mais on entend simplement que pour tout $x \in V_1$, on a une décomposition unique $x = p + q$ ($p \in P$, $q \in Q$), ce qui donne par linéarité

$$f(x, y) = f(p, y) + f(q, y) \qquad \text{pour tout } \; y \in V_2.$$

En particulier, on en déduit que pour tout $(x, y) \in V_1 \times V_2$, on a par la propriété universelle du produit scalaire

$$\widehat{f}(x \otimes y) = f(x, y) = f_P(p, y) + f_Q(q, y) = \widehat{f_P}(p \otimes y) + \widehat{f_Q}(q \otimes y),$$

où $\widehat{f} : V_1 \otimes V_2 \to W$, $\widehat{f_P} : P \otimes V_2 \to W$ et $\widehat{f_Q} : Q \otimes V_2 \to W$ (notez que dans cette inégalité, $\otimes$ représente trois produits tensoriels distincts). Par unicité du produit tensoriel, on en déduit l'isomorphisme souhaité. □

Corollaire 10.4.3. *Si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont des bases de V_1 et V_2, alors les éléments $b_1 \otimes b_2$ (où $(b_1, b_2) \in \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$) forment une base de $V_1 \otimes V_2$. En particulier, on a*

$$\dim (V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \dim(V_2). \tag{10.4.1}$$

Corollaire 10.4.4. *L'ensemble des formes bilinéaires sur un espace vectoriel V de dimension finie n est isomorphe l'espace vectoriel $V' \otimes V'$ de dimension n^2 dont la base est donnée par*

$$\left\{e_i' \otimes e_j', 1 \leq i, j \leq n\right\} \tag{10.4.2}$$

si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de V et $\{e_1', \cdots, e_n'\}$ est la base duale.

En particulier, la matrice de Gram représente les composantes d'une forme application bilinéaire dans la base donnée en (10.4.2).

10.5 Formes bilinéaires symétriques et antisymétriques

Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

Définition 10.5.1. Une forme bilinéaire $f : V \times V \to \mathbb{K}$ est dite symétrique si $f(x, y) = f(y, x)$ pour tout $(x, y) \in V \times V$, et antisymétrique si $f(x, y) = -f(y, x)$ pour tout $(x, y) \in V$.

La formule

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left(f(x, y) + f(y, x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x, y) - f(y, x)\right)$$

montre que toute forme bilinéaire est somme d'une forme symétrique et d'une forme antisymétrique, pourvu que la caractéristique du corps ne soit pas égale à 2. Ces notions prendront toute leur importance dans le chapitre suivant sur les produits scalaires.

Théorème 10.5.2. *Soit $f : V \times V \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire* ***symétrique*** *sur un espace vectoriel de dimension finie. Alors, il existe une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de V telle que $f(e_i, e_j) = 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$. Une telle base est dite orthogonale pour f (ou f-orthogonale).*

Démonstration. Si $\dim(V) = 1$, il n'y a rien à démontrer. En supposant par récurrence la propriété établie pour tous les espaces vectoriels de dimension $k \leq n-1$, on fixe un vecteur non-nul $e_1 \in V$ tel que $f(e_1, e_1) \neq 0$ (s'il n'en existe pas, il n'y a rien à démontrer, car si $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in V$, on a $f = 0$; en effet, $2f(x,y) = f(x,y) + f(y,x) = f(x+y, x+y)$ par symétrie), et on définit

$$W = \mathrm{Ker}(f(e_1, \cdot\,) = V \cap \{x : f(e_1, x) = 0\}\,.$$

C'est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, et il existe par récurrence une base $\{e_2, \cdots, e_n\}$ qui est orthogonale pour f. La base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est la base cherchée. □

La matrice de Gram d'une forme bilinéaire dans une telle base est donnée par

$$G = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(e_n,e_n) \end{pmatrix}.$$

Corollaire 10.5.3. *Soit f une forme bilinéaire symétrique sur un espace de dimension finie. Alors, il existe $r \in \{0, \cdots, n\}$, $\alpha_1, \cdots \alpha_r \in \mathbb{K}^*$ et $f_1, \cdots, f_r \in V'$ tels que*

$$f = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, f_i \otimes f_i.$$

De plus, r est le rang de la matrice de Gram.

Cela découle du résultat précédent et du Corollaire 10.4.2.

10.6 Formes quadratiques

10.6.1 Considérations générales

On suppose à nouveau que la caractéristique du corps de base $\mathbb{K}$ est différente de 2. Dans cette partie, on étudie des objets très naturels qu'on rencontrera aussi bien en analyse (calcul de dérivée seconde) qu'en théorie des nombres (formes quadratiques sur les corps finis ; [9]).

Définition 10.6.1. Une forme quadratique est une application $Q : V \to \mathbb{K}$ pour laquelle il existe une forme bilinéaire symétrique $f : V \times V \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $v \in V$, on ait $Q(v) = f(v,v)$.

Le terme quadratique vient de la propriété suivante : $Q(\lambda\, v) = \lambda^2\, Q(v)$ pour tout $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V$.

On peut retrouver f à partir de Q en utilisant l'une des formules de polarisation suivantes (de preuve immédiate) :

$$\begin{aligned} f(v,w) &= \frac{1}{4}\left(Q(v+w) - Q(v-w)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q(v+w) - Q(v) - Q(w)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q(v) + Q(w) - Q(v-w)\right). \end{aligned}$$

Exemple 10.6.2. 1. Sur $L^2(\mathbb{R})$,

$$Q(f) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx$$

est une forme quadratique, et sur $L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$,

$$Q(f) = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx$$

en est une autre.

2. Sur $\mathbb{R}^n$, si $\{\alpha_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice *symétrique*,

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}\, x_i x_j$$

est une forme quadratique.

Le Théorème (10.5.3) permet de réécrire toute forme quadratique définie sur un espace de dimension finie de manière très simple.

Théorème 10.6.3. *Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie n. Alors, il existe $r \in \{0, \cdots, n\}$, $\alpha_1, \cdots \alpha_r \in \mathbb{K}^*$ et $f_1, \cdots, f_r \in V'$ linéairement indépendantes tels que*

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, f_i^2.$$

Définition 10.6.4. L'entier r est le rang de la forme quadratique Q. On dit que Q est non-dégénérée si $r = n = \dim(V)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la signature de Q est le couple (p, s), où p désigne le nombre de α_i strictement positif, et s est le nombre de α_i strictement négatifs.

On va à présent montrer comment réécrire de manière simple les formes quadratiques à l'aide d'un algorithme dû à Gauss.

10.6.2 Réduction d'une forme quadratique par la méthode de Gauss

Sans perte de généralité (quitte à changer les indices), Q s'écrit

$$Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\, x_1 x_i + Q'(x_2, \cdots, x_n),$$

et on distingue deux cas. Si $\alpha_1 \neq 0$, on complète le carré :

$$\alpha_1 x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\, x_1 x_i = \alpha_1 \left(x_1 + \frac{1}{2\alpha_1} \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i \right)^2 - \frac{1}{4\alpha_1} \left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i \right)^2,$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} Q(x) &= \alpha_1 \left(x_1 + \frac{1}{2\alpha_1} \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i \right)^2 + Q'(x_2, \cdots, x_n) - \frac{1}{4\alpha_1} \left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i \right)^2 \\ &= \alpha_1 \left(x_1 + \frac{1}{2\alpha_1} \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i \right)^2 + \widehat{Q}(x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

Si $\alpha_1 = 0$, on écrit

$$x_1 x_i = \frac{1}{4} \left((x_1 + x_i)^2 - (x_1 - x_i)^2 \right)$$

ce qui nous ramène au cas précédent.

Chapitre 11

Produits scalaires et espaces vectoriels euclidiens

11.1 Définitions fondamentales

> La Nature est un temple où de vivants piliers
> Laissent parfois sortir de confuses paroles ;
> L'homme y passe à travers des forêts de symboles
> Qui l'observent avec des regards familiers.
>
> Charles Baudelaire, *Les Fleurs du mal.*

Soit V un espace vectoriel réel.

Définition 11.1.1. Un produit scalaire (généralisé) sur V est une application $g : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique, et définie-positive :

(1) **Bilinéarité** : pour tout $x \in V$, la fonction $V \to V, y \mapsto g(x,y)$ est une application linéaire, et pour tout $y \in V$, la fonction $V \to V, x \mapsto g(x,y)$ est une application linéaire.
(2) **Symétrie** : $g(x,y) = g(y,x)$ pour tout $(x,y) \in V^2$.
(3) **Positivité** : $g(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in V$.
(4) **Définition** : on a $g(x,x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarques 11.1.2. 1. Grâce à la symétrie, la bilinéarité est équivalente à la propriété suivante :

$$g(\lambda\, x + y, z) = \lambda\, g(x,z) + g(y,z) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in V^2. \tag{11.1.1}$$

2. On notera plus simplement $\langle x, y \rangle_g = g(x,y)$ (ou $\langle x, y \rangle$ s'il n'y a pas d'ambiguïtés).

Exemple 11.1.3. 1. Le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\langle x, y \rangle = x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i. \tag{11.1.2}$$

On le note souvent $x \cdot y = \langle x, y \rangle$. La vérification des différentes propriétés, assez immédiate, est laissée au lecteur.

2. Sur $\mathbb{R}^3$, on définit le produit scalaire suivant :

$$g((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + \frac{1}{2}yy' + \frac{1}{2}xz + \frac{1}{2}x'z' + zz'.$$

Toutes les propriétés sont immédiates sauf la positivité. Mais on vérifie que

$$g((x,y,z),(x',y',z')) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xz + z^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{2}(x^2+2xz+z^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2 + (x+z)^2\right) \geq 0,$$

ce qui montre qu'en effet, g est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. Attention, même en algèbre linéaire, les méthode d'analyse apparaissent !

3. Sur l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et plus généralement, sur $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on définit un produit scalaire par la formule

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^t B\right). \tag{11.1.3}$$

En effet, si $A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on a

$$(A^t B)_{j,j} = \sum_{i=1}^{m} (A^t)_{j,i} b_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} b_{i,j},$$

ce qui donne

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^t B\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}. \tag{11.1.4}$$

On voit donc que ce produit scalaire n'est autre que le produit scalaire précédent sur $\mathbb{R}^{mn}$, après identification de $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{mn}$ à l'aide d'un homéomorphisme linéaire.

4. Soit

$$l^2(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \cap \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \right\} \tag{11.1.5}$$

l'espace des suites réelles de carré sommable sur $\mathbb{Z}$ (on définit de la même manière les suites de carré sommable sur $\mathbb{N}$ et même sur un ensemble arbitraire I, mais on notera qu'une série convergente ne peut avoir qu'un nombre dénombrable de termes non-nuls (exercice !), et on se ramènera usuellement à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{N}$). On remarque que $l^2(\mathbb{Z})$ est un espace vectoriel. En effet, on a par l'inégalité élémentaire $2\,a\,b \leq a^2 + b^2$ (où $a, b \in \mathbb{R}$) pour tout $x, y \in l^2(\mathbb{Z})$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n + y_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(|x_n|^2 + 2\,x_n\,y_n + |y_n|^2\right) \leq 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} |y_n|^2 < \infty.$$

On définit sur $l^2(\mathbb{Z})$ le produit scalaire

$$\langle x, y\rangle_{l^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, y_n. \tag{11.1.6}$$

Il faut vérifier que $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{l^2}$ est bien défini sur $l^2(\mathbb{Z})$, mais cela découle à nouveau de l'inégalité triangulaire. Les autres propriétés se vérifient facilement (exercice).

5. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (pas forcément borné), et définissons

$$\mathrm{L}^2(I) = C^0(I) \cap \left\{ f : \int_I |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \tag{11.1.7}$$

l'espace L^2 des fonctions de carré intégrable sur I (on se restreint aux fonctions continues, mais la définition est également valable pour les fonctions dont le carré est Riemann-intégrable). Un produit scalaire est donné comme précédemment par la formule

$$\langle f, g\rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_I f(x) g(x)\, dx. \tag{11.1.8}$$

Vous verrez dans le cours d'Analyse III que grâce à la théorie de séries de Fourier, on peut identifier $l^2(\mathbb{Z})$ avec $\mathrm{L}^2([0,1])$ tout en préservant les produits scalaires associés. Cet espace commun (pourvu qu'on considère les versions à coefficients complexes, ce qui modifie un peu la notion de produit scalaire ; voir Chapitre 12) n'est autre que l'espace de Hilbert cher à la physique quantique.

Définition 11.1.4. Si g est un produit scalaire sur V, on définit sa norme sur V par

$$\|x\|_g = \sqrt{g(x,x)} = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \tag{11.1.9}$$

et on notera de façon usuelle $\|x\| = \|x\|_g$ quand le produit scalaire g est clairement identifié.

Remarque 11.1.5. La norme est bien définie et $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ car $\langle x, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in V$.

L'inégalité suivante est d'une importance capitale en Algèbre et surtout en Analyse (largement basée sur cette inégalité, l'intégration par parties, et — attention, ça devient plus pointu — la formule de la co-aire ; [5, **3.2.11**]).

Théorème 11.1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit V un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$. Alors, pour tout $x, y \in V$, on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,. \tag{11.1.10}$$

De plus, on a égalité dans (11.1.10) *si et seulement si x et y sont colinéaires.*

Démonstration. La preuve est astucieuse, mais on donnera une preuve un peu moins astucieuse dans le cas des exemples précédents. Soit $P(t) = \|t\,x + y\|^2$. Alors, on a par bilinéarité et symétrie

$$P(t) = \langle t\,x + y, t\,x + y\rangle = t^2\,\|x\|^2 + t\,\langle x, y\rangle + t\,\langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2\,t^2 + 2\,\langle x, y\rangle\,t + \|y\|^2\,.$$

On remarque que P est un polynôme de degré 2, et positif car la norme $\|\cdot\|$ est positive. Par conséquent, le déterminant de P est négatif ou nul, ce qui donne bien

$$\Delta = (2\,\langle x, y\rangle)^2 - 4\,\|y\|^2\,\|x\|^2 = 4\left(|\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\right) \leq 0,$$

et fournit l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Enfin, on a égalité si et seulement si $\Delta = 0$, ce qui implique que P admet une racine réelle. Par conséquent, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(t_0) = \|t_0\,x + y\|^2 = 0$, et comme le produit scalaire est défini-positif, cette condition implique que $y = -t_0\,x$. ☐

On aimerait donner une preuve directe de ce résultat pour $l^2(\mathbb{Z})$ ou $\mathrm{L}^2(I)$. On considère donc la quantité

$$R = \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(I)}\,\|g\|^2_{\mathrm{L}^2(I)} - \langle f, g\rangle^2_{\mathrm{L}^2(I)} = \left(\int_I |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_I |g(y)|^2 dy\right) - \left(\int_I f(z)g(z)dz\right)^2.$$

Grâce au théorème de Fubini, on a

$$\left(\int_I |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_I |g(y)|^2 dy\right) = \int_{I\times I} |f(x)|^2|g(y)|^2 dx\,dy,$$

et

$$\left(\int_I f(z)g(z)dz\right)^2 = \left(\int_I f(x)g(x)dx\right)\left(\int_I f(y)g(y)dy\right) = \int_{I\times I} f(x)g(x)f(y)g(y)dx\,dy.$$

Par conséquent, on obtient

$$R = \int_{I\times I} \left(|f(x)|^2|g(y)|^2 - f(x)f(y)g(x)g(y)\right) dx\,dy.$$

Cette expression n'est pas immédiatement positive, mais les variables x et y étant muettes, on a également

$$\begin{aligned} R &= \int_{I\times I} \left(\frac{1}{2}|f(x)|^2|g(y)|^2 + \frac{1}{2}|f(y)|^2|g(x)|^2 - f(x)f(y)g(x)g(y)\right) dx\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{I\times I} |f(x)g(y) - g(x)f(y)|^2 dx\,dy \geq 0. \end{aligned}$$

Cette preuve permet non seulement de retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais donne aussi le cas d'égalité car $R = 0$ si et seulement si $f(x)g(y) - g(x)f(y) = 0$ pour tout $x, y \in I$, et cette condition est vérifiée si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\, g$. La preuve est virtuellement identique dans le cas de $l^2(\mathbb{Z})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz, parmi ses nombreuses applications, permet de montrer l'inégalité de Heisenberg en mécanique quantique (nous donnerons une preuve dans l'appendice). Notons pour finir qu'on peut réécrire l'identité précédente sous la forme plus algébrique (et plus élégante) suivante :

$$\left(\int_I |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_I |g(y)|^2 dy\right) = \left(\int_I f(z)g(z)dz\right)^2 + \frac{1}{2}\int_{I\times I}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y)\end{pmatrix}\right|^2 dx\, dy, \qquad (11.1.11)$$

ce qui montre plus clairement qu'on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si f et g sont linéairement dépendantes.

Proposition 11.1.7. *La norme vérifie les propriétés suivantes pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y) \in V^2$:*

(1) $\|x\| \geq 0$ *et* $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$ (*définie-positive*).
(2) $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$ (*homogénéité*).
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*).

Démonstration. En effet $\|x\| = 0$ si et seulement $\langle x, x\rangle = 0$, ce qui implique que $x = 0$ par propriété du produit scalaire. De même, on a

$$\|\lambda\, x\| = \sqrt{\langle \lambda\, x, \lambda\, x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda|\, \|x\|\,.$$

Pour la troisième propriété, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\,.$$

La preuve s'ensuit car $\|\cdot\| \geq 0$. □

Remarque 11.1.8. Plus généralement, une application qui vérifie les propriétés ci-dessus est une norme. Si $1 \leq p < \infty$, on vérifie (ce n'est pas immédiat !) que sur l'espace l^p défini par

$$l^p(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \cap \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p < \infty \right\},$$

l'application suivante

$$\|x\|_{l^p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $l^p(\mathbb{Z})$ (l'inégalité triangulaire est connue sous le nom d'*inégalité de Minkowski* ; sa preuve est basée sur un argument de convexité et l'inégalité de Hölder). De même, si

$$l^\infty(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \cap \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < \infty \right\},$$

alors on vérifie facilement que

$$\|x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$$

est une norme sur $l^\infty(\mathbb{Z})$. On peut montrer que $\|\cdot\|_{l^p(\mathbb{Z})}$ est induite par un produit scalaire (*i.e.* $\|x\|_{l^p(\mathbb{Z})} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pour tout $x \in l^p(\mathbb{Z})$, où $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ est un produit scalaire) si et seulement si $p = 2$.

Digression 11.1.9. Grâce aux propriétés du produit scalaire, on montre facilement (voir la Proposition 11.1.10 ci-dessous) que si $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, alors pour tout $x, y \in V$, le produit scalaire est donné par

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\,\|x + y\|^2 - \frac{1}{2}\,\|x\|^2 - \frac{1}{2}\,\|y\|^2\,.$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de polarisation.* Prenons par exemple $p=1$. Alors, le produit scalaire éventuel sur l^1 est donné par

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|x_n+y_n|\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|x_n|\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|y_n|\right)^2.$$

Il faut montrer que cette expression ne définit *pas* un produit scalaire. Soit $x,y\in l^1(\mathbb{Z})$ tels que $x_0=y_0=1$, $x_1=-y_1=1$, et $x_n=y_n=0$ pour $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$. On a $\langle x,y\rangle=\frac{1}{2}2^2-\frac{1}{2}2^2-\frac{1}{2}2^2=-2$, mais

$$\begin{aligned}\langle\lambda\, x,y\rangle&=\frac{1}{2}\left(|\lambda+1|+|\lambda-1|\right)^2-\frac{1}{2}\left(|\lambda|+1\right)^2-\frac{1}{2}2^2=\frac{1}{2}\left(2\lambda^2+2\right)+|\lambda^2-1|-\frac{1}{2}(\lambda^2+5)-|\lambda|\\&=\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{3}{2}+|\lambda^2-1|-|\lambda|.\end{aligned}$$

Si $\lambda>1$, on en déduit que

$$\langle\lambda\, x,y\rangle=\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{3}{2}+\lambda^2-1-\lambda=\frac{3}{2}\lambda^2-\lambda-\frac{5}{2},$$

ce qui montre que $\langle\lambda\, x,y\rangle=\lambda\,\langle x,y\rangle=-2\,\lambda$ si et seulement si

$$\frac{3}{2}\lambda^2+\lambda-\frac{5}{2}=0,$$

mais comme $\lambda>1$, on a

$$\frac{3}{2}\lambda^2+\lambda>\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2},$$

et l'identité n'est donc jamais vérifiée si $\lambda>1$, ce qui montre que $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ n'est pas un produit scalaire (en réalité, il suffisait de montrer que la propriété d'homogénéité échoue pour une seule valeur de λ). En exercice, on pourra essayer de généraliser ce résultat à $l^p(\mathbb{Z})$ pour $p\neq 2$.

De même, on peut montrer que si $1\leq p<\infty$ *, et

$$\mathrm{L}^p(I)=C^0(I)\cap\left\{f:\int_I|f(x)|^p dx<\infty\right\},\tag{11.1.12}$$

alors la quantité suivante

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(I)}=\left(\int_I|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\tag{11.1.13}$$

est une norme sur $\mathrm{L}^p(I)$. Pour $p=\infty$, on définit sur l'espace

$$\mathrm{L}^\infty(I)=C^0(I)\cap\left\{f:\sup_{x\in I}|f(x)|<\infty\right\}\tag{11.1.14}$$

la norme

$$\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(I)}=\sup_{x\in I}|f(x)|.\tag{11.1.15}$$

On montre de même (mais c'est un peu plus difficile) que $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(I)}$ est induite par un produit scalaire si et seulement si $p=2$.

---

*. On peut aussi définir les espaces L^p pour $0<p<1$, mais ils ont des propriétés assez surprenantes, et ce ne sont pas des espaces normés ! En effet, si les deux premières propriétés des normes sont bien vérifiées, les normes sur ces espaces L^p vérifient l'inégalité triangulaire *inverse* pour les fonctions positives ! On peut le vérifier facilement pour $l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})$ (voir l'appendice ci-après). Ces espaces, dits quasi-normés, peuvent être considérés d'un point de vue géométrique comme peu réguliers (on pourra se référer aux Chapitres III et IV du traité d'Haïm Brezis [2] ; pour les exercices, il faut se reporter à la version anglaise de ce livre).

Proposition 11.1.10 (Formule de polarisation)**.** *Soit* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *la norme issue d'un produit scalaire* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$*. Alors, pour tout* $(x,y)\in V^2$*, on a*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x+y\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right). \tag{11.1.16}$$

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|x+y\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) &= \frac{1}{2}\langle x+y, x+y\rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\right) - \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 = \langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

La seconde formule se prouve de manière analogue. □

Définition 11.1.11. Soit V un espace vectoriel réel. On définit :

(1) La **distance** entre deux éléments x et y de V par

$$d(x,y) = \|x-y\|. \tag{11.1.17}$$

(2) L'**angle** $\alpha\in[0,\pi]$ entre deux vecteurs $x,y\in V\setminus\{0\}$ par la formule implicite

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}. \tag{11.1.18}$$

On note $\angle(x,y)=\alpha\in[0,\pi]$ l'angle entre x et y.

(3) L'**aire** du parallélogramme $\mathcal{P}(x,y)\subset V$ de vecteurs directeurs $x,y\in V$ par

$$\mathrm{Aire}(\mathcal{P}(x,y)) = \sqrt{\|x\|^2\,\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2}. \tag{11.1.19}$$

Remarques 11.1.12. 1. En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$-1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \leq 1,$$

ce qui montre que l'angle α est bien défini, et que $\alpha\in[0,\pi]$.

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre également que l'expression $\sqrt{\|x\|^2\,\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2}$ est bien définie pour tout $x,y\in V$. De plus, on peut montrer que

$$\mathrm{Aire}(\mathcal{P}(x,y)) = \|x\|\,\|y\|\sin(\alpha).$$

Une justification de cette formule en dimension 3 s'effectue à l'aide du produit vectoriel (en dimension supérieure, il faut utiliser le produit extérieur en lieu et place du produit vectoriel). On rappelle que si $x,y\in\mathbb{R}^3$, alors

$$x\times y = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}x_1 & y_2\\ x_2 & y_1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\,y_3 - x_3\,y_2\\ x_3\,y_1 - x_1\,y_3\\ x_1\,y_2 - x_2\,y_1\end{pmatrix}.$$

On définit l'aire du parallélogramme $\mathcal{P}(x,y)$ engendré par les vecteurs $x,y\in\mathbb{R}^3$ par

$$\mathrm{Aire}(\mathcal{P}(x,y)) = \|x\times y\|. \tag{11.1.20}$$

On vérifie facilement que pour tous $r,s\in\mathbb{R}$, si $x=(r,0,0)^t$ et $y=(0,s,0)^t$, alors $x\times y=(0,0,rs)^t$, ce qui donne bien la formule de l'aire d'un rectangle. La formule (11.1.20) coïncide avec la formule précédente (11.1.19) en vertu de l'identité de Lagrange :

$$\|x\times y\| = \sqrt{\|x\|^2\,\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2}. \tag{11.1.21}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\|x \times y\|^2 &= (x_2\,y_3 - x_3\,y_2)^2 + (x_1\,y_3 - x_3\,y_1)^2 + (x_1\,y_2 - y_1\,x_2)^2 \\
&= x_1^2\left(y_2^2 + y_3^2\right) + x_2^2\left(y_1^2 + y_3^2\right) + x_3^2\left(y_1^2 + y_2^2\right) - 2\,x_1\,x_2\,y_1\,y_2 - 2\,x_1\,x_3\,y_1\,y_3 - 2\,x_2\,x_3\,y_2\,y_3 \\
&= x_1^2\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) + x_2^2\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) + x_3^2\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) \\
&- \left(x_1^2\,y_1^2 + x_2^2\,y_2^2 + x_3^2\,y_3^2 + 2\,x_1\,x_2\,y_1\,y_2 + 2\,x_1\,x_3\,y_1\,y_3 + 2\,x_2\,x_3\,y_2\,y_3\right) \\
&= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) - (x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3)^2 \\
&= \|x\|^2\,\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2.
\end{aligned}$$

Proposition 11.1.13. *Soit E un espace vectoriel euclidien. Alors, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, on a*

(1) *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).*

(2) *Si x et y sont non-nuls, alors $\angle(x, y) = \dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \qquad \text{(théorème de Pythagore).}$$

Remarque 11.1.14. La première propriété est également vérifiée en dimension infinie, et permet de définir en général la notion de distance. Si X est un ensemble non-vide, une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est une distance si elle vérifie les propriétés suivantes :

(1) pour tout $x, y \in X$, on a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $y = x$ (définition).

(2) pour tout $x, y \in X$, on a $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).

(3) pour tout $x, y, z \in X$, on a $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

On dit que l'espace (X, d) est un espace normé.

Démonstration. (1) On a par inégalité triangulaire

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z - (y - z)\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| = d(x, z) + d(z, y).$$

(2) Cette propriété découle de la formule de polarisation (Proposition 11.1.10) et de la définition de l'angle.

□

Proposition 11.1.15. *Soit E un espace vectoriel euclidien, et $a, b \in E \setminus \{0\}$. Alors, il existe $c, d \in E$ tels que $\angle(a, d) = \dfrac{\pi}{2}$, c est colinéaire à a, et $b = c + d$.*

Démonstration. On cherche c et d sous la forme $c = \lambda\,a$ et $d = b - c$. La condition $\angle(a, d) = \dfrac{\pi}{2}$ s'écrit

$$0 = \langle a, d\rangle = \langle a, b - c\rangle = \langle a, b\rangle - \lambda\,\|a\|^2\,,$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|^2}.$$

Par conséquent, on a

$$c = \lambda\,a = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|^2}a \qquad \text{et} \qquad d = b - \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|^2}a.$$

□

11.2 Orthogonalité dans un espace vectoriel euclidien

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Définition 11.2.1. (1) On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$, et on note $x \perp y$.

(2) Deux sous-espaces vectoriels $V, W \subset E$ sont dits orthogonaux si pour tout $(v, w) \in V \times W$, on a $v \perp w$.

(3) Une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de E est dite orthogonale si $e_i \perp e_j$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$.

(4) Une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et E est dite orthonormée si elle est orthogonale et si $\|e_i\| = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Lemme 11.2.2. *Soit E un espace vectoriel euclidien et $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormée de E.*

(2) *$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.*

(3) *La matrice de Gram du produit scalaire est la matrice identité.*

Démonstration. La matrice de Gram est donnée par $\{\langle e_i, e_j\rangle\}_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et le lemme est donc une simple reformulation des définitions. ☐

Théorème 11.2.3. *Tout espace vectoriel euclidien E admet une base orthonormée.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $n = \dim(E)$. Si $n = 1$, on choisit un vecteur $v \in E \setminus \{0\}$, et la base orthonormée est donnée par $\left\{e_1 = \dfrac{v}{\|v\|}\right\}$.

Supposons la propriété prouvée pour tous les espaces euclidiens de dimension au plus $n-1$, et soit E en espace euclidien de dimension n. Soit $w \in E \setminus \{0\}$ un vecteur fixé, et $f \in E'$ la forme linéaire telle que

$$f(v) = \langle v, w\rangle \qquad \text{pour tout } v \in E.$$

Alors, f n'est pas identiquement nulle (car $f(w) = \|w\|^2 \neq 0$ par hypothèse), ce qui montre que f est surjective. Par conséquent, le théorème du rang implique que $\dim \mathrm{Ker}(f) = n-1$. Il existe donc par hypothèse de récurrence une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f) \subset E$, et notons la $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$. Soit

$$e_n = \frac{w}{\|w\|^2}.$$

Alors, on a $f(e_n) = 1 \neq 0$, ce qui implique que $e_n \notin \mathrm{Ker}(f)$, et par définition de f, on a également $\langle e_i, e_n\rangle = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Par conséquent, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormée de E. ☐

Remarque 11.2.4. Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormée de E, alors pour tout $x, y \in E$, on a

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^n \langle y, e_j\rangle e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle.$$

En d'autres termes, le choix d'une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien de dimension n correspond au choix d'une isométrie $E \to \mathbb{R}^n$ (voir ci-dessous pour une définition).

11.2.1 Projections orthogonales sur un sous-espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel euclidien. On vérifie immédiatement que la restriction du produit scalaire sur V à un sous-espace vectoriel $W \subset V$ est également un produit scalaire, ce qui montre que tout sous-espace vectoriel est euclidien. En particulier, W admet une base orthonormée. Le théorème suivant permet de construire explicitement la projection orthogonale de E sur V.

Théorème 11.2.5. *Soit V un espace vectoriel euclidien et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de base $\{e_1, \cdots, e_m\}$ qu'on suppose orthonormée. On note $P_W : V \to V$ l'application définie par*

$$P_W(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i. \tag{11.2.1}$$

Alors, P_W vérifie les propriétés suivantes :

(1) *P_W est linéaire.*
(2) *$P_W(x) = x$ si et seulement si $x \in W$.*
(3) *$W = \mathrm{Im}(P_W)$.*
(4) *$P_W \circ P_W = P_W$.*
(5) *Le noyau de P_W est donnée par*

$$\mathrm{Ker}(P_W) = V \cap \{v : \langle w, v \rangle = 0 \text{ pour tout } w \in W\}. \tag{11.2.2}$$

C'est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à W et on le note

$$W^{\perp} = \mathrm{Ker}(P_W) = V \cap \{v : \langle w, v \rangle = 0 \text{ pour tout } w \in W\}. \tag{11.2.3}$$

(6) *W et $W^{\perp}$ sont supplémentaires dans V,* i.e. $V = W \oplus W^{\perp}$.

Définition 11.2.6. Soit V un espace vectoriel euclidien et $W_1, W_2 \subset V$ des sous-espaces vectoriels de V. On dit que V est la somme directe de W_1 et W_2 si $W = W_1 \oplus W_2$ et $W_1 \perp W_2$. On note dans ce cas $V = W_1 \boxplus W_2$.

Le théorème précédent montre en particulier que $V = W \boxplus W^{\perp}$.

Démonstration. (du Théorème 11.2.3)

(1) Cela découle de la linéarité du produit scalaire par rapport à la première composante.
(2) Si $x \in W$, alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, e_i.$$

De plus, comme la base $\{e_1, \cdots, e_m\}$ est orthonormale, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$, ce qui montre bien que $x = P_W(x)$. Réciproquement, si $x = P_W(x)$, alors $x \in \mathrm{Vect}(\{e_1, \cdots, e_m\})$, ce qui montre que $x \in W$. L'équivalence est donc démontrée.
(3) On a déjà par construction (voir la preuve de (2)) $P_W(V) \subset W$, et comme $(P_W)_W = \mathrm{Id}_W$ (la restriction de P_W à W est l'identité), on a également $W \subset P_W(V)$. L'égalité ensembliste est donc établie.
(4) En effet, $P_W(x) = x$ pour tout $x \in W$, et on applique ce résultat à $x = P_W(y)$ pour $y \in V$ arbitraire.
(5) $P_W(x) = 0$ si et seulement si $\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$, et comme $\{e_1, \cdots, e_m\}$ est une base de W, on a donc $\langle w, x \rangle = 0$ pour tout $w \in W$.
(6) En effet, pour tout $x \in V$, on a $x = P_W(x) + x - P_W(x)$, et

$$\begin{aligned}\langle P_W(x), x - P_W(x) \rangle = \langle P_W(x), x \rangle - \|P_W(x)\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i, x \right\rangle - \|P_W(x)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle^2 - \|P_W(x)\|^2 = 0.\end{aligned}$$

De plus, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a

$$\langle x - P_W(x), e_i \rangle = \left\langle x - \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_j, e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j \rangle \delta_{i,j} = 0,$$

ce qui montre bien que $x - P_W(x) \in W^{\perp}$, tandis que $P_W(x) \in W$ par la discussion précédente.

□

Remarques 11.2.7. (0) La notion de projection orthogonale permet notamment de définir une notation d'aire (ou de longueur de courbe) en toute dimension ([5, **2.10.4**]).

(1) L'application P_W ne dépend que du sous-espace $W \subset V$ et non pas du choix de la base orthonormée. Cette application est la **projection orthogonale** de V sur W. On dit aussi que P_W est un projecteur orthogonal. Par exemple, dans le cas où $W = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 = V$ est l'axe (Ox), l'application $P_W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \{0\}$ est donnée par $P_W(x, y) = (x, 0)$ qu'on identifie à la projection $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ sur le premier facteur.

(2) Si on note $P_{W^\perp}$ la projection sur $W^\perp$, alors on a

$$P_W + P_{W^\perp} = \mathrm{Id}_V, \quad P_W \circ P_{W^\perp} = P_{W^\perp} \circ P_W = 0. \tag{11.2.4}$$

(3) Si $\{e_1, \cdots, e_m\}$ est une base de W et $\{e_{m+1}, \cdots, e_n\}$ est une base de $W^\perp$, alors la matrice de P_W est donnée par *

$$M(P_W) = \mathrm{I}_m \oplus 0_{n-m} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.2.5}$$

Proposition 11.2.8. *Soit V un espace vectoriel euclidien et W un sous-espace vectoriel. Alors, pour tout $x \in V$, $P_W(x)$ est le point le plus proche de x. Plus précisément, on a*

$$\|x - P_W(x)\| \leq \|x - y\| \quad \textit{pour tout } y \in W, \tag{11.2.6}$$

avec égalité si et seulement si $y = P_W(x)$.

Démonstration. En effet, on a

$$\|x - P_W(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|P_W(x)\|^2 - 2\langle x, P_W(x)\rangle = \|x\|^2 - \|P_W(x)\|^2.$$

Soit à présent $y \in W$. On a en particulier $y = P_W(y)$, et

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|P_W(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle P_W(x), P_W(y)\rangle + \|P_W(y)\|^2,$$

et l'inégalité $\|x - P_W(x)\| \leq \|x - y\|$ est donc équivalente à

$$\|x\|^2 - \|P_W(x)\|^2 \leq \|x\|^2 - 2\langle P_W(x), P_W(y)\rangle + \|P_W(y)\|^2$$

qui est vérifiée si et seulement si

$$2\langle P_W(x), P_W(y)\rangle \leq \|P_W(x)\|^2 + \|P_W(y)\|^2.$$

Cette inégalité n'est autre que la combinaison de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'inégalité élémentaire $2\,a\,b \leq a^2 + b^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$. En effet, on a

$$2\langle P_W(x), P_W(y)\rangle \leq 2\,\|P_W(x)\|\,\|P_W(y)\| \leq \|P_W(x)\|^2 + \|P_W(y)\|^2.$$

De plus, on a égalité si et seulement $P_W(x) = P_W(y) = y$, ce qui conclut la preuve de la proposition. □

*. Un autre raisonnement pour obtenir cette matrice est le suivant : la relation $P_W^2 = P_W$ implique que le polynôme minimal de P_W est $R(t) = t^2 - t = t(t-1)$. Il est scindé à racines simples, ce qui implique que P_W est diagonalisable et les multiplicités géométriques des valeurs propres sont m pour $\lambda_1 = 1$ et $n - m$ pour $\lambda_2 = 0$.

Corollaire 11.2.9. *La distance d'un point x d'un espace vectoriel euclidien V à un sous-espace vectoriel W est donnée par*

$$\mathrm{dist}(x, W) = \|x - P_W(x)\| = \left\|x - \sum_{i=1}^{m}\langle x, e_i\rangle e_i\right\| \tag{11.2.7}$$

si $\{e_1, \cdots, e_m\}$ est une base orthonormée de W.

Digression 11.2.10. On peut retrouver ce résultat avec les notions d'analyse que vous avez pu voir dans le cours d'Analyse II. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$f(x) = \|x - x_0\|^2 .$$

On cherche à minimiser f sur l'ensemble W. On calcule à présent le gradient de f. Soit $h \in \mathbb{R}^n$. Alors, on a

$$f(x+h) = \|x + h - x_0\|^2 = \|x - x_0\|^2 + 2\langle h, x - x_0\rangle + \|h\|^2 ,$$

ce qui montre que $\nabla f(x) = 2(x - x_0)$. La fonction f étant coercive, elle admet un minimum global sur W, et on a

$$\inf_{x\in W} f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} f(P_W(y)),$$

et comme P_W est une application linéaire, si $g = f \circ P_W$, on a

$$g(y) = \left\|\sum_{i=1}^{m}\langle y, e_i\rangle e_i - x_0\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\langle y, e_i\rangle^2 - 2\sum_{i=1}^{m}\langle y, e_i\rangle\langle x_0, e_i\rangle + \|x_0\|^2 .$$

Par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq m$

$$\nabla_{e_i} g(y) = \nabla g(y) \cdot e_i = 2\langle y, e_i\rangle - 2\langle x_0, e_i\rangle = 2\langle y - x_0, e_i\rangle.$$

En complétant la base $\{e_1, \cdots, e_m\}$ en une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, on voit que $\nabla_{e_i} g = 0$ pour tout $m+1 \leq i \leq n$. Par conséquent, la condition nécessaire $\nabla g = 0$ s'écrit $y - x_0 \perp W$, ce qui montre bien que

$$\inf_{x\in W} f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} f(P_W(y)) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} g(y) = g(x_0) = f(P_W(x_0)),$$

car pour tout $v \in W^\perp$, on a $g(x_0 + v) = g(x_0)$.

11.2.2 Symétries orthogonales

Soit V un espace vectoriel eucliden et W un sous-espace vectoriel.

Définition 11.2.11. On appelle symétrie orthogonal à travers W l'endormorphisme $S_W : V \to V$ défini par

$$S_W = 2\,P_W - \mathrm{Id}_W. \tag{11.2.8}$$

Si $\{e_1, \cdots, e_m\}$ est une base orthonormée de W, alors on a

$$S_W(x) = -x + 2\sum_{i=1}^{m}\langle x, e_i\rangle e_i. \tag{11.2.9}$$

Le Théorème 11.2.5 implique le résultat suivant.

Corollaire 11.2.12. *La symétrie orthogonale S_W possède les propriétés suivantes :*

(1) *S_W est linéaire.*

(2) $S_W(x) = x$ *pour tout* $x \in W$ *et* $S_W(x) = -x$ *pour tout* $x \in W^\perp$.

(3) $S_W^2 = \mathrm{Id}$, i.e. S_W *est une involution (c'est-à-dire, une fonction égale à son propre inverse).*

Remarque 11.2.13. Un autre exemple d'involution (non-linéaire) sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ est l'inversion

$$\iota(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

C'est également une application conforme, c'est-à-dire, qui préserve les angles (mais elle ne préserve pas les distances !).

Remarquons que la décomposition de V en somme orthogonale $V = W \boxplus W^\perp$ signifie que tout vecteur $v \in V$ s'écrit d'une manière unique comme $v = w + w_\perp$, où $w \in W$ et $w_\perp \in W^\perp$. On a alors

$$S_W(v) = S_W(w + w_\perp) = w - w_\perp.$$

Si $\{e_1, \cdots, e_m\}$ et $\{e_{m+1}, \cdots e_n\}$ sont des bases orthonormées de W et $W^\perp$ respectivement, alors la matrice de S_W est donnée par

$$M(S_W) = \mathrm{I}_m \oplus (-\mathrm{Id})_{n-m} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

11.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 11.3.1. *Soit* $\{v_1, \cdots, v_m\}$ *une famille libre d'un espace euclidien* E. *Alors, il existe une famille orthonormale* $\{u_1, \cdots, u_m\}$ *telle que :*

(1) $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$ *pour tout* $1 \leq i, j \leq m$.

(2) $u_k \in \mathrm{Vect}(\{v_1, \cdots, v_k\})$ *pour tout* $1 \leq k \leq m$.

(3) $\langle u_k, v_k \rangle > 0$ *pour tout* $1 \leq k \leq m$.

De plus, ces conditions déterminent la famille $\{u_1, \cdots, u_m\}$ *et la construction est* « algorithmique » *.

Démonstration. **Étape 1.** On prend $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$.

Étape *k*. Supposons par récurrence qu'on a construit une famille $\{u_1, \cdots, u_{k-1}\}$ associée à $\{v_1, \cdots, v_{k-1}\}$ et satisfaisant aux conditions du théorème. Alors, on définit

$$W_{k-1} = \mathrm{Vect}(\{v_1, \cdots, v_{k-1}\}) = \mathrm{Vect}(\{u_1, \cdots, u_{k-1}\})$$

et

$$\widehat{u}_k = v_k - P_{W_{k-1}}(v_k) = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, u_i \rangle u_i.$$

Alors, pour tout $1 \leq i \leq k-1$, on a

$$\langle \widehat{u}_k, u_i \rangle = \left\langle v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, u_j \rangle u_j, u_i \right\rangle = \langle v_k, u_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, u_j \rangle \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

*. On utilise des guillemets car *algorithmique* n'a pas un sens précis en mathématiques.

car la famille $\{u_1, \cdots, u_{k-1}\}$ est orthonormée. Par conséquent, on a $\widehat{u}_k \perp W_{k-1}$, ce qui montre que $\{u_1, \cdots, u_{k-1}, \widehat{u}_k\}$ est une famille libre, et on définit donc

$$u_k = \frac{\widehat{u}_k}{\|\widehat{u_k}\|},$$

ce qui fournit une famille orthonormée $\{u_1, \cdots, u_k\}$. La preuve par récurrence est donc complète. □

Définition 11.3.2. On dit que cette base orthonormée a été obtenue à partir de $\{v_1, \cdots, v_m\}$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Explicitement, la famille orthonormée est fournie par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \widehat{u}_1 = v_1, & u_1 = \dfrac{\widehat{u}_1}{\|u_1\|} \\ \quad\vdots & \\ \widehat{u}_k = v_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, u_i \rangle u_i, & u_k = \dfrac{\widehat{u}_k}{\|\widehat{u}_k\|} \qquad (2 \leq k \leq m) \\ \quad\vdots & \\ \widehat{u}_m = v_m - \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} \langle v_m, u_i \rangle u_i, & u_m = \dfrac{\widehat{u}_m}{\|\widehat{u}_m\|} \end{cases}$$

11.4 Isométries d'un espace vectoriel euclidien

Définition 11.4.1. Soit E un espace vectoriel euclidien. Une isométrie de E est une application $f : E \to E$ qui préserve les distances, c'est-à-dire telle que

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \text{pour tout } x, y \in E. \tag{11.4.1}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier à partir de cette définition que les similitudes de $\mathbb{R}^n$ forment un groupe et que les isométries forment un sous-groupe normal de ce groupe.

Théorème 11.4.2. *Une application $f : E \to E$ est une isométrie si et seulement s'il existe un vecteur $b \in E$ et une application linéaire $f_0 : E \to E$ tels que $f = f_0 + b$ et pour tout $x \in E$, on a*

$$\|f_0(x)\| = \|x\|. \tag{11.4.2}$$

On dit que f_0 est la partie linéaire de l'isométrie f et $b = f(0)$ le vecteur de translation de f.

Démonstration. Quitte à remplacer f par $\widehat{f} = f - f(0)$ (qui est encore une isométrie car $\widehat{f}(x) - \widehat{f}(y) = f(x) - f(y)$ pour tout $x, y \in E$), on peut supposer que $f(0) = 0$. En particulier, pour tout $x \in E$, on a

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|.$$

Par conséquent, une variante de la formule de polarisation (Proposition 11.1.10) implique que pour tout $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) - \frac{1}{2}\|f(x) - f(y)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 - \|y\|^2\right) - \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que f est linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, y, z \in E$. On a

$$\langle f(\lambda x + y), f(z) \rangle = \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = \lambda \langle f(x), f(z) \rangle + \langle f(y), f(z) \rangle$$

$$= \langle \lambda\, f(x) + f(y), f(z)\rangle. \tag{11.4.3}$$

Soit

$$v = f(\lambda\, x + y) - (\lambda\, f(x) + f(y))\,.$$

L'identité (11.4.3) montre que $\langle v, f(z)\rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Par conséquent, en l'appliquant successivement à $z_1 = x$, $z_2 = y$, et $z_3 = \lambda\, x + y$, on obtient par linéarité du produit scalaire par rapport au second facteur

$$\begin{aligned}\|v\|^2 = \|\lambda\, f(x) + f(y) - f(\lambda\, x + y)\|^2 &= \langle v, \lambda\, f(x) + f(y) - f(\lambda\, x + y)\rangle \\ &= \lambda\,\langle v, f(x)\rangle + \langle v, f(y)\rangle - \langle v, f(\lambda\, x + y)\rangle \\ &= \lambda\,\langle v, f(z_1)\rangle + \langle v, f(z_2)\rangle - \langle v, f(z_3)\rangle = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que $v = \lambda\, f(x) + f(y) - f(\lambda\, x + y) = 0$, ce qui montre la linéarité de f. □

Corollaire 11.4.3. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie pour la distance associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$f(x) = A\, x + b.$$

De plus, si G est la matrice de Gram du produit scalaire donc la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $A^t G A = G$.

Démonstration. La matrice A correspondant à la matrice de l'application f_0 est inversible car une isométrie est injective par définition de la norme, ce qui montre qu'elle est également surjective. On calcule à présent

$$(A^t G A)_{i,j} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,i} g_{k,l} a_{l,j} = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k, \sum_{l=1}^{n} a_{l,j} e_l \right\rangle = \langle A e_i, A e_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = G_{i,j}.$$

□

Ce résultat permet d'introduire la notion de matrice orthogonale (qui est un exemple fondamental de groupe de Lie, objets centraux en physique).

Définition 11.4.4. Soit $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite G-orthogonale si $A^t G A = G$, et on note

$$\mathrm{O}(G) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cap \left\{A : A^t G A = G\right\}$$

le groupe des matrices G-orthogonales.

Remarques 11.4.5. (1) On montre facilement que $\det(A) = \pm 1$ pour tout $A \in \mathrm{O}(G)$. De plus, $\mathrm{O}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(2) Si $G = \mathrm{I}_n$, on note plus simplement

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(\mathrm{I}_n) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cap \left\{A : A^t A = \mathrm{I}_n\right\}.$$

Ce groupe est connu sous le nom de **groupe orthogonal**, et son étude détaillée fera l'objet de la section suivante.

11.5 Le groupe orthogonal

Proposition 11.5.1. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *$A \in \mathrm{O}(n)$, i.e. $A^t A = \mathrm{I}_n$.*
(2) *A est inversible et $A^{-1} = A^t$.*
(3) *$\|A\, x\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

(4) $\langle A\,x, A\,y\rangle = \langle x, y\rangle$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^n$.
(5) *Les colonnes de* A *forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$.
(6) *Les lignes de* A *forment une base orthonormée de* $\mathbb{R}^n$.
(7) *Pour tout vecteur* $b \in \mathbb{R}^n$*, l'application affine* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto A\,x + b$ *est une isométrie.*

De plus, le groupe $\mathrm{O}(n)$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *et pour tout* $A \in \mathrm{O}(n)$*, on a* $\det(A) = \pm 1$.

Démonstration. Les propriétés (1) et (2) sont directement équivalentes. De même, (3) et (4) sont équivalentes par la formule de polarisation (Proposition 11.1.10), tandis que (3) et (4) sont équivalentes à (7) grâce au Corollaire 11.4.3. Montrons à présent que (2) $\Longrightarrow$ (4). On a par le calcul du Corollaire 11.4.2

$$\langle Ae_i, Ae_j\rangle = (A^t A)_{i,j} = \delta_{i,j},$$

et le résultat général s'ensuit par bilinéarité. Enfin, comme le déterminant est un endormorphisme multiplicatif, on a

$$1 = \det(\mathrm{I}_n) = \det\left(A^t A\right) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)^2,$$

ce qui montre que $\det(A) = \pm 1 \neq 0$, et implique en particulier que $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Le déterminant fournit en particulier un homomorphisme de groupes $\det : \mathrm{O}(n) \to \{1, -1\} \simeq \mathbb{Z}_2$ dont le noyau est le **groupe spécial orthogonal** :

$$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{Ker}\det = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cap \left\{A : A^t A = \mathrm{I}_n \ \text{ et } \ \det(A) = 1\right\}. \tag{11.5.1}$$

Décrivons à présent de manière plus précise le groupe orthogonal.

Proposition 11.5.2. *Pour tout* $A \in \mathrm{SO}(2)$*, il existe* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tel que*

$$A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \tag{11.5.2}$$

et pour tout $A \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ (i.e. *tel que* $\det(A) = -1$)*, il existe* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tel que*

$$A = S_{\frac{\theta}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta). \end{pmatrix} \tag{11.5.3}$$

La matrice R_θ *représente une rotation d'angle* θ *et* $S_{\frac{\theta}{2}}$ *la réflection à travers la droite vectorielle formant un angle* $\dfrac{\theta}{2}$ *avec le premier vecteur* e_1 *de la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

Remarque 11.5.3. On a donc un isomorphisme de groupes entre $\mathrm{SO}(2)$ et $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Plus précisément, l'application $f : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \to (\mathrm{SO}(2), \times), \theta \to R_\theta$ est un isomorphisme de groupes (vérifier en exercice que $R_{\theta+\varphi} = R_\theta R_\varphi$ pour tout $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$; il s'agit d'une agréable[*] application de la formule d'Euler).

Démonstration. On peut procéder directement sans utiliser les propriétés précédentes. Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on calcule

$$A^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & a\,b + c\,d \\ a\,b + c\,d & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

De plus, la condition $\det(A) = 1$ donne l'équation $a\,d - b\,c = 1$. Par conséquent, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} a\,d - b\,c = 1 \\ \ \ a^2 + c^2 = 1 \\ \ \ b^2 + d^2 = 1 \\ a\,b + c\,d = 0 \end{cases} \tag{11.5.4}$$

$*$. Mais oui !

Les deuxièmes et troisièmes équations montrent qu'il existe $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} a = \cos(\theta) \\ c = \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b = \cos(\varphi) \\ d = \sin(\varphi). \end{cases}$$

Les deux équations restantes de (11.5.4) peuvent donc se réécrire comme

$$\begin{cases} \cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi) = 1 \\ \cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi) = 0. \end{cases}$$

En utilisant la formule d'Euler (ou de manière équivalente, les formules d'addition), on montre facilement que ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \sin(\varphi - \theta) = 1 \\ \cos(\varphi - \theta) = 0. \end{cases}$$

ce qui donne $\varphi = \theta + \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Comme $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$ et $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$, le résultat annoncé s'ensuit. Dans le cas où $\det(A) = -1$, la preuve est exactement analogue et laissée en exercice. $\square$

Remarque 11.5.4. Pour voir que R_θ correspond en effet à une rotation d'angle θ, on peut passer par l'analyse complexe comme suit. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^{i\theta}z$. La fonction f_θ correspond à une rotation d'angle θ. En écrivant $z = x + i\,y$, on a donc

$$\begin{aligned} f_\theta(z) = e^{i\,\theta}z &= (\cos(\theta) + i\,\sin(\theta))\,(x + i\,y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y) + i\,(\sin(\theta)x + \cos(\theta)y) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. Ce calcul permet de retrouver rapidement la forme de la matrice R_θ (difficile de se souvenir de l'endroit où le signe est négatif, et il est facile d'intervertir le cosinus et le sinus dans la formule).

Proposition 11.5.5. *Toute matrice $A \in \mathrm{O}(3)$ est semblable à une matrice du type :*

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{11.5.5}$$

On va prouver ce résultat de manière générale.

Théorème 11.5.6. *Soit V un espace vectoriel euclidien de dimension n et $f : V \to V$ une isométrie linéaire. Alors, il existe une base orthonormée de V dans laquelle la matrice f prend la forme*

$$\begin{aligned} M(f) &= \mathrm{I}_r \oplus (-\mathrm{I}_s) \oplus R_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus R_{\theta_m} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & & & & \\ & -\mathrm{I}_s & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} \cos(\theta_m) & -\sin(\theta_m) \\ \sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11.5.6}$$

Lemme 11.5.7. *Soit $f : V \to V$ une isométrie linéaire. Supposons que $W \subset V$ est invariant par f. Alors, l'orthogonal $W^\perp \subset V$ de W est également invariant par f.*

Démonstration. Par hypothèse, on a $f(W) \subset W$, et montrons que $f(W) = W$. En effet, comme f est une isométrie, $\mathrm{Ker}(f_W) = 0$ (*i.e.* le noyau de la restriction f_W de f à W est nul), ce qui montre par le théorème du rang que $f_W : W \to W$ est surjective. Soit à présent $y \in W^{\perp}$ et $x \in W$. Alors, on a $f^{-1}(x) \in W$, ce qui implique que

$$\langle f(y), x\rangle = \langle f(y), f(f^{-1}(x))\rangle = \langle y, f^{-1}(x)\rangle = 0,$$

ce qui prouve que $f(y) \in W^{\perp}$. □

Démonstration. (du Théorème 11.5.6) On démontre le théorème par récurrence sur n. En dimension 1, les isométries sont données par $f_{\pm}(v) = \pm v$, et pour $n = 2$, il s'agit de la Proposition 11.5.2. Si $A = R_\theta$, il n'y a rien à prouver, et si $A = S_{\frac{\theta}{2}}$, alors on vérifie facilement que si $\theta \neq 0 \pmod{\pi\mathbb{Z}}$, on a

$$P^{-1}S_{\frac{\theta}{2}}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & 1-\cos(\theta) \\ -(1-\cos(\theta)) & \sin(\theta) \end{pmatrix}. \tag{11.5.7}$$

Pour trouver la matrice P, on peut travailler directement comme dans la preuve de la Proposition 11.5.2. Supposons à présent que $n \geq 3$ et que la propriété est vérifiée pour tout $1 \leq k \leq n-1$. La décomposition en forme normale de Jordan montre qu'il existe un sous-espace $W \subset V$ invariant par f (et de dimension 1 ou 2). Le Lemme 11.5.7 montre que $W^{\perp}$ est également invariant par f. On distingue trois cas.

Cas 1. $\dim(W) = 1$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\{e_2, \cdots, e_n\}$ de $W^{\perp}$ dans laquelle la matrice de $f_{W^{\perp}}$ est donnée par

$$\mathrm{I}_r \oplus (-\mathrm{I}_s) \oplus R_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus R_{\theta_m},$$

où $r + s + 2m = n - 1$. Soit $e_n \in W$ un vecteur de norme 1. Alors, on a $f(e_1) = e_1$ ou $f(e_1) = -e_1$, ce qui montre que la matrice de f dans la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est donnée respectivement par

$$M(f) = \mathrm{I}_{r+1} \oplus (-\mathrm{I}_s) \oplus R_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus R_{\theta_m}$$

et

$$M(f) = \mathrm{I}_r \oplus (-\mathrm{I}_{s+1}) \oplus R_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus R_{\theta_m}.$$

Case 2. $\dim(W) = 2$ et f_W est une symétrie. Alors, il existe une droite $L \subset W$ invariante par f et nous sommes ramenés au cas précédent.

Cas 3. $\dim(W) = 2$ et la restriction f_W de f à W est une rotation d'angle θ. Par hypothèse de récurrence, si $\{e_1, \cdots, e_{n-2}\}$ est une base de $W^{\perp}$, la matrice de $f_{W^{\perp}}$ est donnée par

$$\mathrm{I}_r \oplus (-\mathrm{I}_s) \oplus R_{\theta_1} \oplus \cdots R_{\theta_m}.$$

Par conséquent, si $\{e_{n-1}, e_n\}$ est une base orthonormée de W, $M(f_W) = R_\theta$, et on obtient finalement

$$M(f) = \mathrm{I}_r \oplus (-\mathrm{I}_s) \oplus R_{\theta_1} \oplus \cdots R_{\theta_m} \oplus R_\theta,$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

Remarque 11.5.8. Le théorème se reformule de la manière suivante : pour tout $A \in \mathrm{O}(n)$, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}(n)$ telle que

$$P^t A P = \mathrm{I}_r \oplus (-\mathrm{I}_s) \oplus R_{\theta_1} \oplus \cdots R_{\theta_m}. \tag{11.5.8}$$

Notez que si P est la matrice en (11.5.7), alors

$$P = \begin{pmatrix} 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & 2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ -2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) R_{\frac{\theta}{2}}^t,$$

où l'on a utilisé les formules

$$\begin{cases} \cos(2x) = 2\,\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \\ \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x). \end{cases}$$

L'identité (11.5.8) est donc vérifiée pour une matrice orthogonale, et la description de la Proposition 11.5.2 est établie.

11.6 Théorème spectral

Théorème 11.6.1 (Théorème Spectral)**.** *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ une matrice symétrique ($A^t = A$). Alors, on a*

(1) Les valeurs propres de A sont réelles.
(2) Les espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont deux-à-deux orthogonaux.
(3) Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

Démonstration. **Étape 1.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Alors, il existe $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Av = \lambda v$. Comme A est réelle, on a également $A\overline{v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$. On obtient donc

$$v^t A\overline{v} = \overline{\lambda} v^t \overline{v} = \overline{\lambda}\,\|v\|^2\,.$$

D'autre part, on a

$$v^t A\,\overline{v} = (A^t\,v)^t\overline{v} = (A\,v)^t\overline{v} = (\lambda\,v)^t v = \lambda\,v^t\overline{v} = \lambda\,\|v\|^2\,.$$

Comme $v \neq 0$, on en déduit que $\lambda = \overline{\lambda}$, c'est-à-dire que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Étape 2. Soit à présent $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ deux valeurs propres distinctes de A, et $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ deux vecteurs propres associés à λ et à μ respectivement. On a

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda\, v, w\rangle = \langle A\,v, w\rangle = \langle v, A\,w\rangle = \langle v, \mu\,w\rangle = \mu\langle v, w\rangle,$$

ce qui implique en effet que $\langle v, w\rangle = 0$.

Étape 3. La preuve s'effectue par récurrence. Donnons-nous une base orthonormée de E_{λ_1}, et notons la $\{e_1, \dots, e_m\}$, et considérons la restriction de A à

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1}^{\perp} &= \mathbb{R}^n \cap \{y : \langle x, y\rangle = 0 \;\text{ pour tout }\; x \in E_{\lambda_1}\} \\ &= \mathbb{R}^n \cap \{y : \langle y, e_i\rangle = 0 \;\text{ pour tout }\; 1 \leq i \leq m\}\,. \end{aligned}$$

On remarque que les espaces propres associés aux autres valeurs propres de A sont tous contenus dans $E_{\lambda_1}^{\perp}$ en vertu de l'étape précédente.

Alors, $A_{E_{\lambda_1}^{\perp}} : E_{\lambda_1}^{\perp} \to E_{\lambda_1}^{\perp}$. En effet, pour tout $1 \leq i \leq m$, et pour tout $y \in E_{\lambda_1}^{\perp}$

$$\langle e_i, Ay\rangle = \langle Ae_i, y\rangle = \lambda_1\langle e_i, y\rangle = 0.$$

Par conséquent, l'hypothèse de récurrence fournit une base orthonormée de $E_{\lambda_1}^{\perp}$, et la réunion des deux bases est la base orthonormée cherchée.

$\square$

Remarque 11.6.2. La preuve directe se heurte à des difficultés algébriques importantes.

Essayons de montrer par récurrence sur n que $\mathbb{R}^n$ admet une base de vecteurs propres de A. Pour $n = 1$, on n'a rien à prouver, et supposons donc que $n = 2$. Alors, on a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Calculons son polynôme caractéristique. On a

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{I}_2) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2.$$

Le discriminant de P est donc donné par

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-b^2) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2 = a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2 = (a-d)^2 + 4b^2.$$

Par conséquent, le polynôme caractéristique de A est scindé (auquel cas A est diagonalisable, et la propriété précédente montre que les deux espaces propres sont orthogonaux ; il suffit donc de choisir deux vecteurs propres unitaires pour obtenir une base de $\mathbb{R}^2$) à moins que $a = d$ et $b = 0$, auquel cas $A = a\,\mathrm{I}_2$, et on peut alors choisir la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Pour $n = 3$, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&P(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{I}_3) = \det\begin{pmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2}-\lambda & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3}-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (a_{1,1}-\lambda)(a_{2,2}-\lambda)(a_{3,3}-\lambda) + a_{1,2}a_{1,3}a_{2,3} + a_{1,2}a_{1,3}a_{2,3} - a_{1,3}^2(a_{2,2}-\lambda) - a_{1,2}^2(a_{3,3}-\lambda) - a_{2,3}^2(a_{1,1}-\lambda) \\
&= -\lambda^3 + (a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3})\lambda^2 + (a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{2,3}^2 - a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,1}a_{3,3} - a_{2,2}a_{3,3})\lambda \\
&+ a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + 2\,a_{1,2}a_{1,3}a_{2,3} - a_{1,2}^2a_{3,3} - a_{1,3}^2a_{2,2} - a_{2,3}^2a_{1,1}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Cardan, il semble difficile d'exploiter l'expression algébrique des racines. Attention, derrière l'algèbre linéaire se cachent souvent des problèmes non-linéaires !

Diagonalisation orthogonale

Définition 11.6.3. On dit que deux matrices $A, A' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement congruentes s'il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ telle que

$$A' = P^t AP.$$

Le théorème spectral peut se réécrire de la manière suivante.

Théorème 11.6.4. *Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) A est orthogonalement diagonalisable, c'est-à-dire, A est orthogonalement congruente à une matrice diagonale.

(2) A est symétrique, i.e., $A^t = A$.

11.7 Applications

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $f \in C^2(\Omega)$. Alors, la formule de Taylor en $x = 0$ (en supposons sans perte de généralité que $0 \in \Omega$) est donnée par

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \nabla f(0)\cdot x + \frac{1}{2}x^t\mathrm{Hess}_0(f)x + o\left(\|x\|^2\right) \\
&= f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_ix_j + o\left(\|x\|^2\right)
\end{aligned}$$

où

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x)$$

est le gradient de f, et

$$\mathrm{Hess}_x(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}(x)$$

est la matrice hessienne de f (c'est une matrice symétrique en vertu du théorème de Schwarz). Si $x = 0$ est un point critique de f (i.e., $\nabla f(0) = 0$), si l'on cherche à déterminer si 0 est un minimum ou un maximum local, la diagonalisation de A nous permet de vérifier ce résultat immédiatement.

11.8 Hors-piste : inégalité triangulaire inverse et inégalité de Heisenberg

11.8.1 Inégalité triangulaire inverse

Vérifions l'inégalité triangulaire inverse sur $l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})$. Soit $a, b \in l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})$ tels que $a_n, b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} E &= \|a+b\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})} - \|a\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})} - \|b\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})} \\ &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{a_n + b_n}\right)^2 - \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{a_n}\right)^2 - \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{b_n}\right)^2 \\ &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left(\sqrt{a_m + b_m}\sqrt{a_n + b_n} - \sqrt{a_m}\sqrt{a_n} - \sqrt{b_m}\sqrt{b_n}\right). \end{aligned}$$

On est donc réduit à vérifier pour tout $a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$ l'inégalité suivante

$$\sqrt{a_1 + a_2}\sqrt{b_1 + b_2} \geq \sqrt{a_1}\sqrt{a_2} + \sqrt{b_1}\sqrt{b_2}.$$

En prenant le carré, on voit que cette inégalité est équivalente à

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \geq a_1\, a_2 + b_1\, b_2 + 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2},$$

ou

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 \geq 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2} = 2\sqrt{a_1 b_2}\sqrt{a_2 b_1}$$

qui est vérifiée car

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2\sqrt{a_1 b_2}\sqrt{a_2 b_1} = \left(\sqrt{a_1 b_2} - \sqrt{a_2 b_1}\right)^2 \geq 0.$$

En en déduit que $a \geq 0$, ce qui montre que

$$\|a\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})} + \|b\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})} \leq \|a+b\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})}.$$

Justifions également que $\|\cdot\|_{l^p(\mathbb{Z})}$ est une quasi-norme pour $p = \dfrac{1}{2}$. Soit $0 < p < 1$ fixé. Pour tout $x, y \in l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})$, on a

$$\|x+y\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{|x_n + y_n|}\right)^2 \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{|x_n|} + \sqrt{|y_n|}\right)^2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{|x_n|} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{|y_n|}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{\|x\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})}} + \sqrt{\|y\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})}}\right)^2 = \|x\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})} + 2\sqrt{\|x\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})}\,\|y\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})}} + \|y\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})}$$
$$\leq 2\left(\|x\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})} + \|y\|_{l^{\frac{1}{2}}(\mathbb{Z})}\right).$$

11.8.2 Inégalité de Heisenberg

On se place sur $\mathbb{R}$, mais la preuve fonctionne de manière identique sur $\mathbb{R}^d$ (nous l'énoncerons l'inégalité sur cet espace avec avoir donné la preuve sur $\mathbb{R}$). Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une fonction intégrable, on définit sa transformée de Fourier par

$$\widehat{f}(\xi) = \mathscr{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\,x\,\xi} dx.$$

On peut vérifier que $\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R})$ et il n'est pas difficile de montrer (par un argument de densité) que $\widehat{f}(\xi) \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, si on suppose que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a la formule inverse

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}^2(f)(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\,x\,\xi} d\xi.$$

En d'autre termes, à un changement de signe près de la fonction, le carré de la transformée de Fourier est égal à $2\pi\,\mathrm{Id}$.

Théorème 11.8.1 (Inégalité de Heisenberg)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 1.$$

Alors, pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 |f(x)|^2 dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

De plus, si on suppose que f est différentiable et $f' \in L^2$, on a

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 |f(x)|^2 dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f'(y)|^2 dy} \geq \frac{1}{2}.$$

L'hypothèse montre qu'il faut considérer $|f(x)|^2 dx$ comme une densité de probabilité. L'inégalité montrer que même si f est très localisée près d'un point m, le second moment de sa transformée de Fourier, qui correspond à la norme L^2 de sa vitesse (cela se verra dans la preuve) ne peut être également petit, et ceci de manière quantitative.

Démonstration. On intègre par parties (toutes les intégrations par parties sont justifiées en vertu du théorème de convergence dominée, que vous verrez en théorie de la mesure ; [5])

$$\int_{\mathbb{R}} (x-m)\frac{d}{dx}|f(x)|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d = -1.$$

Par conséquent, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$1 = -2\int_{\mathbb{R}} (x-m)\mathrm{Re}\left(f'(x)\overline{f(x)}\right) dx \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La première forme de l'inégalité découle de la formule $\mathscr{F}(f')(\xi) = i\,\xi\,\widehat{f}(\xi)$ ainsi que de l'identité de Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi$$

appliquée à $g(x) = f'(x)$. □

Dans $\mathbb{R}^d$, la constante de l'inégalité est modifiée de la manière suivante (due à un facteur $(2\pi)^d$ apparaissant dans la formule d'inversion de Fourier) :

Théorème 11.8.2 (Inégalité de Heisenberg d-dimensionnelle)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = 1.$$

Alors, pour tout $m \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |x-m|^2 |f(x)|^2 dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi} \geq \frac{d}{2}\,(2\pi)^{\frac{d}{2}}\,.$$

La preuve de cette généralisation utilise la même stratégie que précédemment et constitue un intéressant exercice de calcul vectoriel. Notons que dans $\mathbb{R}^d$, la transformée de Fourier est définie par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx,$$

où $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ (étendu par linéarité à $\mathbb{C}^n$).

Chapitre 12

Espaces vectoriels pseudo-euclidiens

12.1 Formes quadratiques et théorème de Sylvester

> Par l'art seulement, nous pouvons sortir de nous, savoir ce que voit un autre de cet univers qui n'est pas le même que le nôtre et dont les paysages nous seraient restés aussi inconnus que ceux qu'il peut y avoir dans la lune.
>
> Marcel Proust, *Le Temps retrouvé*

Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie V. On rappelle qu'en vertu de la Définition 10.6.4, la signature de Q est le couple $(p,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que p (resp. s) soit le nombre de coefficients α_i strictement positifs (resp. négatifs) de Q dans n'importe quelle base orthogonale :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2.$$

Quitte à réordonner les variables et à changement d'échelle près, la matrice de Gram de Q est donc donnée par

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_s & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\hphantom{1 \quad \cdots \quad \cdots}}_{p} \quad \underbrace{\hphantom{\cdots \quad \cdots \quad \cdots}}_{s} \quad \underbrace{\hphantom{\cdots \quad \cdots \quad 0}}_{n-r} \end{array}$$

Ici, l'on a noté $n = \dim(V)$.

On rassemble pour la commodité du lecteur les propriétés principales d'une forme quadratique dans la proposition suivante.

Proposition 12.1.1. *Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel de dimension finie V. Alors, il existe des entiers $p,s \in \mathbb{N}$ tels que dans une base de V, on ait*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+s} x_j^2.$$

(1) *Le couple (p, s) est la signature de Q.*
(2) *La forme quadratique Q est dite non-dégénérée si $p + s = \dim(V)$.*
(3) *L'entier $r = p + s$ est le rang de Q.*
(4) *Q est positive (ou semi-définie positive) si $s = 0$ et Q est négative (ou semi-définie négative) si $p = 0$.*
(5) *Q est définie positive (resp. négative) si $s = 0$ (resp. $p = 0$) et si Q est non-dégénérée.*

Remarques 12.1.2. 1. On dira que $Q > 0$ sur un sous-espace vectoriel $W \subset V$ si $Q(w) > 0$ pour tout $w \in W \setminus \{0\}$.

2. Dans un espace de dimension infinie, la notion d'indice (de Morse) est cruciale, et correspond au nombre de directions négatives d'une forme quadratique. Par exemple, il est commun d'étudier le nombre de valeurs propres négatives de l'*opérateur de Schrödinger*

$$\mathscr{L} = -\Delta + V,$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est le *laplacien* et $V \in C^0(\Omega)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert donné. L'opérateur $\mathscr{L}$ apparaît naturellement quand on étudie l'énergie suivante :

$$E(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + V u^2\right) dx.$$

En effet, si $u \in C^2(\Omega)$ et $v \in C_0^2(\Omega)$ est une variation qui s'annule sur le bord $\partial\Omega$ de Ω, on a

$$\begin{aligned} E(u + t\,v) &= \int_\Omega \left(|\nabla u + t\,\nabla v|^2 + V(u + t\,v)^2\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + V^2 u^2\right) dx + 2t \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + V uv)\, dx + t^2 \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + V^2 v^2\right) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, u est un point critique de E si et seulement

$$\frac{d}{dt} E(u + t\,v)_{|t=0} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + V u\, v)\, dx = \int_\Omega v\,(-\Delta u + V u)\, dx.$$

L'égalité étant vraie pour tout $v \in C_0^2(\Omega)$, on obtient l'équation

$$-\Delta u + V u = 0. \tag{12.1.1}$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Schrödinger stationnaire (indépendante du temps). De plus, si l'on veut déterminer si u est un minimiseur ou non, on étudie sa dérivée seconde

$$Q(v) = \frac{d^2}{dt^2} E(u + t\,v)_{|t=0} = \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + V^2 v^2\right) dx = \int_\Omega v\,(-\Delta v + V v)\, dx = \int_\Omega v \mathscr{L} v\, dx.$$

L'opérateur $\mathscr{L}$ étant auto-adjoint, on peut le diagonaliser et l'indice de Morse (s dans la définition précédente) est égal au nombre de valeurs propres négatives de $\mathscr{L}$. Ici, on dit que $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est une valeur propre de $\mathscr{L}$ s'il existe $v \in C_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ telle que $\mathscr{L} v = \lambda v$.

Théorème 12.1.3 (Théorème d'inertie de Sylvester)**.** *La signature (p, s) d'une forme quadratique Q ne dépend pas de la base choisie. Plus précisément, on a*

1. *p est la dimension maximale du sous-espace vectoriel sur lequel Q est définie-positive.*
2. *s est la dimension maximale du sous-espace vectoriel sur lequel Q est définie-négative.*

Démonstration. La discussion en début de chapitre montre qu'il existe une base $(v_1, \cdots, v_n)$ pour laquelle

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+s} x_j^2. \tag{12.1.2}$$

On rappelle que $r = p + s$ est bien déterminé comme le rang de Q. Soit $(v'_1, \cdots, v'_n)$ une autre base de V pour laquelle

$$Q(y) = \sum_{i=1}^{p'} x_i^2 - \sum_{j=p'+1}^{p'+s'} x_j^2. \tag{12.1.3}$$

Montrons que $(v_1, \cdots, v_p, v'_{p'+1}, v'_n)$ est une famille libre, ce qui impliquera que $p + (n - p') \leq n$, ou $p \leq p'$, et par symétrie, que $p = p'$ (et également $s = s'$ car $r = p + s = p' + s'$ est constant). Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(\mu_{p'+1}, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n-p'}$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \sum_{j=p'+1}^{n} \mu_j v'_j.$$

Calculons de deux manières différentes $Q(v)$. En vertu de l'expression (12.1.2), on a

$$Q(v) = Q\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \geq 0,$$

et on utilisant (12.1.3), on obtient

$$Q(v) = Q\left(\sum_{j=p'+1}^{n} \mu_j v'_j\right) = -\sum_{j=p'+1}^{n} \mu_j^2 \leq 0.$$

On en déduit que $Q(v) = 0$, ce qui montre que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_{p'+1} = \cdots \mu_n = 0$, et donc que la famille $(v_1, \cdots, v_p, v_{p'+1}, v'_n)$ est libre, ce qui conclut la preuve du théorème. □

Remarques 12.1.4.
1. Cette preuve est de nature un peu plus analytique, mais * permet d'éviter d'avoir recours à un raisonnement par l'absurde, ce qui devrait ménager les sensibilités logiciennes les plus délicates (une preuve directe vaut toujours mieux que le *reductio ad absurdum* cher à G. H. Hardy ; [7]).
2. Le théorème d'inertie de Sylvester est également vérifié en dimension infinie pour l'indice de Morse (qui est égal à s, le nombre de directions négatives), pourvu que celui-ci soit fini (ce qui est le cas sous des hypothèses très générales).

Définition 12.1.5. Par extension, la signature d'une forme bilinéaire symétrique est celle de la forme quadratique associée. On définit ainsi les notions de matrice symétrique définie-positive et définie-négative.

Définition 12.1.6. Soit $f : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie n. On dit que $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de Sylvester si

$$f(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i = j \leq p \\ -1 & \text{si } p+1 \leq i = j \leq p+s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases},$$

où (p, s) est la signature de f.

On peut à présent énoncer le théorème de Sylvester sous forme matricielle.

Proposition 12.1.7.
1. *Deux matrices symétriques réelles sont congruentes si et seulement si elles ont la même signature.*
2. *Si (p, s) est la signature d'une matrice symétrique A, p désigne le nombre de valeurs propres strictement positives de A et s le nombre de valeurs propres strictement négatives de A.*

$*$. C'est un « mais » d'algébristes.

12.2 Espace pseudo-euclidiens

Définition 12.2.1. Un espace pseudo-euclidien est un espace vectoriel réel muni d'une forme quadratique non-dégénérée q. On dit que (V, q) est euclidien si $q > 0$.

Définition 12.2.2. On dit qu'une application affine $f : (V_1, q_1) \to (V_2, q_2)$ entre espaces pseudo-euclidiens est une isométrie si $q_2(f(x) - f(y)) = q_1(x - y)$ pour tout $x, y \in V_1$.

Remarque 12.2.3. Dans le cas non-euclidien, cette notion est très faible et n'a pas forcément d'interprétation métrique.

Proposition 12.2.4. *Soit $f : (V_1, q_1) \to (V_2, q_2)$ un isomorphisme linéaire entre deux espaces pseudo-euclidiens de dimension finie n. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est une isométrie, i.e., $q_2 \circ f = q_1$.*
2. *$\langle f(x), f(y)\rangle_{V_2} = \langle x, y\rangle_{V_1}$ pour tout $x, y \in V_1$, où $\langle \cdot, \cdot\rangle_{V_i}$ est la forme bilinéaire associée à V_i $(i = 1, 2)$.*
3. *Il existe des bases de V_1 et V_2 telles que*
$$Q_1 = A^t Q_2 A,$$
où $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de f et Q_i $(i = 1, 2)$ est la matrice de Gram de $\langle \cdot, \cdot\rangle_{V_i}$.

La preuve est laissée en exercice (il s'agit simplement de réécrire les choses sous forme matricielle).

Ce résultat permet de définir le groupe orthogonal associé à une forme quadratique non-dégénérée q sur V. On a
$$\mathrm{O}(q) = \mathrm{GL}(V) \cap \{f : q \circ f = q\}.$$
Si $V = \mathbb{R}^n$, on peut identifier ce groupe à
$$\mathrm{O}(q) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cap \left\{A : A^t Q A = Q\right\}.$$
De même, on définit le groupe spécial orthogonal par
$$\mathrm{SO}(q) = \mathrm{O}(q) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cap \left\{A : A^t Q A = Q \text{ et } \det(A) = 1\right\}.$$

12.3 Base de Sylvester et espaces pseudo-euclidiens modèles

La discussion précédente montre qu'à isométrie près, on peut identifier un espace pseudo-euclidien de dimension n à l'un des modèles $\mathbb{R}^{p,q}$ donné par $\mathbb{R}^{p,q} = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot\rangle_{p,q})$, où $p + q = n$ et
$$\langle x, y\rangle_{p,q} = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{j=p+1}^{n} x_j y_j.$$
La matrice de Gram est donnée par
$$H_{p,q} = I_p \oplus (-I_q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$
Le groupe des isométries est donné par
$$\mathrm{O}(p, q) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cap \left\{A : A^t H_{p,q} A = H_{p,q}\right\}$$
et le sous-groupe spécial orthogonal est donné par
$$\mathrm{O}(p, q) = \mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cap \left\{A : A^t H_{p,q} A = H_{p,q} \textbf{ et } \det(A) = 1\right\}.$$
Ces groupes jouent un rôle crucial dans la relativité restreinte.

12.4 Indicatrices et cône isotrope

Définition 12.4.1. Soit (V, q) un espace pseudo-euclidien.

1. Le cône isotrope de (V, q) est donné par
$$S_0(V, q) = V \cap \{x : Q(x) = 0\}.$$
2. L'indicatrice positive est donnée par
$$S_+(V, q) = V \cap \{x : Q(x) = 1\}.$$
3. L'indicatrice négative est donnée par
$$S_-(V, q) = V \cap \{x : Q(x) = -1\}.$$

On verra des exemples concrets plus loin dans le cours (les cas les plus intéressants sont ceux pour lesquels on a $p = n$ ou $p = n - 1$ (ou de manière équivalente, $p = 1$)).

12.5 L'espace-temps de Minkowski

12.5.1 Considérations générales

Définition 12.5.1. L'espace-temps de Minkowski est l'espace pseudo-euclidien de signature $(1, d)$. Il correspond donc à la forme quadratique
$$Q_c(t, (x_1, \cdots, x_d)) = c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_d^2,$$
où $c > 0$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

Remarque 12.5.2. On peut également utiliser la convention de signe inverse $(d, 1)$ qui est généralement préférée en mathématiques (voir par exemple [3]).

On se placera dans la suite du chapitre dans les coordonnées où $c = 1$, ce qui donne la nouvelle forme quadratique :
$$Q(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_d^2,$$
et on note $\mathbb{L}^d$ ou $\mathbb{R}^{1,d}$ l'espace $\mathbb{R}^{d+1}$ muni de cette forme quadratique. On écrira $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire associé à $x, y \in \mathbb{L}^d$. Explicitement, on a donc
$$\langle x, y \rangle = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$
Un point $x \in \mathbb{L}^d$ est aussi appelé un *événement* : x_0 correspond à la variable de temps, et $(x_1, \cdots, x_d)$ correspondent aux variables d'espace. Les isométries de l'espace de Minkowski correspondent au groupe $\mathrm{O}(1, d)$ mentionné plus haut. Dans le cas le plus intéressant où $d = 3$, on a
$$\mathrm{O}(1,3) = \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \cap \left\{ A : A^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Ce groupe, isomorphe à $\mathrm{O}(3, 1)$, est connu sous le nom de groupe de Lorentz, et le principe de relativité d'Einstein montre que les quantités ayant une signification physique sont invariantes sous l'action du groupe de Lorentz.

Définition 12.5.3.

1. On dit que deux événements $x, y \in \mathbb{L}^d$ sont en relation de causalité si $Q(y-x) \geq 0$.
2. On dit que $y \in \mathbb{L}^d$ est dans le futur causal de $x \in \mathbb{L}^d$ si $Q(y-x) \geq 0$ et $y_0 \geq x_0$. L'ensemble des événements dans le futur causal de x est noté

$$\mathscr{C}_x = \mathbb{L}^d \cap \left\{ y : (y_0 - x_0)^2 - \sum_{i=1}^{d} (y_i - x_i)^2 \geq 0 \text{ et } y_0 \geq x_0 \right\}.$$

3. Le cône de lumière * (ou cône isotrope) issu de x est l'ensemble

$$\mathbb{L}^d \cap \left\{ y : (y_0 - x_0)^2 = \sum_{i=1}^{d} (y_i - x_i)^2 \right\}.$$

4. Si $y \in \mathbb{L}^d$ est dans le futur causal de $x \in \mathbb{L}^d$, le temps propre est donné par

$$\tau(x,y) = \sqrt{\langle y-x, y-x \rangle} = \sqrt{(y_0 - x_0)^2 - \sum_{i=1}^{d} (y_i - x_i)^2}.$$

On introduit également la terminologie suivante.

Définition 12.5.4.
1. On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{L}^d$ est de type espace si $Q(x) < 0$.
2. On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{L}^d$ est de type lumière si $Q(x) = 0$.
3. On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{L}^d$ est de type temps si $Q(x) > 0$.

Remarque 12.5.5. La convention mathématique de prendre une signature $(3,1)$ est plus intuitive car le produit scalaire devient riemannien sur les vecteurs de type espace.

Si la trajectoire d'une particule est décrite par une fonction $x \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, sa ligne d'univers est la fonction $\widehat{x} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{L}^d)$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait $\widehat{x}(t) = (t, x(t))$.

Proposition 12.5.6. *Soit $x \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ la trajectoire d'une particule. Alors, si cette trajectoire est physiquement réalisable, la condition suivante est vérifiée :*

$$\forall\, 0 \leq t_1 < t_2, \quad \widehat{x}(t_2) \in \mathscr{C}_{\widehat{x}(t_1)}.$$

12.5.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz inverse

Théorème 12.5.7. *Pour tous vecteurs $x, y \in \mathbb{L}^d$ de type lumière ou de type temps, on a*

$$|\langle x, y \rangle| \geq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}. \tag{12.5.1}$$

Démonstration. Le résultat est trivial si x ou y est de type lumière. On suppose donc que x et y sont de type temps. On veut reproduire la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On va donner une preuve directe. On a

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = \left(x_0 y_0 - \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \right)^2 - \left(x_0^2 - \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right) \left(y_0^2 - \sum_{i=1}^{d} y_i^d \right)$$

$$= \cancel{x_0^2 y_0^2} - 2 \sum_{i=1}^{d} x_0 y_0 x_i y_i + \left(\sum_{i=1}^{d} x_i y_i \right)^2 - \cancel{x_0^2 y_0^2} + \sum_{i=1}^{d} \left(x_0^2 y_i^2 + y_0^2 y_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{d} y_i^2 \right).$$

*. *Light cone.*

On réécrit simplement

$$-2\sum_{i=1}^{d} x_0y_0x_iy_i + \sum_{i=1}^{d}\left(x_0^2y_i^2 + y_0^2y_i^2\right) = \sum_{i=1}^{d}\left(x_0^2y_i^2 + y_0^2y_i^2 - 2x_0y_iy_0x_i\right) = \sum_{i=1}^{d}\left(x_0y_i - y_0x_i\right)^2.$$

D'autre part, on voit que le terme restant correspond à celui apparaissant dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz classique. On utilise notre preuve donnant l'expression exacte du reste dans le cas des séries :

$$\left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{d} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{d} x_iy_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left(x_i^2y_j^2 + x_j^2y_i^2\right) - \sum_{i,j=1}^{d} x_iy_ix_jy_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left(x_iy_j - x_jy_i\right)^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle &= \sum_{i=1}^{d}\left(x_0y_i - y_0x_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left(x_iy_j - x_jy_i\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{d}\left(x_0y_i - y_0x_i\right)^2 - \sum_{1\leq i<j\leq d}\left(x_iy_j - x_jy_i\right)^2. \end{aligned} \tag{12.5.2}$$

On voit que l'inégalité est triviale si $d=1$, car elle devient

$$\langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = (x_0y_1 - y_0y_1)^2 \geq 0.$$

Cela va nous fournir une première preuve. Considérons donc l'espace vectoriel

$$W = \mathrm{Vect}(x,y)$$

S'il n'est pas de dimension 2, il n'y a rien à prouver. Supposons donc que W est de dimension 2. Comme x et y sont de type temps, la restriction de Q à W est de signature $(1,1)$. Par conséquent, l'inégalité est établie en vertu de (12.5.2).

Donnons une autre preuve, plus directe. Par simplicité, on donne la preuve pour $d=2$. Comme x et y sont de type temps, et l'inégalité étant homogène, on peut supposerr sans perte de généralité que $x_0 = y_0 = 1$ (il suffit de remplacer x par $x_0^{-1}x$ et y par $y_0^{-1}y$). Notre identité (12.5.2) devient donc

$$\langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = \sum_{i=1}^{d}\left(x_i - y_i\right)^2 - \sum_{1\leq i<j\leq d}\left(x_iy_j - x_jy_i\right)^2.$$

Si $d=2$, on obtient simplement

$$\sum_{i=1}^{2}\left(x_i - y_i\right)^2 - \sum_{1\leq i<j\leq 2}\left(x_iy_j - x_jy_i\right)^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 - (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Notons que x et y satisfont à la contrainte

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 1\\ y_1^2 + y_2^2 \leq 1.\end{cases}$$

Autrement dit, si $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{C}\cap\{z : |z|\leq 1\}$ est le disque unité de $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$, on veut montrer que la fonction suivante

$$\begin{cases} f : \overline{\mathbb{D}}\times\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}\\ \qquad (x,y) \mapsto (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 - (x_1y_2 - x_2y_1)^2\end{cases}$$

est positive. En prenant des coordonnées polaires $x = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et $y = (\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi))$, on obtient (si $r\rho\neq 0$, mais l'inégalité est triviale autrement)

$$f(r,\theta,\rho,\varphi) = r^2\left(\cos(\theta) - \cos(\varphi)\right)^2 + \rho^2\left(\sin(\theta) - \sin(\varphi)\right)^2 - r^2\rho^2\left(\cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi)\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= r^2\rho^2 \left(\frac{1}{\rho^2} (\cos(\theta) - \cos(\varphi))^2 + \frac{1}{r^2} (\sin(\theta) - \sin(\varphi))^2 - (\cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi))^2 \right) \\
&\geq r^2\rho^2 \left((\cos(\theta) - \cos(\varphi))^2 + (\sin(\theta) - \sin(\varphi))^2 - (\cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi))^2 \right),
\end{aligned}
$$

car $0 < r, \rho \leq 1$. L'identité suivante permet à présent de compléter la preuve :

$$
(\cos(\theta) - \cos(\varphi))^2 + (\sin(\theta) - \sin(\varphi))^2 - (\cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi))^2 = 4\sin^4\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \geq 0,
$$

qu'on obtient par application répétée des formules de duplication (ou de la formule d'Euler). En effet, on rappelle les formules

$$
\begin{cases}
\cos(\theta \pm \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) \mp \sin(\theta)\sin(\varphi) \\
\sin(\theta \pm \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) \pm \cos(\theta)\sin(\varphi).
\end{cases}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
&(\cos(\theta) - \cos(\varphi))^2 + (\sin(\theta) - \sin(\varphi))^2 - (\cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi))^2 \\
&= \cos^2(\theta) + \cos^2(\varphi) - 2\cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin^2(\theta) + \sin^2(\varphi) - 2\sin(\theta)\sin(\varphi) - \sin^2(\theta - \varphi) \\
&= 2 - 2\cos(\theta - \varphi) - \sin^2(\theta - \varphi).
\end{aligned}
$$

On utilise à présent les formules $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$, ce qui donne

$$
1 - \cos(\theta - \varphi) = 2\sin^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right), \qquad \sin^2(\theta - \varphi) = 4\cos^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)
$$

et finalement

$$
\begin{aligned}
2 - 2\cos(\theta - \varphi) - \sin^2(\theta - \varphi) &= 4\sin^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) - 4\cos^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \\
&= 4\sin^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)\left(1 - \cos^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)\right) = 4\sin^4\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) \geq 0
\end{aligned}
$$

et l'inégalité est démontrée. $\square$

Cette inégalité permet de prouver le célèbre « paradoxe des jumeaux » (qu'on verra en exercices) de la relativité restreinte.

Chapitre 13

Espaces hermitiens, opérateurs normaux et théorème spectral

> [...] eysolt of binnoculises memostinmust egotum sabcunsciously senses upers the deprofundity of multimathematical immaterialities wherebejubers in the pancosmic urge the allimmanence of that which Itself is Itself Alone [...]
>
> James Joyce, *Finnegans Wake*

Quitte à changer légèrement les définitions d'application bilinéaire sur un espace vectoriel complexe, on va retrouver formellement tous les résultats énoncés précédemment. L'idée de base est qu'une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$ doit correspondre à une forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$, et ceci nous guidera dans la découverte des définitions.

13.1 Formes sesquilinéaires et formes hermitiennes

Définition 13.1.1. Soit V et W deux espaces vectoriels complexes. On dit qu'une application $f : V \to W$ est semi-linéaire (ou anti-linéaire) si

$$f(\lambda\, x + y) = \overline{\lambda}\, f(x) + f(y) \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}, \text{ pour tout } (x, y) \in V^2.$$

Définition 13.1.2. Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, l'adjoint de la matrice A est donné par $A^* = \overline{A}^t$, i.e., $a^*_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Si on veut définir un « produit scalaire complexe » $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathbb{C}^n}$ sur $\mathbb{C}^n$ qui nous donne des information métriques, il faut imposer la propriété $\langle z, z\rangle_{\mathbb{C}^n} \in \mathbb{R}_+$, et plus précisément, $\langle z, z\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \pi(z), \pi(z)\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \|\pi(z)\|^2$, où $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ est un isomorphisme linéaire.[*] Ceci suggère que le produit scalaire complexe sur $\mathbb{C}^n$ devrait être donné par la formule

$$\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}.$$

On voit que cette application est linéaire en la première variable et semi-linéaire en la seconde variable. En ajoutant la propriété de positivité, on obtient tous les axiomes du produit scalaire sur un espace vectoriel complexe.

Définition 13.1.3. 1. Une application $f : V \times V \to \mathbb{C}$ est dite sesquilinéaire si elle est linéaire en la première variable et semi-linéaire en la seconde variable :

$$f(\lambda\, x_1 + x_2, y) = \lambda f(x_1, y) + f(x_2, y) \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}, \text{ pour tout } (x_1, x_2, y) \in V^3$$

[*]. Par exemple, $\pi(z) = (\mathrm{Re}\,(z_1), \mathrm{Im}\,(z_1), \cdots, \mathrm{Re}\,(z_n), \mathrm{Im}\,(z_n))$.

$$f(x, \mu\, y_1 + y_2) = \overline{\mu} f(x, y_1) + f(x, y_2) \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}, \text{ pour tout } (x, y_1, y_2) \in V^3.$$

2. L'application $f : V \times V \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne si elle est sesquilinéaire et si elle est anti-symétrique complexe, i.e.,

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)} \qquad \text{pour tout } (x, y) \in V^2.$$

   En particulier, f est réelle sur la diagonale $\Delta = V \times V \cap \{(x, y) : x = y\}$.
3. La forme quadratique $q : V \times V \to \mathbb{R}$ associée à une forme sesquilinéaire hermitienne f sur V est donnée par

$$q(x) = f(x, x) \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

Exemple 13.1.4. 1. Soit $V = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors,

$$\langle f, g\rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} dx$$

   est une forme sesquilinéaire hermitienne sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On remarquera que c'est bien l'espace L^2 complexe qui apparaît en mécanique quantique.
2. Sur $\mathbb{C}^n$, si $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, z_i\, \overline{w_i}$$

   est une forme sesquilinéaire hermitienne.

Proposition 13.1.5. *Soit q une forme quadratique associée à une forme sesquilinéaire hermitienne f sur un espace vectoriel complexe V.*

1. *On a $q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in V$.*
2. *$f(x, y) = \dfrac{1}{4}\left(q(x + y) - q(x - y)\right) + \dfrac{i}{4}\left(q(x + i\, y) - q(x - i\, y)\right)$ pour tout $(x, y) \in V$.*

Démonstration. La première propriété est évidente, et on pourrait vérifier directement la formule de polarisation complexe en partant de la formule de droite, mais il est plus instructif d'essayer de la retrouver directement. On part de l'idée réelle, et on calcule

$$\begin{aligned} q(x + y) - q(x - y) &= f(x + y, x + y) - f(x - y, x - y) \\ &= f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) - (f(x, x) - f(x, y) - f(y, x) + f(y, y)) \\ &= 2\, f(x, y) + 2\, f(y, x) = 2\, f(x, y) + 2\, \overline{f(x, y)} = 4\,\mathrm{Re}\,(f(x, y))\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, en remplaçant y par $i\, y$, on obtient par sesquilinéarité

$$q(x + i\, y) - q(x - i\, y) = 4\,\mathrm{Re}\,(f(x, i\, y)) = 4\,\mathrm{Re}\,(-i\, f(x, y)) = 4\,\mathrm{Im}\,(f(x, y))$$

car $\mathrm{Re}\,(-i\, z) = \mathrm{Re}\,(-i(a + i\, b)) = b = \mathrm{Im}\,(z)$ pour tout $z = a + i\, b \in \mathbb{C}$. Par conséquent, on obtient

$$f(x, y) = \frac{1}{4}\left(q(x + y) - q(x - y)\right) + \frac{i}{4}\left(q(x + i\, y) - q(x - i\, y)\right).$$

□

13.2 Espaces vectoriels hermitiens

Définition 13.2.1. Un produit scalaire hermitien est une forme sesquilinéaire hermitienne f définie-positive, c'est-à-dire, telle que $q(x) = f(x, x) > 0$ pour tout $x \in V \setminus \{0\}$

Définition 13.2.2. On dit qu'un espace vectoriel complexe est hermitien s'il est équipé d'un produit scalaire hermitien.

Définition 13.2.3. 1. $(L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2})$ est un espace hermitien.

2. Sur

$$l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \mathbb{Z}^{\mathbb{C}} \cap \left\{ \{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |z_n|^2 \right\},$$

on a le produit scalaire hermitien

$$\langle z, w \rangle_{l^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z_n \overline{w_n}.$$

3. Sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a le produit hermitien

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}\,(B^* A)\,.$$

On voit comme dans le cas euclidien que ce produit hermitien correspond au produit hermitien sur $\mathbb{C}^{n^2}$ via l'isomorphisme standard.

Définition 13.2.4. Si $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur un espace vectoriel complexe V, la norme d'un vecteur est définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est également vérifiée dans le cas complexe.

Théorème 13.2.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit V un espace vectoriel hermitien. Alors, pour tout $(x, y) \in V^2$, on a*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|\,,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. Remarquons pour commencer que l'inégalité est équivalente à l'inégalité triangulaire. En effet, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\langle x, y \rangle) = (\|x\| - \|y\|)^2 + 2\,(\|x\|\,\|y\| - \mathrm{Re}\,(\langle x, y \rangle))\,,$$

ce qu'on réécrit

$$2\Big(\,\|x\|\,\|y\| - \mathrm{Re}\,(\langle x, y \rangle)\Big) = \|x - y\|^2 - (\|x\| - \|y\|)^2 = \Big(\,\|x - y\| + \|y\| - \|x\|\,\Big)\Big(\,\|x - y\| + \|x\| - \|y\|\,\Big).$$

On utilise le même argument que dans le cas réel :

$$0 \leq \|x + t\,y\|^2 = \|x\|^2 + t^2\,\|y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\,(\langle x, y \rangle)\,,$$

ce qui montre (car le discriminant Δ est négatif) que

$$|\mathrm{Re}\,(\langle x, y \rangle)| \leq \|x\|\,\|y\|\,.$$

De plus, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| e^{i\theta}$. En appliquant l'inégalité précédente à $e^{-i\theta} x$, on obtient

$$|\langle x, y \rangle| = e^{-i\theta} \langle x, y \rangle = \left\langle e^{-i\theta} x, y \right\rangle = \mathrm{Re}\,\left(\left\langle e^{-i\theta} x, y \right\rangle\right) \leq \left\| e^{-i\theta} x \right\| \|y\| = \|x\|\,\|y\|\,.$$

La norme étant définie positive, l'égalité est vérifiée si et seulement s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x + t_0 y = 0$, ce qui montre que x et y sont colinéaires. $\square$

Remarque 13.2.6. Si on reprend l'exemple de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (c'est l'exemple fondamental avec $l^2(\mathbb{Z})$, et tout espace de Hilbert séparable complexe se modèle sur l'un de ces deux espaces), on peut à nouveau prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz directement, et même obtenir le « reste » dans la formule. Soit donc $f,g\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, et

$$R=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|g(y)|^2dy\right)-\left|\int_{\mathbb{R}}f(z)\overline{g(z)}dz\right|^2.$$

On écrit comme précédemment en vertu du théorème de Fubini

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|g(y)|^2dy\right)=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|f(x)|^2|g(y)|^2dx\,dy=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\left(|f(x)|^2|g(y)|^2+|f(y)|^2|g(x)|^2\right)dx\,dy.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}f(z)\overline{g(z)}dz\right|^2&=\left(\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{g(x)}dx\right)\left(\overline{\int_{\mathbb{R}}f(y)\overline{g(y)}dy}\right)=\left(\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{g(x)}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\overline{f(y)}g(y)dy\right)\\&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}f(x)g(y)\overline{f(y)g(x)}\,dx\,dy=\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}f(x)g(y)\overline{f(y)g(x)}\,dx\,dy\right)\\&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\mathrm{Re}\left(f(x)g(y)\overline{f(y)g(x)}\right)dx\,dy\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}R&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\left(|f(x)|^2|g(y)|^2+|f(y)|^2|g(x)|^2\right)dx\,dy-\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\mathrm{Re}\left(f(x)g(y)\overline{f(y)g(x)}\right)dx\,dy\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|f(x)g(y)-f(y)g(x)|^2\,dx\,dy\geq 0.\end{aligned}$$

En particulier, on a l'inégalité

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\left|f(x)\overline{g(y)}-f(y)\overline{g(x)}\right|^2dx\,dy\leq\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}}|g(y)|^2dy\right)$$

qui peut s'avérer indispensable.

Proposition 13.2.7. *Soit $(V,\|\cdot\|)$ un espace hermitien. Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $\|x\|\geq 0$ *et* $\|x\|=0$ *si et seulement si* $x=0$.
2. $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ *pour tout* $\lambda\in\mathbb{C}$ *et* $x\in V$.
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ *pour tout* $x,y\in V$.

La preuve est identique à celle du cas réel et on l'omet.

Proposition 13.2.8. *Si $(V,\|\cdot\|)$ est un espace hermitien de dimension finie n, il existe une base $\{e_1,\cdots,e_n\}$, dite unitaire, de V pour laquelle*

$$\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{i,j}.$$

Proposition 13.2.9. *Soit $W\subset V$ un sous-espace vectoriel d'un espace hermitien $(V,\|\cdot\|)$. Alors, son complétement orthogonal*

$$W^{\perp}=V\cap\{v:\langle v,w\rangle=0\ \textit{pour tout}\ w\in W\}$$

est un sous-espace vectoriel de V et $V=W\oplus W^{\perp}$.

Le procédé de Gram-Schmidt est également inchangé avec les mêmes formules

13.3 Opérateurs d'un espace hermitien

13.3.1 Première définitions

Les opérateurs sont l'un des objets de base considérés en mécanique quantique.

Définition 13.3.1. Un opérateur sur un espace hermitien V est un endormorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $T : V \to V$.

Proposition 13.3.2. *La matrice d'un opérateur T sur V dans une base unitaire est donnée par*

$$\{a_{i,j}\}_{1\leq i,j\leq n} = \langle Te_j, e_i\rangle.$$

Démonstration. En effet, on a par linéarité en la première coordonnée

$$Te_j = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\langle e_k, e_j\rangle = a_{i,j}.$$

□

À tout opérateur T sur V, on associe une application $\varphi_T : V \to \mathbb{C}$ telle que

$$\varphi_T(x) = \langle Tx, x\rangle \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{C}.$$

En vertu de la linéarité de T, on obtient en particulier $\varphi_T(\lambda x) = |\lambda|^2\varphi_T(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in V$. On dit qu'une telle application est quadratique hermitienne. La connaissance de l'action de T sur la diagonale permet de reconstruire T complètement.

Proposition 13.3.3. *L'application φ_T détermine l'opérateur T uniquement.*

Démonstration. Soit $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(V)$ deux opérateurs tels que $\langle T_1x, x\rangle = \langle T_2x, x\rangle$ pour tout $x \in V$. Montrons que $T_1 = T_2$. Comme $T_1 - T_2 \in \mathscr{L}(V)$, il suffit donc de montrer que si $T \in \mathscr{L}(V)$ est tel que $\langle Tx, x\rangle = 0$ pour tout $x \in V$, alors $T = 0$. On a

$$0 = \langle T(x + y), x + y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle.$$

Dans le cas réel, cela montrerait simplement que T est anti-symétrique. Il faut donc utiliser la $\mathbb{C}$ linéarité de T. On fixe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et on calcule à nouveau

$$0 = \langle T(\lambda x + y), \lambda x + y\rangle = |\lambda|^2\langle Tx, x\rangle + \lambda\langle Tx, y\rangle + \overline{\lambda}\langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle = \lambda\langle Tx, y\rangle + \overline{\lambda}\langle Ty, x\rangle.$$

En prenant $\lambda = 1$ et $\lambda = -i$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle Tx, y\rangle \\ \langle Ty, x\rangle \end{pmatrix} = 0,$$

et la matrice apparaissant dans cette équation étant inversible, on en déduit que $\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle = 0$, ce qui montre bien que $T = 0$. □

13.3.2 Adjoint d'un opérateur

Définition 13.3.4. Soit $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espace vectoriel hermitien. On dit qu'un opérateur $T^* : V \to V$ est l'adjoint d'un opérateur T sur V si $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ pour tout $x, y \in V$.

Remarque 13.3.5. En vertu de la Proposition 13.3.3, l'application T^* est bien définie et uniquement déterminée. On verra plus loin que l'adjoint existe toujours sur un espace de dimension finie, mais pas forcément sur un espace de dimension infinie.

L'adjoint vérifie un certain nombre de propriétés évidentes qu'on liste dans le résultat suivant.

Proposition 13.3.6. *Soit S, T des opérateurs agissant sur un espace hermitien V. Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *L'adjoint de T^* est T, i.e., $(T^*)^* = T$.*
2. $(\lambda S + T)^* = \overline{\lambda}\, S^* + T^*$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. $(ST)^* = T^* S^*$.
4. *Si T est inversible, alors l'inverse de l'adjoint de T est égal à l'adjoint de l'inverse de T, i.e., $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

On laisse la preuve de ce résultat en exercice.

Proposition 13.3.7. *Soit V un espace hermitien de dimension finie. Alors, tout opérateur sur V admet un unique adjoint.*

Démonstration. L'unicité a déjà été montrée dans le Proposition 13.3.3. Pour montrer l'existence, on note $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice d'un opérateur $T : V \to V$ dans une base fixée orthonormée $\{e_1, \cdots, e_n\}$, où l'on a noté $n = \dim(V)$. Alors, l'adjoint de T est l'opérateur $T^* : V \to V$ dont la matrice est donnée par A^*, l'adjoint de A. En effet, si pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$T^* e_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{i,k}} e_k,$$

on obtient

$$\langle e_j, T^* e_i \rangle = \left\langle e_j, \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{i,k}} e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \langle e_j, e_k \rangle = a_{i,j} = \langle T e_j, e_i \rangle,$$

ce qui montre bien que l'opérateur T^* dont la matrice dans la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est A^* est l'adjoint de T. □

Remarque 13.3.8. Les remarques suivantes sont faites à titre informatif, et il n'est pas nécessaire de les lire pour l'examen.

Ce résultat est aussi valable pour un espace de Hilbert [*] de dimension infinie, à condition d'avoir un opérateur *continu* (une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension infinie n'est pas forcément continue). Et si l'on dispose d'un espace hermitien, on peut le compléter en un espace de Hilbert et utiliser le théorème de Hahn-Banach pour étendre l'application linéaire en question et obtenir un adjoint par restriction. En revanche, la restriction ne sera pas forcément un opérateur linéaire à valeurs dans l'espace de départ V (il faut imposer la condition $T^*(V) \subset V$).

Corollaire 13.3.9. *Soit T un opérateur linéaire d'un espace hermitien de dimension finie V.*

1. *Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est la matrice de T dans une base orthonormée, la matrice de T^* est donnée par $A^* = \overline{A^t}$.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T, alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de T^*.*

Démonstration. Nous avons déjà établi la première assertion dans la preuve précédente. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T, il existe $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Av = \lambda v$, ce qui montre que $\overline{A}\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$. Une matrice et sa transposée ayant les mêmes valeurs propres, on en déduit que $\overline{\lambda}$ est valeur propre de T^*. □

13.4 Le théorème spectral

Dans le cas complexe, on remplace les matrice symétriques par les opérateurs auto-adjoints ($T^* = T$), et de manière générale, par les opérateurs normaux qu'on définit à présent.

*. Un espace hermitien complet pour la distance associée à la norme. $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un exemple typique (mais on doit définir cet espace sur un ensemble plus large de fonctions que les fonctions continues).

Définition 13.4.1. Soit T un opérateur d'un espace hermitien V. On dit que T est normal s'il commute avec son adjoint, i.e., $T^*T = TT^*$.

Proposition 13.4.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est normal.*
2. *$\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$ pour tout $x, y \in V$.*
3. *$\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in V$.*

Démonstration. Les points (2) et (3) sont équivalents par polarisation. Montrons donc l'équivalence entre la première et la seconde propriété. Si T est normal, alors

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle = \langle x, TT^*y\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle.$$

Réciproquement, si le seconde propriété est vérifiée, alors

$$\langle T^*Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle = \langle TT^*x, y\rangle$$

ce qui montre que $T^*T = TT^*$ la propriété étant vérifiée pour tout $x, y \in V$. □

Proposition 13.4.3. *Si T est un opérateur normal et v est un vecteur propre pour la valeur propre λ, alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de T^* de vecteur propre v. De plus, les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

Démonstration. En effet, si $T = \lambda v$, comme $T - \lambda \mathrm{Id}_V$ est également un opérateur normal (vérification immédiate), on obtient par la propriété précédente

$$0 = \|(T - \lambda\,\mathrm{Id}_V)\,v\| = \left\|(T - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^*\,v\right\| = \left\|\left(T^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}_V\right)v\right\| = 0.$$

D'autre part, si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sont des valeurs propres distinctes de T de vecteurs propres respectifs λ et μ, on a par la propriété qu'on vient de démontrer

$$\lambda\overline{\mu}\langle v, w\rangle = \langle Tv, Tw\rangle = \langle T^*Tv, w\rangle = |\lambda|^2\langle v, w\rangle,$$

ce qui montre (car $\overline{\mu} \neq \overline{\lambda}$) que $\langle v, w\rangle = 0$. □

On peut à présent énoncer la version complexe du théorème spectral.

Théorème 13.4.4 (Théorème spectral I)**.** *Un opérateur d'un espace hermitien de dimension finie est orthogonalement diagonalisable si et seulement si il est normal.*

Démonstration. S'il existe une base unitaire $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de V et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $Te_i = e_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors on a en particulier pour tout $1 \leq i, j \leq n$

$$\langle T^*Te_i, e_j\rangle = \lambda_i\langle T^*e_i, e_j\rangle = \lambda_i\langle e_i, Te_j\rangle = \lambda_i\overline{\lambda_j}\delta_{i,j}.$$

D'autre part, on a par la preuve de la Proposition 13.3.7

$$\langle TT^*e_i, e_j\rangle = \langle T^*e_i, T^*e_j\rangle = \langle\overline{\lambda_i}e_i, \overline{\lambda_j}e_j\rangle = \overline{\lambda_i}\lambda_j\delta_{i,j}$$

et les deux expressions coïncident en effet (elles sont nulles si $i \neq j$, et égales à $|\lambda_i|^2$ sinon).

On établit à présent par récurrence l'existence d'une telle diagonalisation orthogonale. Supposons donc que $n = \dim(V)$ et que la propriété a été établie pour tout $k \leq n - 1$. Soit e_1 un vecteur propre de T (qu'on suppose sans perte de généralité de norme 1) et $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la valeur propre associée. Alors, on a $Te_1 = \lambda_1\,e_1$ et $T^*e_1 = \overline{\lambda_1}\,e_1$. Soit

$$W = e_1^{\perp} = V \cap \{x : \langle x, e_1\rangle = 0\}$$

l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(e_1)$. C'est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de V. Montrons qu'il est invariant par T. Pour tout $x \in W$, on a

$$\langle Tx, e_1\rangle = \langle x, T^*e_1\rangle = \langle x, \overline{\lambda_1}\,e_1\rangle = \lambda_1\langle x, e_1\rangle = 0.$$

Par conséquent, la restriction $T_{|W} : W \to W$ est un opérateur normal et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et trouver une base $\{e_2, \cdots, e_n\}$ qui diagonalise orthogonalement $T_{|W}$. La base souhaitée est alors donnée par $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ (preuve immédiate). □

On peut reformuler le théorème spectral de la façon (assez lourde [*]) suivante.

Théorème 13.4.5 (Théorème spectral II)**.** *Soit V un espace vectoriel hermitien de dimension finie et T un opérateur linéaire sur V. Alors, T est un opérateur normal si et seulement si on peut l'écrire sous la forme suivante :*

$$T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, P_i,$$

où $\sigma(T) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\} \subset \mathbb{C}$ est le spectre de T, et $P_i : V \to E_i$ est le projecteur sur l'espace propre $E_i = \mathrm{Ker}\,(T - \lambda_i \,\mathrm{Id}_V)$.

En particulier, on a la décomposition orthogonale

$$V = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r.$$

Si $r = n$, on a plus simplement

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i.$$

13.5 Opérateurs auto-adjoints et unitaires

Définition 13.5.1. Soit V un opérateur linéaire sur un espace hermitien V. On dit que :

1. T est autoadjoint (ou hermitien) si $T^* = T$.
2. T est anti-autoadjoint si $T^* = -T$.
3. T est unitaire si $TT^* = \mathrm{Id}_V$.

Ce sont trois types particuliers d'opérateurs normaux, et la première classe est d'importance fondamentale en physique quantique (car les valeurs propres, qui correspondent à des observables, sont réelles).

Proposition 13.5.2. *Un opérateur T sur V est autoadjoint si et seulement si $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in V$.*

Démonstration. Si $T^* = T$, on a

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}.$$

Réciproquement, si $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, on a en particulier

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle T^*x, x \rangle$$

et la preuve est complète grâce à la Proposition 13.3.3. □

Le résultat suivant est une conséquence facile du Théorème spectral.

Corollaire 13.5.3.

1. *Un opérateur d'un espace hermitien de dimension finie est auto-adjoint si et seulement s'il est normal et toutes ses valeurs propres sont réelles.*
2. *Un opérateur d'un espace hermitien de dimension finie est anti-auto-adjoint si et seulement s'il est normal et toutes ses valeurs propres sont imaginaires pures.*
3. *Un opérateur d'un espace hermitien de dimension finie est auto-adjoint si et seulement s'il est normal et toutes ses valeurs propres sont de module 1.*

Proposition 13.5.4.

1. *L'ensemble des opérateurs autoadjoints de V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(V)$.*

[*]. Mais elle a l'avantage de se passer de définitions.

2. *L'ensemble des opérateurs unitaires de V est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(V)$*, que l'on note* $\mathrm{U}(V)$ *et qui s'appelle le groupe unitaire de* V*.*

Un groupe de grande importance en physique est la groupe $\mathrm{U}(2) = \mathrm{U}(\mathbb{R}^2)$ (parfois nommé groupe de Pauli) qui est difféomorphe à la sphère tridimensionnelle $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ (qu'on voit comme la sphère des quaternions imaginaires purs). Vous le verrez souvent apparaître en mécanique quantique et en théorie des cordes.

On voit à présent qu'en partant d'une généralisation *a priori* sans intérêt de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, on est amené à introduire les opérateurs qui serviront de base mathématique à la mécanique quantique (dont nous ne dirons rien ici en renvoyant à Kojève [8] pour des commentaires philosophico-historiques).

Chapitre 14

Théorie des espaces de Hilbert

Ce chapitre est complètement hors-programme et a pour but de fournir des compléments utiles pour vos cours de l'an prochain, et le cours de mécanique quantique en particulier. Dans ce chapitre, on se restreint à la théorie des espaces de Hilbert réels, mais elle se généralise aisément à celle des espaces vectoriels complexes. Certaines considérations étant valables sur les espaces de Banach, on commence par donner leur définition et quelques exemples déjà vus en cours.

14.1 Premières définitions et espaces de Banach

Définition 14.1.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On dit qu'une application $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ est une norme si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in X$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ (la norme est définie-positive).
2. $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in X$ (homogénéité).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in X$ (inégalité triangulaire).

On dit qu'espace vectoriel X muni d'une norme $\|\cdot\|$ est un espace normé et on le note $(X, \|\cdot\|)$.

Nous avons déjà vu de nombreux exemples d'espaces normés, mais rappelons les plus importants.

Exemple 14.1.2. Soit $1 \leq p \leq \infty$.

1. Si $p < \infty$, on définit

$$l^p(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \cap \left\{ x : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

   Alors,

$$\|x\|_{l^p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

   est une norme sur $l^p(\mathbb{Z})$. Si $p = \infty$, on définit

$$l^\infty(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \cap \left\{ x : \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| < \infty \right\}$$

   qu'on munit de la norme

$$\|x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|.$$

   Montrons que ce sont bien des normes.

— En effet, une série de nombres positifs est également positive, et nulle si et seulement si chaque terme s'annule. De même, si $\|x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} = 0$, comme $|x_n| \leq \|x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit que que $x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui montre que $x = 0$.

— Si $p < \infty$, on a

$$\|\lambda\, x\|_{l^p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda\, x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda|^p |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\, \|x\|_{l^p(\mathbb{Z})}.$$

De même, on a

$$\|\lambda\, x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda\, x_n| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda||x_n| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|.$$

Si l'on voudrait être vraiment rigoureux, il faudrait procéder de la manière suivante. Si $|x_n| \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $|\lambda\, x_n| = |\lambda||x_n| \leq |\lambda| A$. Ceci montre que

$$\|\lambda\, x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \leq |\lambda|\, \|x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}.$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_N| \geq \|x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} - \varepsilon$, ce qui montre que $|\lambda\, x_N| \geq |\lambda|\, \|x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} - |\lambda|\varepsilon$. Par conséquent, on obtient l'inégalité

$$\|\lambda\, x\|_{l^p(\mathbb{Z})} \geq |\lambda\, x_N| \geq |\lambda|\, \|x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} - |\lambda|\varepsilon.$$

L'inégalité s'ensuit en faisant tendre ε vers 0.

— L'inégalité triangulaire est plus intéressante. On rappelle l'inégalité suivante (voir (10.2.1)), valable pour tout $a, b \geq 0$ si $1 < p < \infty$ et $p' = \dfrac{p}{p-1}$:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} a^{p'}. \tag{14.1.1}$$

Soit $x \in l^p$ et $y \in l^{p'}$. On va démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\|xy\|_{l^1(\mathbb{Z})} \leq \|x\|_{l^p(\mathbb{Z})} \|y\|_{l^{p'}(\mathbb{Z})}.$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité est triviale. On peut donc supposer que $\|x\|_{l^p(\mathbb{Z})} > 0$ et $\|y\|_{l^{p'}(\mathbb{Z})} > 0$. On a donc en vertu de (14.1.1)

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x}{\|x\|_{l^p(\mathbb{Z})}} \frac{y}{\|y\|_{l^{p'}(\mathbb{Z})}} \right\|_{l^1(\mathbb{Z})} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{x_n}{\|x\|_{l^p(\mathbb{Z})}} \frac{y_n}{\|y\|_{l^{p'}(\mathbb{Z})}} \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{p} \frac{\|x\|_{l^{p'}(\mathbb{Z})}}{\|x\|^p_{l^p(\mathbb{Z})}} + \frac{1}{p'} \frac{|y_n|^{p'}}{\|y\|^{p'}_{l^{p'}(\mathbb{Z})}} \right) \\
&= \frac{1}{p} \frac{1}{\|x\|^p_{l^p(\mathbb{Z})}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p + \frac{1}{p'} \frac{1}{\|y\|^{p'}_{l^{p'}(\mathbb{Z})}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |y_n|^{p'} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.
\end{aligned}$$

On peut à présent montrer l'inégalité de Minkowski qui n'est autre que l'inégalité triangulaire pour la norme l^p. On a

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^p_{l^p(\mathbb{Z})} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n + y_n|^p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n + y_n||x_n + y_n|^{p-1} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |y_n||x_n + y_n|^{p-1}
\end{aligned}$$

en vertu de l'inégalité triangulaire classique. On utilise à présent l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n + y_n|^{p'(p-1)}\right)^{p'} = \|x\|_{l^p(\mathbb{Z})} \|x+y\|^{p-1}_{l^p(\mathbb{Z})}$$

car $p'(p-1) = p$. De même, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |y_n||x_n + y_n|^{p-1} \leq \|y\|_{l^p(\mathbb{Z})} \|x+y\|_{l^p(\mathbb{Z})}^{p-1},$$

ce qui montre que

$$\|x+y\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{Z})}^p \leq \left(\|x\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{Z})} + \|y\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{Z})}\right) \|x+y\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{Z})}^{p-1}.$$

Si $x + y = 0$, le résultat est trivial. Autrement, on divise l'inégalité par $\|x+y\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{Z})}^{p-1}$, ce qui fournir l'inégalité attendue.

2. Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, on définit de même

$$L^p(I) = C^0(I) \cap \left\{x : \int_I |f(x)|^p dx < \infty\right\}$$

qu'on munit de la norme

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(I)} = \left(\int_I |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La preuve précédente s'étend immédiatement au cas de L^p.

Quand on travaille sur des espaces normés, afin que les application linéaires aient de bonnes propriétés, il faut ajouter l'hypothèse de complétude (on verra pourquoi plus tard dans le cours). Rappelons cette notion pour un espace métrique.

Définition 14.1.3. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est complet si toute suite de Cauchy converge. En d'autres termes, si $\{x_n\}_{n\in X} \subset X$ et

$$\limsup_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0,$$

alors il existe $x \in X$ tel que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, on de manière équivalente, $d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 14.1.4. Un espace de Banach est un espace normé pour la distance associée à la norme.

Exemple 14.1.5. On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est un espace complet.

Théorème 14.1.6. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $(l^p(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{l^p(\mathbb{Z})})$ est complet.*

Démonstration. On traite seulement le cas $p < \infty$. Pour simplifier les notations, on prouve le résultat pour $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Soit donc $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset l^p(\mathbb{N})$ une suite de Cauchy. On a donc

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^p = 0.$$

En particulier, $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $l^p(\mathbb{N})$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\{x_k^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, ce qui montre par complétude de $\mathbb{R}$ qu'il existe $x_k \in \mathbb{R}$ tel que $x_k^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_k$. Soit donc $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. La suite $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans l^p, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{n\geq N} |x_k^n|^p < \varepsilon.$$

De plus pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{N} |x_k|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} |x_k^n|^p \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{N} |x_k^n|^p \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k^n|^p < \infty,$$

ce qui montre que $x \in l^p(\mathbb{N})$. On peut donc supposer que N est assez grand tel que

$$\sum_{k \geq N} |x_k|^p < \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $0 \leq k \leq N-1$, soit $M_k \geq \max\{N, M_{k-1}\}$ (où $M_{-1} = 0$) tel que pour tout $n \geq M_k$, on ait $|x_k^n - x_k|^p < \dfrac{\varepsilon}{N}$. En choisissant $M = \max\{M_0, \cdots, M_{N-1}\}$, on en déduit que pour tout $n \geq M$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k^n - x_k|^p = \sum_{k=0}^{N-1} |x_k^n - x|^p + \sum_{k=N}^{\infty} |x_k^n| + \sum_{k=N}^{\infty} |x_k|^p < 3\varepsilon$$

□

Remarque 14.1.7. En revanche, l'espace $L^p(I)$ défini dans l'exemple précédente n'est *pas* un espace de Banach. En effet, la continuité n'est pas préservée par convergence L^p, et il faut donc remplacer la notion de continuité par celle d'intégrabilité au sens de Lebesgue que vous verrez l'an prochain (et cet espace est lui, complet). Il n'est bien sûr pas question d'examiner cette théorie dans ces notes de cours.

Théorème 14.1.8. *Un espace de Hilbert (réel) est un espace de Banach dont la norme provient d'un produit scalaire.*

L'exemple de base est donc l'espace $l^2(\mathbb{Z})$.

14.2 Applications linéaires continues et espace dual

Définition 14.2.1. Soit E et F deux espaces normés. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ est l'ensemble des applications linéaires *continues* de E dans F.

Théorème 14.2.2. *Soit E et F deux espaces normés et $T : E \to F$. Alors, on a $T \in \mathscr{L}(E,F)$ si et seulement si*

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F < \infty.$$

De plus, l'espace vectoriel $(\mathscr{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathscr{L}(E,F)})$ est un espace normé.

Démonstration. Il faut bien faire attention au fait qu'en dimension infinie, la boule unité $\overline{B}_E(0,1) = E \cap \{x : \|x\|_E \leq 1\}$ n'est jamais compacte (on le verra plus tard dans le cours). La propriété n'est donc pas évidente. On rappelle que T est continue si et seulement si pour tout ouvert $U \subset F$, l'ensemble $T^{-1}(U) \subset E$ est ouvert. Commençons par établir cette équivalence.

On commence par quelques rappels de topologie.

Définition 14.2.3. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques.

1. Pour tout $x \in X$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est définie par

$$B_X(x,r) = X \cap \{y : d_X(x,y) < r\}.$$

2. On dit que $U \subset X$ est ouvert si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset X$.
3. On dit qu'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge vers $x \in X$ si $d_X(x_n, x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.
4. On dit que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue si et seulement si pour tout suite convergence $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, la suite $\{y_n = f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ converge.

Lemme 14.2.4. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques et $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$. Alors, f est continue si et seulement si pour tout ouvert $V \subset Y$, l'ensemble $U = f^{-1}(V) \subset X$ est ouvert dans X.*

Démonstration. Si la propriété du lemme est vérifiée, soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite convergeant vers $x \in X$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon)) \subset X$ est ouvert et comme $x \in f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))$, il existe $\delta > 0$ tel que $B_X(x,\delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))$. De plus, la convergence de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$d_X(x_n, x) < \delta,$$

ce qui montre en d'autres termes que $x_n \in B_X(x,\delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent, on a $f(x_n) \in B_Y(f(x),\varepsilon)$ pour tout $n \geq N$, ce qui implique que

$$d_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \qquad \text{pour tout } n \geq N.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on en déduit que $d_Y(f(x_n), f(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et on a bien $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. La fonction f est donc continue.

Réciproquement, supposons par l'absurde que la propriété du lemme n'est pas vérifiée. Pour commencer, on remarque que les boules ouvertes forment une base de topologie, i.e., pour tout ouvert $V \subset Y$, il existe une famille $\{y_i\}_{i\in I} \subset Y$ et une suite de rayons $\{r_i\}_{i\in I} \subset]0,\infty[$ telles que

$$V = \bigcup_{i\in I} B_Y(y_i, r_i).$$

Si $y \in \displaystyle\bigcup_{i\in I} B_Y(y_i, r_i)$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $y \in B_Y(y_i, r_i)$, ce qui montre que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} B_Y(y_i, r_i)$ est ouvert. Réciproquement, la définition d'ouvert montre que pour tout $y \in V$, il existe $r(y) \in]0,\infty[$ tel que $B_Y(y, r(y)) \subset V$. On en déduit que

$$\bigcup_{y\in Y} B_Y(y, r(y)) \subset Y$$

et l'inclusion réciproque est triviale (car $y \in B_Y(y, r(y))$ pour tout $y \in Y$).

Par conséquent, il suffit de vérifier la continuité sur les boules ouvertes. Pour voir comment la négation doit s'effectuer, on écrit la propriété avec des quantificateurs :

$$\forall\, y \in Y, \forall\, s > 0, \forall\, x \in f^{-1}(B_Y(y,s)), \exists\, r > 0 \text{ tel que } B_X(x,r) \subset f^{-1}(B_Y(y,s)).$$

La négation logique de cette proposition est

$$\exists\, y \in Y, \exists\, s > 0\, \exists\, x \in f^{-1}(B_Y(y,s)), \forall\, r > 0, B_X(x,r) \not\subset f^{-1}(B_Y(y,s)).$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B_X(x, 2^{-n})$ tel que $x_n \notin f^{-1}(B_Y(y,s))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc l'inégalité

$$d_Y(f(x_n), y) \geq s.$$

Comme $f(x) \in B_Y(y,s)$ par définition, on a $d_Y(f(x), y) < s$, ce qui implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d_Y(f(x), y) < s - \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire implique donc que

$$d_Y(f(x_n), f(x)) \geq d_Y(f(x_n), y) - d_Y(f(x), y) \geq s - (s-\varepsilon) = \varepsilon > 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{14.2.1}$$

On a $d_X(x_n, x) \leq 2^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre par continuité de f que $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, ou de manière équivalente, que $d_Y(f(x_n), f(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La propriété (14.2.1) n'est donc pas satisfaite si $n \in \mathbb{N}$ est assez grand, ce qui est une contradiction. $\square$

Les boules étant une base de topologie, ceci implique en particulier que $T^{-1}(B_F(0,1))$ contient une boule ouverte. Notons-là $B_E(x,r) \subset F$. On a donc

$$\|T(y)\|_F \leq 1 \quad \text{pour tout } y \in B_E(x,r),$$

ce qui implique par linéarité de T que pour tout $y \in B_E(0,1)$, on a

$$\begin{aligned}\|T(y)\|_F &= r^{-1}\|T(ry)\|_F = r^{-1}\|T(x+ry)-T(x)\|_F \leq r^{-1}\|T(x+ry)\|_F + r^{-1}\|T(x)\|_F \\ &\leq r^{-1}(1+\|T(x)\|_F)\end{aligned}$$

et l'inégalité attendue est donc prouvée. Réciproquement, si l'inégalité est vérifiée, par linéarité de T et homogénéité de la norme, on en déduit qu'il existe $C < \infty$ telle que

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Ceci implique que pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|T(x)-T(y)\|_F = \|T(x-y)\|_F \leq C\|x-y\|_E.$$

L'application T est donc lipschitzienne ce qui implique également sa continuité. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors on a

$$\|T(x_n)-T(x)\|_F \leq \|x_n - x\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre que $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T(x) \in F$. □

C'est là toute la difficulté des espaces de Banach : les applications linéaires ne sont pas forcément continues ! On verra qu'en règle générale, il faut complètement abandonner l'intuition de la dimension finie en dehors de certains cas très particuliers dont les espaces de Hilbert forment l'exemple archétypal. En dimension infinie, on impose aux éléments du dual d'être également continus. En vertu du résultat précédent, cela donne la définition suivante.

Définition 14.2.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Son espace dual, noté E' est l'ensemble des formes linéaires *continues* de E dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|.$$

On prouve et on énonce à présent un théorème difficile d'extension des applications linéaires — le théorème de Hahn-Banach — qui, s'il est facile à démontrer en dimension finie, requiert une forme faible de l'axiome du choix. Pour établir ce résultat, il faut néanmoins utiliser l'axiome du choix dans toute sa force, et pour être précis, une formulation équivalente connue sous le nom de *lemme de Zorn* (malgré son nom de lemme, il s'agit bien d'un axiome [*]). Commençons par énoncer le théorème de Hahn-Banach ([2]). Nous aurons ensuiote besoin de quelques définitions générales sur la notion d'ordre partiel.

Théorème 14.2.6 (Hahn-Banach)**.** *Soit X un espace vectoriel réel et $N : X \to \mathbb{R}$ une fonction sous-linéaire homogène de degré 1, c'est-à-dire, qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $N(\lambda x) = \lambda N(x)$ *pour tout* $x \in X$ *et pour tout* $\lambda > 0$.
2. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ *pour tout* $x, y \in X$.

Soit $Y \subset X$ un sous-espace vectoriel et $f : Y \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $f \leq N_{|Y}$. Alors, il existe une extension $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$ — i.e. *telle que $\overline{f}_{|Y} = f$ — et $\overline{f} \leq N$ on X.*

.

Définition 14.2.7. (i) Un ordre partiel sur X est une relation binaire $\leq$ sur $X \times X$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

1. $x \leq x$ for all $x \in X$ **(réflexivité)**.
2. Pour tout $x, y \in X$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$ **(anti-symétrie)**.
3. Pour tout x, y, z, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$ **(transitivité)**.

*. La troisième version la plus commune de l'axiome du choix est le *théorème de Zermelo*, qui est lui aussi un axiome

(ii) On dit qu'un sous-ensemble $Y \subset X$ est complètement ordonné (par $\leq$) si pour tout $x, y \in Y$, on a soit $x \leq y$, ou $y \leq x$ — auquel cas, on dit que $\leq$ est une *ordre total* (sur Y).
(iii) On dit qu'un élément $x \in X$ est une bornée supérieure de Y si $y \leq x$ pour tout $y \in X$.
(iv) Finalement, on dit que $x \in X$ est un élément maximal si pour tout $y \in X$ tel que $x \leq y$, on a $y = x$.

Lemme 14.2.8 (Lemme de Zorn)**.** *Soit $(X, \leq)$ un ensemble non-vide inductif, c'est-à-dire, un ensemble pour lequel tout sous-ensemble complètement ordonné admet une borne supérieure. Alors, X admet un élément maximal.*

On peut finalement passer à la preuve du théorème de Hahn-Banach.

Démonstration. (du Théorème 14.2.6)

Étape 1. Le cas des espaces de dimension finie.

Le théorème est vrai en dimension finie sans avoir recours à l'axiome du choix, et par simplicité des notations, il suffit donc de le montrer sur $\mathbb{R}^n$. Considérons donc une application linéaire $f : \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (où $k < n$) et montrons qu'elle admet une extension $\overline{f}$ à $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $\overline{f} \leq N$ sur $\mathbb{R}^{k+1}$. En voyant $\mathbb{R}^k$ comme $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, on étend f par $\overline{f} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\overline{f}(x,t) = f(x) + \alpha\, t \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R},$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer plus tard. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^{k+1}$, on a

$$f(x) + \alpha\, t \leq N(x,t),$$

où l'on identifie par abus de notation (x,t) à $(x,,t,0) \in \mathbb{R}^n$. Si $t > 0$, par homogénéité de N, l'inégalité est équivalente à

$$\left(f(x) + \alpha\, t \leq tN(t^{-1}x, 1)\right) \Longleftrightarrow \left(f(y) + \alpha \leq N(y,1) \quad (y = t^{-1}x)\right),$$

et pour $t < 0$, on obtient la condition

$$f(y) - \alpha \leq N(y,-1).$$

Par conséquent, α doit satisfaire à la condition

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^k} \left(f(y) - N(y,-1)\right) \leq \alpha \leq \inf_{z \in \mathbb{R}^k} \left(-f(z) + N(z,1)\right).$$

Un tel α existe toujours car $f(y) - N(y,-1) \leq -f(z) + N(z,1)$ pour tout $y, z \in \mathbb{R}^k$. En effet, on a par linéarité de f

$$f(y) + f(z) = f(y+z) \leq N(y+z) = N(y+z, -1+1) \leq N(y,-1) + N(z,1),$$

ce qui conclut la preuve de cette étape. Une récurrence immédiate permet ensuite d'étendre f à $\mathbb{R}^n$. En dimension infinie, cela veut dire que si $Y \subset Z$ et Y est de codimension finie dans Z, alors il existe une extension contrôlée de toute application linéaire $f : Y \to \mathbb{R}$ qui vérifie les hypothèses du théorème de Hahn-Banach.

Étape 2. Cas général.

Soit E l'ensemble des extensions $g : D(g) \to \mathbb{R}$ de f (où $D(g) \supset Y$ est le domaine de g) telles que $g \leq N|_{D(g)}$. On introduit la relation d'ordre partiel $\leq$ sur E comme suit :

$$(g_1 \leq g_2) \Longleftrightarrow \left(D(g_1) \subset D(g_2) \text{ et } g_2 = g_1 \text{ on } D(g_1)\right).$$

L'ensemble E est non-vide car $f \in E$. De plus, si $F \subset E$ est complètement ordonné, et en écrivant $F = \{g_i\}_{i \in I}$, on définit $g : \bigcup_{i \in I} D(g_i) \to \mathbb{R}$ par $g = g_i$ sur $D(g_i)$. Cette fonction est bien définie et est une borne supérieure de F. Par conséquent, E est inductif, et admet un élément maximal qu'on note f_0. Par l'**Étape 1**, si $D(f_0) \neq X$, f_0 admet une extension $\overline{f}_0 : D(\overline{f}_0) \to \mathbb{R}$ telle que $D(\overline{f}_0)/D(f_0) \simeq \mathbb{R}$ soit de codimension 1. En particulier, ceci en particulier, cela implique que f_0 n'est pas un élément maximal, ce qui est une contradiction. Par conséquent, $D(f_0) = X$ et $\overline{f} = f_0$ est une extension de f qui satisfait aux propriétés requises. $\square$

Corollaire 14.2.9. *Soit E un espace normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Tout élément f du dual de F (où F est équipé de la restriction de la norme de E à F) admet une extension continue $\overline{f}$ à E ($\overline{f}_F = f$) telle que*

$$\left\|\overline{f}\right\|_{E'} = \|f\|_{F'}\,.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème de Hahn-Banach à $N(x) = \|f\|_{F'}\,\|x\|_E$. □

14.3 Propriétés fines des espaces de Hilbert

On rappelle qu'un ensemble K est dit convexe si pour tout $x, y \in K$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

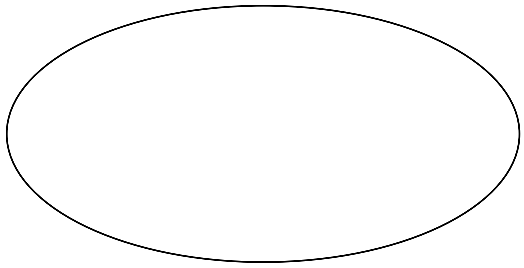

Figure 14.1 – Domaine convexe

En revanche, on vérifie facilement que le domaine suivant n'est pas convexe.

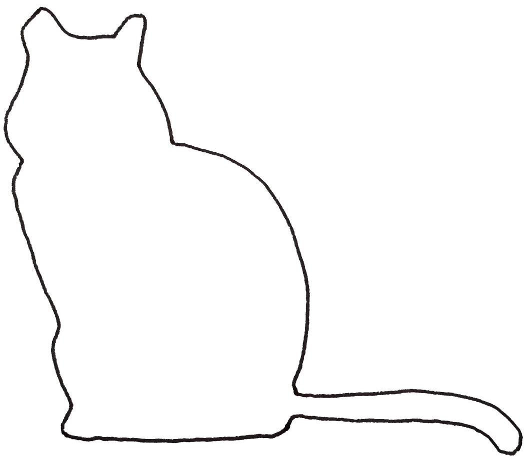

Figure 14.2 – Domaine non-convexe

Théorème 14.3.1 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $K \subset H$ un ensemble convexe fermé non vide. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $P_K(x) \in K$ tel que*

$$\|x - P_K(x)\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|\,.$$

De plus, x est caractérisé par la propriété

$$\langle x - P_K(x), y - P_K(x)\rangle \leq 0 \qquad \text{pour tout } y \in K. \tag{14.3.1}$$

Démonstration. **Étape 1.** Existence.

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ une suite minimisante, c'est-à-dire, une suite telle que

$$d_n = \|x - x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d = \inf_{y\in K} \|x - y\| .$$

En vertu de l'identité du parallélogramme, on a

$$\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_n - y_n}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right).$$

Par convexité, on a $\dfrac{x_n + x_m}{2} \in K$, ce qui montre que

$$\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geq d^2,$$

ce qui implique que

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}^2\right\| = \frac{1}{2}\left(d_n^2 + d_m^2\right) - \left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(d_n^2 - d^2\right) + \frac{1}{2}\left(d_m^2 - d^2\right) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et par complétude de l'espace de Hilbert H, ceci implique qu'elle converge vers un élément $x \in K$. Enfin, l'ensemble K étant compact, on en déduit que $x \in K$.

Étape 2. Unicité. L'unicité provient de la stricte convexité de la norme (il suffit de répéter l'argument de la preuve). En effet, si x_1 et x_2 sont deux minimiseurs, on a

$$\left\|x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_1 - x_2}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x - x_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x - x_2\|^2 = d^2,$$

et comme $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \in K$ par convexité, on a

$$\left\|x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right\|^2 \geq d^2,$$

ce qui donne

$$\left\|\frac{x_1 - x_2}{2}\right\|^2 = d^2 - \left\|x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right\|^2 \leq 0,$$

et on obtient donc $x_1 = x_2$.

Étape 3. Preuve de la propriété caractéristique (14.3.1). La projection $P_K(x)$ minimisant la distance, on en déduit que pour tout $y \in K$, on a

$$\|x - P_K(x)\|^2 \leq \|x - y\|^2 , \tag{14.3.2}$$

et cette inégalité est équivalente à

$$2\langle x, y - P_K(x)\rangle + \|P_K(x)\|^2 - \|y\|^2 = \|x - P_K(x)\|^2 - \|x - y\|^2 \leq 0.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
2\langle x, y - P_K(x)\rangle + \|P_K(x)\|^2 - \|y\|^2 &= 2\langle x - P_K(x), y - P_K(x)\rangle + 2\langle P_K(x), y - P_K(x)\rangle + \|P_K(x)\|^2 - \|y\|^2 \\
&= 2\langle x - P_K(x), y - P_K(x)\rangle + 2\langle P_K(x), y\rangle - \left(\|P_K(x)\|^2 + \|y\|^2\right) \\
&= 2\langle x - P_K(x), y - P_K(x)\rangle - \|P_K(x) - y\|^2 .
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité (14.3.2) est équivalente à

$$2\,\langle x-P_K(x),y-P_K(x)\rangle \leq \|P_K(x)-y\|^2\,. \tag{14.3.3}$$

En général, il ne serait pas possible d'obtenir une caractérisation plus précise, mais nous n'avons pas encore utilisé la convexité de K. Soit donc $0<t\leq 1$ et $y_t=(1-t)P_K(x)+t\,y\in K$. Comme $y_t\in K$ par convexité, et $P_K(x)-y_t=t(P_K(x)-y)$, (14.3.3) appliquée à y_t donne l'inégalité

$$\begin{aligned}2t\langle x-P_K(x),y-P_K(x)\rangle &= 2\langle x,t(y-P_K(x))\rangle\\ &= 2\langle x,y_t-P_K(x)\rangle \leq \|P_K(x)-y\|^2 = \|t(P_K(x)-y)\|^2 = t^2\,\|P_K(x)-y\|^2\,.\end{aligned}$$

On peut donc diviser par $t>0$ et faire tendre t vers 0, ce qui donne

$$2\,\langle x-P_K(x),y-P_K(x)\rangle \leq 0. \tag{14.3.4}$$

Réciproquement, si l'inégalité (14.3.4) est vérifiée, alors l'inégalité (14.3.3) est trivialement vérifiée car

$$2\langle x-P_K(x),y-P_K(x)\rangle \leq 0 \leq \|P_K(x)-y\|^2$$

par positivité de la norme. □

Corollaire 14.3.2. *Soit $K\subset H$ un ensemble convexe fermé non vide. Alors, on a*

$$\|P_K(x)-P_K(y)\| \leq \|x-y\| \qquad \textit{pour tout } x,y\in H. \tag{14.3.5}$$

Démonstration. En utilisant la caractérisation (14.3.1), on obtient successivement

$$\begin{aligned}\langle x-P_K(x),P_K(y)-P_K(x)\rangle \leq 0\\ \langle y-P_K(y),P_K(x)-P_K(y)\rangle \leq 0,\end{aligned}$$

ce qui donne par addition

$$\begin{aligned}&\|P_K(x)-P_K(y)\|^2-\langle x-y,P_K(x)-P_K(y)\rangle\\ &=\langle x-P_K(x),P_K(y)-P_K(x)\rangle+\langle y-P_K(y),P_K(x)-P_K(y)\rangle \leq 0,\end{aligned}$$

ce qu'on réécrit

$$\|P_K(x)-P_K(y)\|^2 \leq \langle x-y,P_K(x)-P_K(y)\rangle \leq \|x-y\|\,\|P_K(x)-P_K(y)\|$$

en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Si $P_K(x)=P_K(y)$, l'inégalité est triviale. Autrement, on peut diviser par $\|P_K(x)-P_K(y)\|$ et le résultat s'ensuit. □

Remarque 14.3.3. En d'autres termes, la projection est une application 1-lipschitzienne, ce qui est une propriété naturelle pour une projection (qui ne saurait augmenter les distances).

Corollaire 14.3.4. *Soit $V\subset H$ un sous-espace vectoriel fermée. Alors, pour tout $x\in H$, l'élément $P_K(x)\in V$ est caractérisé par la propriété*

$$\langle x-P_K(x),y\rangle = 0 \qquad \textit{pour tout } y\in V.$$

De plus, P_K est un opérateur linéaire continu.

Démonstration. Un sous-espace vectoriel étant également un ensemble convexe, on peut utiliser le théorème de projection précédente. Pour tout $y\in V$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $t\,y\in V$, ce qui montre que

$$t\,\langle x-P_K(x),y\rangle-\langle x-P_K(x),P_K(x)\rangle = \langle x-P_K(x),ty-P_K(x)\rangle \leq 0. \tag{14.3.6}$$

Si $\langle x-P_K(x),y\rangle\neq 0$, en faisant tendre $t\to\infty$ ou $t\to-\infty$ (en fonction du signe de$\langle x-P_K(x),y\rangle$), l'inégalité (14.3.6) n'est plus vérifiée. Réciproquement, si $\langle x-P_K(x),y\rangle=0$ pour tout $y\in Y$, comme $y-P_K(x)\in V$ pour tout $y\in Y$, on obtient $\langle x-P_K(x),y-P_K(x)\rangle=0\leq 0$ et la propriété caractéristique de la projection est vérifiée.

La linéarité de P_K est facile car si $x_1,x_2\in X$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a par linéarité du produit scalaire pour tout $y\in V$

$$\langle \lambda\,x_1+x_2-(\lambda P_K(x_1)+P_K(x_2)),y\rangle = \lambda\,\langle x_1-P_K(x_1),y\rangle+\langle x_2-P_K(x_2),y\rangle = 0$$

ce qui montre que $P_K(\lambda\,x_1+x_2)=\lambda\,P_K(x_1)+P_K(x_2)$ en vertu de la propriété caractéristique. □

14.4 Espace dual d'un espace de Hilbert

Théorème 14.4.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)**.** *Pour tout $f \in H'$, il existe un unique élément $x_0 \in H$ tel que pour tout $x \in H$, on ait*

$$f(x) = \langle x_0, x \rangle .$$

De plus, on a $\|f\|_{H'} = \|x_0\|_H$.

Démonstration. Soit $Y = \mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$. Comme l'application $f : H \to \mathbb{R}$ est continue, $Y \subset H$ est un ensemble fermé. Si $Y = H$, on choisit alors $x = 0$ et le théorème est démontré. Autrement, montrons qu'il existe $x_1 \in H$ tel que $\|x_1\| = 1$, $x_1 \notin Y$ et $\langle x_1, y \rangle = 0$ pour tout $y \in Y$. En effet, il suffit de choisir $x_2 \in H \setminus Y$ et de poser

$$x_1 = \frac{x_2 - P_Y(x_2)}{\|x_2 - P_Y(x_2)\|}.$$

De plus, tout élément $x \in H$ admet une décomposition unique de la forme $x = \lambda\, x_1 + y$, où $y \in V$. En effet, si une telle décomposition est vérifiée, en appliquant f, on trouve

$$f(x) = \lambda\, f(x_1) + f(y) = \lambda\, f(x_1) \implies \lambda = \frac{f(x)}{f(x_1)}$$

et on définit donc $y = x - \dfrac{f(x)}{f(x_1)} x_1$, ce qui montre bien que $f(y) = f(x) - \dfrac{f(x)}{f(x_1)} f(x_1) = 0$ et on a donc $y \in \mathrm{Ker}(f) = Y$. Finalement, on a

$$0 = \langle x_1, y \rangle = \left\langle x_1, x - \frac{f(x)}{f(x_1)} x_1 \right\rangle = \langle x_1, x \rangle - f(x)\, \|x_1\|^2 = \langle x_1, x \rangle - \frac{f(x)}{f(x_1)}$$

comme $\|x_1\| = 1$, ce qui donne par linéarité du produit scalaire

$$f(x) = \langle x_1, x \rangle\, f(x_1) = \langle f(x_1) x_1, x \rangle$$

et on prend donc $x_0 = f(x_1) x_1$. □

14.5 Somme et base hilbertiennes

La notion de base hilbertienne remplace la notion de base orthonormée en dimension infinie.

Définition 14.5.1. Soit $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espace fermée de H. On dit que H est somme hilbertienne des $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $H = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ si :

1. Les espaces $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont orthogonaux deux à deux :
$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall\, x \in E_m \ \forall\, y \in E_n, m \neq n.$$
2. L'espace vectoriel engendré par les $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans H.

Théorème 14.5.2. *Supposons que H est somme hilbertienne des $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $x \in H$ et $x_n = P_{E_n}(x)$. Alors, on a*

1. $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, *i.e.* $\left\| x - \sum\limits_{n=0}^{N} x_n \right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
2. $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$ *(inégalité de Parseval).*

Réciproquement, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ *et* $x_n \in E_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < \infty$*, alors la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *est convergente et* $x = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *vérifie* $x_n = P_{E_n}(x)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $T_n = \sum_{k=0}^{n} P_{E_k}$. Alors, on a $T_n \in \mathscr{L}(H)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par orthogonalité des espaces $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, pour tout $x \in H$, on a

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|P_{E_k}(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^2 .$$

D'autre part, le Corollaire 14.3.4 implique que $\|x_k\|^2 = \langle x_k, x\rangle$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ce qui montre que

$$\|T_n(x)\|^2 = \langle T_n(x), x\rangle \leq \|T_n(x)\| \, \|x\|$$

en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient donc

$$\|T_n(x)\| \leq \|x\| \quad \text{pour tout } x \in H. \tag{14.5.1}$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par les $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in H$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $\overline{x} \in F$ tel que $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$. Comme $\overline{x}$ est combinaison linéaire finie d'élément de F, on a $T_n(\overline{x}) = \overline{x}$ pour n assez grand (mettons $n \geq N$). D'autre part, l'inégalité (14.5.1) montre que

$$\|T_n(x) - T_n(\overline{x})\| = \|T_n(x - \overline{x})\| \leq \|x - \overline{x}\| < \varepsilon,$$

ce qui montre par l'inégalité triangulaire que pour $n \geq N$

$$\|T_n(x) - x\| \leq \|T_n(x) - T_n(\overline{x})\| + \|T_n(\overline{x}) - x\| = \|T_n(x) - T_n(\overline{x})\| + \|\overline{x} - x\| < 2\varepsilon.$$

Par conséquent, on a $x = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ et les autres propriétés s'ensuivent aisément. □

Définition 14.5.3. Une base hilbertienne de H est une famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ d'éléments unitaires telle que H soit somme hilbertienne des $\{\mathrm{Vect}(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. En d'autres termes, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne si $\langle e_m, e_n\rangle = \delta_{m,n}$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ et si l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires finies des $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans H.

Théorème 14.5.4. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense. Soit $F_n = \mathrm{Vect}(x_0, \cdots, x_{n-1})$. Alors, les $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite croissante de sous-espaces de dimension finie telle que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est dense dans H. On choisit donc une base orthonormée de F_0 (par le procédé de Gram-Schmidt) qu'on complète en une base de F_1, et par récurrence immédiate, on construit une base hilbertienne de H. □

Remarque 14.5.5. C'est encore vrai dans le cas non-séparable, mais la base sera non-dénombrable et il faudra utiliser le lemme de Zorn pour démontrer son existence.

Exemple 14.5.6. En dehors de $l^2(\mathbb{Z})$, l'exemple le plus connu pour $L^2([0, 2\pi])$ est celui des séries de Fourier, où la base hilbertienne est donnée par

$$\left\{\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos(nx)\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \left\{\sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin(nx)\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Les séries de Fourier permettent donc d'effectuer un isomorphisme entre $l^2(\mathbb{Z})$ et $L^2([0, 2\pi])$ si on prend cette fois-ci le produit scalaire hermitien

$$\langle f, g\rangle_{L^2([0,2\pi])} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

La base hilbertienne est alors donnée par $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

14.6 Spectre d'un opérateur compact

14.6.1 Définitions

Pour avoir une base notion de diagonalisation en dimension infinie, il faut imposer une notion de compacité forte.

Soit E et F deux espaces de Banach.

Définition 14.6.1. On dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est compact si $T(B_E(0,1))$ est relativement compact. On désigne par $\mathscr{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $\mathscr{K}(E) = \mathscr{K}(E,E)$.

On rappelle qu'en dimension infinie, la compacité se définit comme suit.

Définition 14.6.2. Soit (X,d) un espace métrique. On dit que $K \subset X$ est un espace compact si pour tout famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$ telle que $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $i_1, \cdots, i_n \in I$ tels que $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}$.

En d'autres termes, un ensemble est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement *fini.* [*]

On commence par un résultat important sur la fermeture des opérateurs compacts.

Théorème 14.6.3. *L'ensemble $\mathscr{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E,F)$.*

Démonstration. Soit $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{K}(E,F)$ et $T \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $\|T_n - T\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme F est complet, il suffit de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, $T(B_E(0,1))$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $B_F(y_i,\varepsilon)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_n - T\| < \varepsilon$. Comme $T_n(B_E(0,1))$ est relativement compact, il existe $y_1, \cdots, y_m \in F$ tels que $T_n(B_E(0,1)) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_F(y_i,\varepsilon)$. Par conséquent, on a $T(B_E(0,1)) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_F(y_i, 2\varepsilon)$. □

14.6.2 Théorie de Riesz-Fredholm

Lemme 14.6.4 (Lemme de Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-ensemble fermé strict ($F \neq E$). Alors,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E \ \textit{tel que} \ \|x\| = 1 \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{dist}(x,F) > 1-\varepsilon.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in E \setminus F$. Comme F est fermé, on a $d = \mathrm{dist}(x,F) > 0$. Soit donc $x_1 \in F$ tel que

$$d \leq \|x0 - x_1\| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Alors, $x = \dfrac{x_0 - x_1}{\|x_0 - x_1\|}$ est tel que $\mathrm{dist}(x,F) \geq 1-\varepsilon$. En effet, pour tout $y \in F$, on a

$$\|x-y\| = \frac{1}{\|x_0 - x_1\|}\,\|x_0 - (x_1 + \|x_0 - x_1\|\, y)\| > \frac{d}{\|x_0 - x_1\|} \geq 1-\varepsilon$$

car $x_1 + \|x_0 - x_1\|\, y \in F$. □

Théorème 14.6.5. *Soit E un espace vectoriel normé tel que $\overline{B}_E(0,1) = E \cap \{x : \|x\| \leq 1\}$ soit compact. Alors, E est de dimension finie.*

[*]. Attention, la « définition » donnée dans les premiers cours d'analyse d'ensemble « fermé et borné » n'est pas une définition mais une équivalence (un théorème, donc) dans le cas de $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie euclidienne.

Démonstration. Il suffit de montrer que la boule unité d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compacte (le cas de la dimension finie se ramenant au fameux « fermé-borné »). Supposons donc que E est de dimension infinie. Il existe une suite d'espace vectoriels $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\dim(E_n) = n$ et $E_{n-1} \subset E_n$ pour tout $n \geq 1$. Grâce au lemme précédent (avec $\varepsilon = 1/2$), on construit une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$, et $\operatorname{dist}(x_n, E_{n-1}) > \dfrac{1}{2}$. En particulier, on a pour tout $m < n$ l'inégalité $\|x_n - x_m\| > \dfrac{1}{2}$, ce qui montre que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite convergente. Par conséquent, la boule unité (et même la sphère unité $S_E = E \cap \{x : \|x\| = 1\}$!) $\overline{B}_E(0,1)$ n'est pas compacte. □

Le théorème suivant est difficile et on omet la preuve.

Théorème 14.6.6 (Alternative de Fredholm)**.** *Soit $T \in \mathscr{K}(E)$. Alors*

1. $\operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id}_E)$ *est de dimension finie.*
2. $\operatorname{Im}(T - \operatorname{Id}_E)$ *est fermé, et plus précisément :* $\operatorname{Im}(T - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(T' - \operatorname{Id}_{E'})^{\perp}$.
3. $\operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id}_E) = \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(T - \operatorname{Id}_E) = E$.
4. $\dim \operatorname{Im}(T - \operatorname{Id}_E) = \dim \operatorname{Im}(T' - \operatorname{Id}_{E'})$.

14.6.3 Spectre

Définition 14.6.7. Soit $T \in \mathscr{K}(E)$. L'ensemble résolvant est

$$\rho(T) = \mathbb{R} \cap \{\lambda : (T - \lambda \operatorname{Id}_E) : E \to E \text{ est bijectif}\}.$$

Le spectre $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant : $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une *valeur propre* et on note $\lambda \in \operatorname{vp}(T)$ si

$$E_\lambda(T) = \operatorname{Im}(T - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0\}.$$

On dit que $E_\lambda(T)$ est l'espace propre associé à λ.

Remarque 14.6.8. En dimension infinie, le spectre et l'ensemble des valeurs propres sont en général disjoint mais on a l'inclusion $\operatorname{VP}(T) \subset \sigma(T)$. Par exemple, si $E = l^2(\mathbb{N})$ et $Tx = \{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est la décalage à droite*, alors $0 \in \sigma(T)$ mais $0 \notin \operatorname{vp}(T)$.

Proposition 14.6.9. *Le spectre d'un opérateur compact $T \in \mathscr{K}(E)$ est un ensemble compact et $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.*

Démonstration. Soit $|\lambda| > \|T\|$. Alors, l'équation $T(x) - \lambda x = y$ admet une unique solution en vertu du théorème de point fixe de Banach.

Montrons que $\rho(T)$ est ouvert. Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre $T(x) - \lambda x = y$ (où $y \in E$ est arbitraire). On réécrit cette équation sous la forme

$$x = (T - \lambda_0 \operatorname{Id})^{-1} (y + (\lambda - \lambda_0)x)$$

et le théorème de point fixe de Banach fournit une solution à condition que

$$|\lambda - \lambda_0| \left\|(T - \lambda_0 \operatorname{Id})^{-1}\right\| < 1.$$

□

Théorème 14.6.10. *Supposons que E est un espace de Banach de dimension finie et soit $T \in \mathscr{K}(E)$. Alors, on a*

1. $0 \in \sigma(T)$.
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \operatorname{vp}(T) \setminus \{0\}$.

*. *Shift* en anglais

3. *l'une des situations suivantes :*
   — *ou bien* $\sigma(T) = \{0\}$.
   — *ou bien* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est fini.*
   — *ou bien* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est une suite qui tend vers* 0.

Remarque 14.6.11. En dimension infinie, un opérateur non-compact peut avoir un spectre continu.

Démonstration. 1. Si $0 \notin \sigma(T)$, alors T est bijectif et $\mathrm{Id}_E = T^{-1} \circ T$ est compact comme composition d'opérateurs compacts (on admet que l'inverse d'un opérateur continu est continu). Or, cela implique que E est de dimension finie, contradiction.

2. Soit $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Si $\mathrm{Im}(T - \lambda\,\mathrm{Id}) = \{0\}$, l'alternative de Fredholm montre que $\mathrm{Im}(T - \lambda\,\mathrm{Id}) = E$, ce qui montre que $\lambda \in \rho(T)$, contradiction.

3. On commence par admettre le lemme suivant.

Lemme 14.6.12. *Soit* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *une suite de réels tous distincts telle que* $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ *et* $\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors,* $\lambda = 0$.

Retournons à la preuve du théorème. Pour tout $n \geq 1$, l'ensemble

$$\sigma(T) \cap \left\{\lambda : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

est vide ou fini (il est compact et le seul point d'accumulation possible de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est 0 en vertu du lemme précédent). Si $\sigma(T) \setminus \{0\}$ contient une infinité de points distincts, on peut donc les arranger en une suite qui tend vers 0.

Revenons à présent à la démonstration du lemme.

du lemme. Soit $e_n \in E \setminus \{0\}$ tel que $T(e_n) = \lambda_n e_n$ et $E_n = \mathrm{Vect}(e_0, \cdots, e_n)$. Montrons que $E_n \subset E_{n+1}$ et $E_n \neq E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, supposons la propriété vérifiée pour tout E_k avec $k \leq n$. Si $e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1} e_i = \lambda_{n+1} e_{n+1} = T(e_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i,$$

ce qui montre que $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ et comme les valeurs propres sont distinctes, on a donc $\alpha_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, ce qui est absurde. Par conséquent, on a $E_n \subset E_{n+1}$ et $E_n \neq E_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, comme $(T - \lambda_n \mathrm{Id}_E)(E_n) \subset E_{n-1}$, on appliquant le lemme de Riesz, on construit une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$ et $\mathrm{dist}(x_n, E_{n-1}) \geq \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. Soit $1 \leq m < n$ et sorte que

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n.$$

On a

$$\left\| \frac{T(x_n)}{\lambda_n} - \frac{T(x_m)}{\lambda_m} \right\| = \left\| \frac{T(x_n) - \lambda_n x_n}{\lambda_n} - \frac{T(x_m) - \lambda_m x_m}{\lambda_m} + x_n - x_m \right\| \geq \mathrm{dist}(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Si $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \neq 0$, on aboutit à une contradiction car $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. □

□

14.7 Décomposition des opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. On peut donc identifier le dual H' avec H.

Définition 14.7.1. On dit que $T \in \mathscr{L}(H)$ est auto-adjoint si $T' = T$, ou

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle \qquad \text{pour tout } \ x, y \in H.$$

Proposition 14.7.2. *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On définit*

Corollaire 14.7.3. *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors, $T = 0$.*

Démonstration. En effet, ceci implique que $\langle T(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in H$, et on a donc

$$2\,\langle T(x), y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \ x, y \in H.$$

□

On peut à présent énoncer le théorème principal de la théorie des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert.

Théorème 14.7.4 (Diagonalisation hilbertienne des opérateurs auto-adjoints compacts)**.** *Soit H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathscr{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact.*

Alors, H admet une base hilbertienne faite de vecteurs propres de T.

Démonstration. Soit $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des valeurs propres distinctes non-nulles de T et $\lambda_0 = 0$. On pose $E_n = \mathrm{Im}(T - \lambda_n \mathrm{Id}_H)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, on a $0 \leq \dim(E_0) \leq \infty$ et $0 < \dim(E_n) < \infty$ pour tout $n \geq 1$.

Comme l'opérateur T est auto-adjoint, les espaces propres sont orthogonaux par la *même* preuve que dans le cas de la dimension finie : si $T(x) = \lambda_m x$ et $T(y) = \lambda_n y$ $(m \neq n)$, alors

$$\lambda_m \langle x, y\rangle = \langle \lambda_m x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \langle x, \lambda_n y\rangle = \lambda_n \langle x, y\rangle$$

ce qui montre que $\langle x, y\rangle = 0$ car $\lambda_m - \lambda_n \neq 0$.

Soit F l'espace vectoriel engendré par les $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Il faut montrer que cet espace est dense. On a $T(F) \subset F$, ce qui montre que $T(F^\perp) \subset F^\perp$. En effet, si $x \in F^\perp$ et $y \in F$, alors $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = 0$. L'opérateur $T_0 = T_{|F^\perp}$ est auto-adjoint compact. D'autre part, on a $\sigma(T_0) = \{0\}$. En effet, si $\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}$, on a $\lambda \in \mathrm{vp}(T_0)$, ce qui montre qu'il existe $x \in F^\perp \setminus \{0\}$ tel que $T_0(x) = \lambda\, x$, et on a donc $\lambda \in \mathrm{vp}(T)$, ce qui est absurde car x est orthogonal à tous les espaces propres. On a donc $x = 0$, ce qui est absurde également.

Le corollaire précédent montre donc que $T_0 = 0$, et on a donc $F^\perp \subset \mathrm{Im}(T) \subset F$ et $F^\perp = \{0\}$. L'ensemble F est donc dense dans H. En choisissant une base hilbertienne pour chacun des E_n et en prenant leur réunion, on obtient donc une base hilbertienne de vecteurs propres de T. □

Remarque 14.7.5. Tous les résultats du chapitre restent vrais pour un espace de Hilbert complexe (hermitien) pourvu qu'on suppose que $T^* = T$.

Chapitre 15

Appendice

15.1 Division polynomiale

Proposition 15.1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non-nuls sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple de polynômes $(R, S) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tels que $P = QR + S$, où $\deg(S) < \deg(Q)$.*

Démonstration. Soit $d = \deg(P) \geq 0$ et $m = \deg(Q) \geq 0$ les degrés de P et Q. Si $Q = b_0 \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme constant, comme $Q \neq 0$ par hypothèse, il suffit de prendre $R = b_0^{-1}P$ et $S = 0$ pour obtenir la conclusion souhaitée. De plus, si $\deg(Q) > \deg(P)$, on choisit $R = 0$ et $S = P$. On note que c'est le seul choix possible car s'il existait $R \in \mathbb{K}[X] \neq \{0\}$ et $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(S) < \deg(P)$ et $P = QR + S$, alors on aurait $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(R) \geq \deg(R) > \deg(P)$. On peut donc supposer que $\deg(P) \geq \deg(Q) \geq 1$. Soit $a_i, b_j \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \qquad \text{et} \qquad Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j.$$

Par hypothèse, on a $a_d \neq 0$ et $b_m \neq 0$. On prouve le théorème par récurrence sur le degré $d \geq m$ de P. L'initialisation est déjà établie pour $0 \leq d \leq m - 1$, et on peut donc supposer le théorème prouvé pour tous les polynômes de degré au plus $d - 1$. On a

$$\begin{aligned} P - a_d b_m^{-1} X^{d-m} Q &= \sum_{i=0}^{d} a_i X^i - a_d X^d - \sum_{j=0}^{m-1} a_d b_m^{-1} b_j X^{m+j} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i X_i - \sum_{k=m}^{d-1} a_d b_m^{-1} b_{k-m} X^k \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i X_i + \sum_{i=m}^{d-1} \left(a_i - a_d b_m^{-1} b_{k-m}\right) X^i. \end{aligned}$$

On voit que le polynôme $P - a_d b_m^{-1} X^{d-m} Q$ est de degré au plus $d - 1$, et on peut donc appliquer la récurrence pour trouver $R', S' \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(S') \leq \deg(P - a_d b_m^{-1} X^{d-m} Q) \leq d - 1$ et

$$P - a_d b_m^{-1} X^{d-m} Q = QR' + S',$$

ce qu'on réécrit en

$$P = Q(R' + a_d b_m^{-1} X^{d-m}) + S'.$$

On choisit donc $R = R' + a_d b_m^{-1} X^{d-m}$ et $S = S'$. Comme $\deg(R') < d - m - 1$, on en déduit que R est uniquement déterminé. De même, S est déterminé de manière unique, ce qui conclut la preuve de la proposition. □

On voit donc qu'on dispose d'un algorithme pour calculer la division euclidienne des polynômes. Par exemple, si $P = 2X^6 + 3X^2 + 1$ et $Q = X^2 + 1$, on calcule

$$P - 2X^4 Q = 2X^6 + 3X^2 + 1 - (2X^6 + 2X^4) = -2X^4 + 3X^2 + 1 = P'.$$

De même, on a

$$P' + 2X^2Q = -2X^4 + 3X^2 + 1 + 2X^4 + 2X^2 = 5X^2 + 1 = P''.$$

Finalement, on a

$$P'' - 5Q = 5X^2 + 1 - (5X^2 + 5) = -4,$$

ce qui donne

$$P = (2X^4 - 2X^2 + 5)Q - 4.$$

On a donc $R = 2X^4 - 2X^2 + 5$ *et* $S = -4$. *On vérifie sans peine le résultat*[*] *:*

$$\begin{aligned}(2X^4 - 2X^2 + 5)Q &= (2X^4 - 2X^2 + 5)(X^2 + 1)\\ &= 2X^6 + 2X^4 - 2X^4 - 2X^2 + 5X^2 + 5\\ &= 2X^6 + 3X^2 + 5\\ &= P + 4.\end{aligned}$$

∗. Le jour de l'examen, il peut être utile de vérifier le résultat de cette manière.

Bibliographie

[1] *Michael Artin.* Algebra. *Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991. xviii+618 pp., 1991.*

[2] *Haïm Brezis.* Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. *Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, xiv+234 pp., 1983.*

[3] *Robert L. Bryant. Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space.* Astérisque, tome 154-155, p. 321-347, *1987.*

[4] *Demetrios Christodoulou and Sergiu Klainerman.* The global nonlinear stability of the Minkowski space. *Princeton Mathematical Series, 41. Princeton University Press, Princeton, NJ, x+514 pp., 1993.*

[5] *Herbert Federer.* Geometric Measure Theory. *Springer-Verlag, 1969.*

[6] *Sophie Germain.* Œuvres philosophiques de Sophie Germain ; suivies de pensées et de lettres inédites. Et précédées d'une notice sur sa vie et ses œuvres (Nouv. éd.) / par Hipollyte Stupuy. *Paris, Collection : Philosophie moderne* `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2032890/f5.image`, *1894.*

[7] *G. H. Hardy.* A Mathematician's Apology. *Cambridge : Cambridge University Press., 1940.*

[8] *Alexandre Kojève.* L'Idée du déterminisme dans la physique classique et dans la physique moderne. *Librairie générale française, 346 p., ISBN 2-253-05190-X, 1990.*

[9] *Jean-Pierre Serre.* Cours d'arithmétique. *Deuxième édition revue et corrigée. Le Mathématicien, No. 2. Presses Universitaires de France, Paris, 188 pp., 1977.*