Algèbre Linéaire Semaine 5

1 Complément sur les Multiplicités (§9.7)

Soit $f \in \mathcal{L}(V)$, $\dim(V) < \infty$, $\chi_f(t)$ scindé, alors:

Proposition 1 $(\forall \lambda_i \in \sigma(f))$

1. $\sum \text{multalg}_{\lambda_i}(f) = \dim(V)$
2. $\text{multalg}_{\lambda_i}(f) = \dim(N_{\lambda_i}(f))$
3. $1 \leq \text{multgeom}_{\lambda_i}(f) \leq \text{multalg}_{\lambda_i}(f) \leq n$

Proposition 2

1. "Les multiplicités généralisées associées à chaque valeur propre forment une suite monotone" $\iff$ $\delta_{f,\lambda}(k) \leq \delta_{f,\lambda}(k+1), \quad \forall k \in \mathbb{N}$
2. $\delta_{f,\lambda}(1) = \text{multgeom}_{\lambda_i}(f)$
3. $1 \leq \delta_\lambda(1) < \ldots < \delta_\lambda(m) = \delta_\lambda(m+1) = \ldots$

$\rightarrow$ où $\delta_{f,\lambda}(m) = \dim(N_\lambda) = \text{multalg}_{\lambda_i}(f)$

Remarque

"Version endomorphisme"

Si f_1, $f_2 \in \mathcal{L}(V)$ sont **conjugués** (càd $\exists g \in \text{ GL}(V) | f_1 = g^{-1} \circ f_2 \circ g$), Alors $\delta_{f_1,\lambda}(k) = \delta_{f_2,\lambda}(k)$
$\rightarrow$ les multiplicités généralisées sont des invariants de conjugaison.

"Version matrice"

Si A_1, $A_2 \in M_n(k)$ sont **semblables** (càd $\exists B \in \text{ GL}_n(k) | A_1 = B^{-1} A_2 B$), Alors $\delta_{A_1,\lambda}(k) = \delta_{A_2,\lambda}(k)$
$\rightarrow$ invariants de similitudes.

2 Décomposition de Dunford (Jordan-Chevalley) (§9.9)

Théorème (mêmes hypothèses de départ): On peut décomposer $f \in \mathcal{L}(V)$ en $g + h$, où g est diagonalisable et h est nilpotent, et $g \circ h = h \circ g$.

Remarques:

- On peut également énoncer ce théorème pour les matrices carrées dont le polynôme caractéristique est scindé (voir §9.9.2).
- La décomposition de Dunford d'une matrice est unique.
- $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ la décomposition de Dunford nous donne un moyen de calculer $A^m = (D+N)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} D^j N^{m-j}$ (où D est diagonale et N est nilpotente).

Lemme: "Si f n'a qu'une valeur propre et $\chi_f(t)$ est scindé, alors $(f - \lambda I_v) \in \mathcal{L}(V)$ est nilpotent."

$\triangleleft$ **!** Si $\chi_f(t)$ n'est pas scindé, on peut trouver des contre-ex.

3 Sous-espaces cycliques d'un endomorphisme (§9.10)

Hypothèse de base: · Soit $f \in \mathcal{L}(V)$, $u \in V$ un vecteur propre généralisé (V.P.G.) d'ordre m pour la valeur propre λ.
· On note $u_j := (f - \lambda)^{m-j}(u)$, $1 \leq j \leq m$
→ Donc on a par exemple $u_k = (f - \lambda)^{m-k}(u)$, $u_m = (f - \lambda)^{m-m}(u) = u$ et $u_0 = (f - \lambda)^m = 0$
Proposition: $U = \text{Vect}(\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}) \subset V$ est un S.E.V. f-invariant et $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ forme une base de U.

Remarques

- les éléments ($\neq 0$) de U sont des V.P.G. de f pour λ
- On peut remarquer que $(f - \lambda)^k(u_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq j \\ u_{j-k} & \text{si } k < j \end{cases}$

→ Ce qui nous amène aux définitions suivantes :

Définitions

- Soit U un S.E.V. de V. U est dit *cyclique* pour $f \in \mathcal{L}(V)$ s'il contient un V.P.G. d'ordre $m = \dim(U)$.
- $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset U$ t.q. définis plus haut forment la *Base Cyclique* de U pour $u = u_m$.
- $u = u_m$ est alors *le générateur / la racine du cycle.*

Lemme

Si U est cyclique de dimension m pour f, alors:

1. f n'a qu'une valeur propre λ.
2. $(f - \lambda)$ est nilpotent d'ordre m.
3. $\dim(U) = m$.
4. $\mu_f(t) = \chi_f(t) = (t - \lambda)^m$.
5. $\text{multgeom}_\lambda(f) = 1$.
6. $\delta_{f,\lambda}(k) = \min\{m, k\}$.