Tenseurs et formes différentielles

Marc Troyanov - EPFL

Janvier 2020

Introduction

Description

Le cours "Tenseurs et Formes Différentielles" est un cours de bachelor qui était offert à l'EPFL jusqu'en 2017 aux étudiants en mathématiques et en physique. Le but de ce cours est de donner une introduction à l'algèbre et l'analyse tensorielle et de pointer vers quelques applications, il est une préparation pour des cours tels que : Variétés, géométrie différentielle, mécanique analytique ou physique mathématique.

Prérequis : Pour les mathématiciens : Analyse III-IV, Algèbre I-II. Pour les physiciens : Avoir fait les cours de 2ème année, en particulier ceux du bloc 1

De quoi s'agit-il ? Les tenseurs sont des objets algébriques généralisant les vecteurs et les matrices. Ils sont l'un des outils fondamentaux de la géométrie différentielle, de la topologie et d'un grand nombre de chapitres de la physique. Il jouent aussi un rôle important en algèbre, notamment en théorie des représentation de groupes.

Historique : Les tenseurs jouent un rôle primordial depuis plus de 100 ans en géométrie différentielle, ils sont aussi importants en physique (mécanique, éléctromagnétisme, relativité etc.). Les pères du calcul tensoriel au 19ème siècle s'appellent Elwin-Bruno Christoffel (1829-1900), Gregorio Ricci-Curbastro (1853 - 1925), Luigi Bianchi (1856-1928) et Tullio Levi-Civita (1873 - 1941).
Notons que le calcul tensoriel a en grande partie été motivé par le besoin de comprendre la notion de courbure introduite par Riemann et que ce calcul a exactement été l'outil mathématique qui a permis à Einstein de développer sa relativité générale. Une autre motivation vient de l'élasticité (le mot tenseur fait référence à la tension d'un corps déformé).

Plan du cours Le cours commence par une partie algébrique. Les tenseurs font partie de l'algèbre linéaire (en fait l'algèbre multi-linéaire). Puis on passe aux "champs de tenseurs" qui font partie du calcul différentiel (de même que les vecteurs sont de l'algèbre et les champs de vecteurs du calcul différentiel).

Contenu :

Théorie algébrique des tenseurs :
- Le produit tensoriel
- L'algèbre tensorielle
- L'algèbre de Grassman (algèbre extérieure)

Analyse tensorielle
- Champs de vecteurs et flots
- Champ de tenseurs
- Dérivée de Lie
- Divergence et laplacien d'un champ de tenseurs
- Formes différentielles et dérivée extérieure
- Intégration des formes différentielles, formule de Stokes.

Applications
- Illustration du rôle de l'analyse tensorielle en physique, géométrie différentielle et topologie.

Bibliographie

De nombreux livres sur les variétés différentiables ou la géométrie riemannienne, ainsi que des ouvrages pour physiciens contiennent un ou des chapitres introduisant les tenseurs et/ou les formes différentielles.

1. Deheuvels, René, Tenseurs et spineurs. Presses Universitaires de France, Paris, 1993.
2. Godbillon, Claude, Géométrie différentielle et mécanique analytique (chap. 1). Hermann, Paris 1969.
3. Lee, John M. Introduction to smooth manifolds (chap. 11 et 12). Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer-Verlag, New York, 2003
4. Lichnerowicz, A. Eléménts de Calcul Tensoriel. Librairie Armand Colin, Paris, 1950, 1962.
5. Schouten, J. A. Ricci-calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications. Springer-Verlag 1954.
6. Synge, J. L. ; Schild, A. Tensor calculus. Dover, 1978.
7. Schwartz, Laurent Les tenseurs (suivi de “Torseurs sur un espace affine” par Y. Bamberger and J.-P. Bourguignon). Hermann, Paris, 1981.
8. Yokonuma, Y Tensor spaces and exterior algebra. Translations of Mathematical Monographs. 108. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). x, 131 p. (1992).
9. Willmore, T. J. Riemannian geometry (chap. 2). Oxford Science Publications. 1993.
10. L’article Exterior algebra sur wikipédia en anglais.

Table des matières

Chapitre 1

L'algèbre multilinéaire

1.1 Couplage et dualité

Définition 1 Soient V_1, V_2, W trois espaces vectoriels sur un corps K. Une application

$$\beta : V_1 \times V_2 \to W$$

est dite *K-bilinéaire* si elle est K-linéaire en chaque variable. On dit que cette application est *non dégénérée* si elle vérifie les conditions suivantes :

i) Pour tout $v_1 \in V_1$, si $\beta(v_1, y) = 0$ quelque soit $y \in V_2$, alors $v_1 = 0$;

ii) pour tout $v_2 \in V_2$, si $\beta(x, v_2) = 0$ quelque soit $x \in V_1$, alors $v_2 = 0$.

Lorsque $W = K$ (le corps de base), on dit que β est une *forme bilinéaire.* On dit aussi que c'est un *couplage* entre V_1 et V_2.

Définition 2 Le *dual algébrique*[1] d'un K-espace vectoriel V est l'espace vectoriel des applications K-linéaires définies sur V et à valeur dans K. On le note V^*, un élément $\theta \in V^*$ s'appelle une *forme linéaire* sur V. On dit aussi que c'est un *covecteur* de V. Il est clair que V^* est lui-même un K-espace vectoriel.

Remarque importante On a un couplage canonique

$$C : V^* \times V \to K$$

défini par la formule

$$C(\theta, v) = \theta(v), \qquad \theta \in V^*,\ v \in V.$$

On note souvent ce couplage par $\langle \theta, v \rangle = \theta(v)$. On dit qu'il est *canonique* car il apparaît naturellement, dès que les définitions sont posées, aucun choix n'est nécessaire à sa définition.

Proposition 1.1 *Le couplage $C : V^* \times V \to K$ est non dégénéré.*

Preuve
(i) Observons que par définition, un covecteur $\theta : V \to K$ est nul si et seulement si $\theta(v) = 0$ pour tout $v \in V$. Cela entraîne que si $\theta \in V^*$ et si $\langle \theta, v \rangle = 0$ quelque soit $v \in V$, alors $\theta = 0$.

1. Lorsque l'espace vectoriel est de dimension infinie, on se donne souvent une topologie sur cet espace V ainsi que sur le corps de base. Dans ce cas on appelle *dual topologique* l'espace des fonctions linéaires continues $V \to K$. Le dual topologique se note habituellement V', il est contenu dans le dual algébrique : $V' \subset V^*$.

(ii) Nous devons montrer que si $v \in V$ et si $\langle \theta, v \rangle = 0$ quelque soit $\theta \in V^*$, alors $v = 0$. Il est équivalent de démontrer que si $v \in V$ est non nul, alors il existe un covecteur $\theta \in V^*$ tel que $\theta(v) \neq 0$.
Choisissons une base $B \subset V$ contenant le vecteur $v \neq 0$. C'est possible par l'axiome du choix. Il suffit alors de choisir la forme $\theta : V \to K$ définie pour $b \in B$ par la formule

$$\theta(b) = \begin{cases} 1, & \text{si } b = v, \\ 0, & \text{si } b \neq v. \end{cases}$$

□

Proposition 1.2 *Si V est de dimension finie, alors V^* est isomorphe à V.*

Cela découle simplement du fait que si V est de dimension finie, alors V et V^* ont même dimension. Rappelons pourquoi : choisissons une base $e_1, e_2, \dots, e_n$ de V et définissons les covecteurs $\epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n \in V^*$ par

$$\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Alors $\{\epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n\}$ engendre l'espace vectoriel V^* car toute forme $\theta : V \to K$ peut s'écrire

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta(e_i)\varepsilon^i.$$

D'autre part, ces covecteurs sont linéairement indépendants car si $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon^i$, alors $\varphi(e_i) = \lambda_i$ et donc si $\varphi \equiv 0$, alors $\lambda_i = 0$ pour tout i.

□

Définition La base $\{\epsilon^i\}$ que nous venons de produire s'appelle la *base duale* à $\{e_i\}$.

Exercice 1.1 Prouver que pour tout espace vectoriel V de dimension infinie, on a $\dim(V^*) > \dim(V)$. En particulier la proposition précédente est toujours fausse en dimension infinie.

Remarque L'isomorphisme $V \cong V^*$ que nous venons de produire est non canonique, c'est à dire qu'il dépend du choix d'une base.
Une autre façon de produire un isomorphisme $V \cong V^*$ est de se donner une forme bilinéaire non dégénérée $\beta : V \times V \to K$. On peut alors définir une application linéaire $\mu : V \to V^*$ par $v \to \mu_v \in V^*$, où

$$\mu_v(w) := \beta(v, w).$$

Il est aisé de voir que l'application $\mu : V \to V^*$ est injective : si $\mu_v = 0$, alors $\mu_v(w) = \beta(v, w) = 0$ pour tout $w \in V$ et donc $v = 0$ car β est non dégénérée. On a donc $\ker(\mu) = \{0\}$. Comme $\dim(V) = \dim(V^*)$, toute application injective est aussi surjective et on a donc construit un isomorphisme $\mu : V \to V^*$.
Notons que cet isomorphisme n'est pas non plus canonique car il dépend du choix de la forme bilinéaire non dégénérée $\beta : V \times V \to K$.

Proposition 1.3 *Tout isomorphisme entre V et son dual V^* s'obtient par la construction précédente.*

Cette proposition entraîne en particulier qu'il n'existe en général aucun isomorphisme canonique entre un espace vectoriel et son dual.

Preuve Soit $\mu : V \to V^*$ un isomorphisme quelconque. Définissons alors une forme bilinéaire $\beta : V \times V \to K$ par

$$\beta(v, w) := \mu_v(w).$$

Comme μ est injective, on a $\mu_v(w) = \beta(v, w) = 0$ pour tout $w \in V$ si et seulement si $v = 0$, donc β est non dégénérée.

□

Proposition 1.4 *Le* bidual $V^{**} = (V^*)^*$ *d'un espace vectoriel de dimension finie V est canoniquement isomorphe à V lui-même :*

$$V^{**} = V.$$

Exercice 1.2 a) Montrer que tout couplage non dégénéré $\beta : V_1 \times V_2 \to K$ entre deux K-espaces vectoriels de dimension finie définit un isomorphisme entre V_1 et le dual de V_2.
b) En déduire une preuve de la proposition précédente.

Exercice 1.3 Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel. On définit l'*indice* de b par

$$\text{indice}(b) = \max_E \{ \dim E \mid E \text{ est un sous espace de } V \text{ et } \; b|_{E\times E} \text{ est défini négatif} \}$$

Si $p = \text{indice}(-b)$ et $q = \text{indice}(b)$, on appelle la paire (p, q) la *signature* de b.

a.) Montrer que b est non-dégénérée si, et seulement si $p + q = n$.

b.) Démontrer le théorème de Sylvester, qui affirme que dans une base adéquate, b s'exprime par une matrice diagonale du type

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Terminologie : On appelle *métrique euclidienne* une forme bilinéaire symétrique de signature $(n, 0)$ sur un espace de dimension n, et l'espace associé est un *espace euclidien.* On appelle une forme de signature $(1, n-1)$ ou $(n-1, 1)$ une *métrique lorentzienne* et l'espace vectoriel muni d'une telle forme est un *espace de Minkowski.*

1.2 L'espace vectoriel des applications linéaires et multilinéaires

Soient K un corps et V, W deux espaces vectoriels de dimensions finies sur K. On note

$$\text{Hom}(V; W) = L(V; W)$$

l'ensemble de toutes les applications K-linéaires de V vers W. On peut additionner point par point deux applications linéaires, et on peut les multiplier par un scalaire. Avec ces opérations, l'espace $\text{Hom}(V; W)$ devient un espace vectoriel, et comme une application linéaire est entièrement déterminée par son effet sur une base, la dimension de cet espace est

$$\dim(\text{Hom}(V; W)) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

Exercice 1.4 Construire une base de $\text{Hom}(V;W)$ à partir de la donnée d'une base de V et d'une base de W.

Remarque Les espaces V et W sont parfois également vus comme espaces vectoriels sur un autre corps K'. On note $\text{Hom}_K(V;W)$ ou $L_K(V;W)$ si le corps sous-jacent doit être précisé.

Considérons à présent une famille $V_1, \cdots, V_k, W$ de $(k+1)$ espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K, alors on note

$$L^k(V_1, \cdots, V_k; W)$$

l'espace des applications $f : \underbrace{V_1 \times \cdots \times V_k}_{k \text{ termes}} \to W$ qui sont multilinéaires (c'est-à-dire linéaires en chaque variable).

Proposition 1.5 $L^k(V_1, \cdots, V_k; W)$ *est un K-espace vectoriel et sa dimension est*

$$\dim\Big(L^k(V_1, \cdots, V_k; W)\Big) = \dim(W) \cdot \prod_{i=1}^{k} \dim(V_i). \tag{1.2.1}$$

Exercice 1.5 Décrire la structure d'espace vectoriel sur $L^k(V_1, \cdots, V_k; W)$ et démontrer que sa dimension est donnée par l'équation (1.2.1).

Exemples

a) Pour $k = 1$ on $L^1(V;W) = L(V;W) = \text{Hom}(V;W)$
b) $L(V;K) = \text{Hom}(V;K)$ est le dual V^* de V. On a $\dim(V^*) = \dim(V)$.
c) $\text{Bil}(V_1, V_2; W) = L^2(V_1, V_2; W)$

Proposition 1.6 *On a un isomorphisme canonique*

$$\text{Hom}(V, W^*) = \text{Bil}(V, W; K).$$

De plus $\varphi \in \text{Hom}(V;W^*)$ est un isomorphisme si et seulement si le couplage associé est non dégénéré.

Preuve Les deux espaces ont même dimension (égale à $\dim(V) \cdot \dim(W)$). Il suffit donc d'exhiber une application linéaire injective canonique de $\text{Hom}(V, W^*)$ vers $\text{Bil}(V, W; K)$.
A tout $\varphi \in \text{Hom}(V;W^*)$, on associe l'élément $\tilde{\varphi} \in \text{Bil}(V, W; K)$ défini par

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x)(y).$$

Cette application est bien définie. Elle est linéaire et canonique (aucun choix n'a été fait). Montrons qu'elle est injective. Supposons pour cela que $\tilde{\varphi} = 0$, alors

$$\begin{array}{rcll} & \tilde{\varphi}(x,\eta) & = 0 & \forall x \in V, \forall y \in W \\ \Rightarrow & \varphi(x)(y) & = 0 & \forall y \in W, \forall x \in V \\ \Rightarrow & \varphi(x) & = 0 & \forall x \in V \\ \Rightarrow & \varphi & = 0 \in \text{Hom}(V, W^*). & \end{array}$$

Pour prouver la seconde affirmation il faut montrer que $\varphi \in \text{Hom}(V;W^*)$ est un isomorphisme si et seulement si le couplage associé $\tilde{\varphi} \in \text{Bil}(V, W; K)$ est non dégénéré.

Supposons d'abord que φ est un isomorphisme. Prenons $x \in V$ non nul, alors $\varphi(x) \neq 0 \in W^*$, donc il existe $y \in W$ tel que $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x)(y) \neq 0$.
Si c'est $y \in W$ qui est non nul, alors il existe $\eta \in W^*$ tel que $\eta(y) \neq 0$. Comme φ est surjective il existe donc $x \in V$ tel que $\varphi(x) = \eta$ et on a donc $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x)(y) = \eta(y) \neq 0$. On a montré que $\tilde{\varphi}$ est non dégénéré.
Un argument semblable montre que si $\tilde{\varphi}$ est non dégénéré, alors φ est un isomorphisme. □

Remarque La proposition précédente implique immédiatement qu'on a aussi un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(V^*, W) = \mathrm{Bil}(V^*, W^*, K).$$

Cet isomorphisme est construit de la façon suivante : à tout élément $\psi \in \mathrm{Hom}(V^*; W)$, on associe l'élément $\tilde{\psi} \in \mathrm{Bil}(V^*, W^*; K)$ défini par

$$\tilde{\psi}(\xi, \eta) = \eta(\psi(\xi)).$$

Cet espace vectoriel est important, on l'appelle le produit tensoriel de V et W et on le note $V \otimes W = \mathrm{Hom}(V^*, W)$.

Corollaire 1.7 *On a un isomorphisme canonique* $\mathrm{Hom}(V_1^*, V_2) = \mathrm{Hom}(V_2^*, V_1)$.

□

Notons que cet isomorphisme est assez délicat à prouver directement

1.3 Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels de dimension finie

Definition 1.1 Le *produit tensoriel* de V_1 et V_2 est l'espace vectoriel

$$V_1 \otimes V_2 = \mathrm{Hom}(V_1^*, V_2).$$

Propriétés 1.8 *Le produit tensoriel vérifie les propriétés suivantes :*

a) $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$.

b) $V \otimes W = W \otimes V$.

c) $V \otimes K = V$.

d) $(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*$.

e) $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = L^3(V_1^*, V_2^*, V_3^*)$.

f) $U \otimes (V \oplus W) = (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$.

Exercice 1.6 Démontrer cette proposition.

Remarquons que l'espace des homomorphismes entre deux espaces vectoriels apparaît comme un produit tensoriel :

$$\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$$

et en particulier on a $\mathrm{End}(V) = V^* \otimes V$.

Definition 1.2 Le *produit tensoriel* de deux vecteurs $v \in V$ et $w \in W$ est le vecteur de $V \otimes W = \mathrm{Hom}(V^*, W)$ noté $t(v, w)$ ou $v \otimes w$ et défini par

$$v \otimes w(\alpha) = \alpha(v)w = \langle \alpha, v \rangle w,$$

pour tout $\alpha \in V^*$

Proposition 1.9 *Le produit tensoriel vérifie les propriétés suivantes :*

a) L'application $t : V \times W \to V \otimes W$ est bilinéaire et non-dégénerée (mais non surjective).

b) Si $(e_i)_{1 \leq i \leq \dim(V)}$ et $(f_j)_{1 \leq j \leq dim(W)}$ sont des bases de V et W respectivement, alors

$$(e_i \otimes f_j)_{1 \leq i \leq \dim(V), 1 \leq j \leq \dim(W)}$$

est une base de $V \otimes W$.

Preuve (a) Il est clair que t est bilinéaire. Montrons que cette application est non dégénérée. Soient $v \in V$ et $w \in W$ deux vecteurs non nuls. Puisque $v \neq 0$, il existe $\alpha \in V^*$ tel que $\alpha(v) \neq 0$. Et comme $v \neq 0$, on a donc $v \otimes w(\alpha) = \alpha(v)w \neq 0$. Cela montre que $v \otimes w \neq 0$ si $v \neq 0$ et $w \neq 0$.

(b) Montrons que $\{e_i \otimes f_j\} \subset V \otimes W$ est une famille libre (i.e. ces vecteurs sont linéairement indépendants). Supposons pour cela que

$$\sum_{i,j} \lambda^{i,j} \, e_i \otimes f_j = 0 \in V \otimes W = \mathrm{Hom}(V^*, W).$$

Alors pour tout $\xi \in V^*$, on a

$$\sum_{i,j} \lambda^{i,j} \xi(e_i) \cdot f_j = 0 \in W.$$

Comme les vecteurs f_j sont linéairement indépendants, cela implique que pour tout j et pour tout $\xi \in V^*$ on a

$$\xi \left(\sum_i \lambda^{i,j} e_i \right) = \sum_i \lambda^{i,j} \xi(e_i) = 0 \in \mathbb{R},$$

et donc $\sum_i \lambda^{i,j} e_i = 0$. Mais comme les vecteurs e_i sont linéairement indépendants, on a finalement

$$\lambda^{i,j} = 0, \quad \forall i, \forall j.$$

Les vecteurs $e_i \otimes f_j \in V \otimes W$ sont donc linéairement indépendants. Ils forment alors une base, puisque $\dim (V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

□

Problème Une question qui se pose est la suivante : On sait qu'il y a un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(V^*, W) = \mathrm{Bil}(V^*, W^*)$, donc on a

$$V \otimes W = \mathrm{Bil}(V^*, W^*).$$

La question qui se pose est : comment lire le produit tensoriel $v \otimes w$ dans le modèle $\mathrm{Bil}(V^*, W^*)$?

Réponse Le produit $v \otimes w \in \mathrm{Bil}(V^*, W^*)$ est donné par

$$(v \otimes w)(\xi, \eta) = \xi(v) \cdot \eta(w) = \langle \xi, v \rangle \cdot \langle \eta, w \rangle.$$

Preuve L'isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}(V^*, W) \cong \mathrm{Bil}(V^*, W^*)$ associe à l'homomorphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}(V^*, W)$ la forme bilinéaire $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Bil}(V^*, W^*)$ telle que $\tilde{\varphi}(\xi, \eta) = \eta(\varphi(\xi))$. En particulier cet isomorphisme associe à

$$v \otimes w : \xi \mapsto \xi(v)w$$

l'élément

$$\widetilde{v \otimes w} : (\xi, \eta) \mapsto \eta(v \otimes w(\xi)) = \eta(\xi(v)w) = \xi(v) \cdot \eta(w).$$

Exercice 1.7 Soit V un espace vectoriel, et $v, w \in V$. A quelle(s) condition(s) a-t-on $v \otimes w = w \otimes v$?

Exercice 1.8 Soient V_1, V_2 deux espaces vectoriels complexes. Comparer les espaces $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2$ et $V_1 \otimes_{\mathbb{R}} V_2$. Lequel de ces deux espaces est le "plus gros" ?

Exercice 1.9 Soient V et W deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Si $A \in \mathrm{End}(V)$ et $B \in \mathrm{End}(W)$, alors on définit un endomorphisme $A \otimes B \in \mathrm{End}(V \otimes W)$ par

$$A \otimes B(v \otimes w) = (Av) \otimes (Bw).$$

Montrer que

a) $\mathrm{Trace}(A \otimes B) = \mathrm{Trace}(A) \cdot \mathrm{Trace}(B)$.

b) $A \otimes B = (A \otimes \mathrm{Id}_W) \circ (Id_V \otimes B)$.

c) $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$ où $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$.

L'identité (a) joue un rôle important en théorie des représentations des groupes (elle entraîne que le produit de deux caractères est un caractère).

Exercice 1.10 Sur un espace vectoriel V, on consière l'espace des endomorphismes $\mathrm{End}(V)$.

a.) Ecrire $\mathrm{End}(V)$ comme produit tensoriel et montrer que $\mathrm{End}(V)$ est canoniquement isomorphe à son dual.

b.) Expliciter l'isomorphisme canonique en question.

c.) Identifier l'image de $\mathrm{Id} \in \mathrm{End}(V)$ via cet isomorphisme.

Exercice 1.11 L'isomorphisme explicité à l'exercice précédent peut être vu comme une forme bilinéaire sur $\mathrm{End}(V)$. Expliciter cette forme et montrer qu'elle est non-dégénérée.

1.4 La propriété universelle du produit tensoriel

Proposition 1.10 *Il existe un isomorphisme canonique*

$$L^2(V_1, V_2; W) = L^1(V_1 \otimes V_2; W).$$

Preuve On peut le définir de la façon suivante : soient $(e_i)_{1 \le i \le n}$ une base de V_1 et $(f_j)_{1 \le j \le m}$ une base de V_2. A tout $\psi \in L^2(V_1, V_2; W)$, on associe l'application linéaire $\Psi : V_1 \otimes V_2 \to W$ définie par

$$\Psi\left(\sum_{i,j} \lambda^{ij} e_i \otimes f_j\right) = \sum_{i,j} \lambda^{ij} \psi(e_i, f_j).$$

Observons que

$$\psi = \Psi \circ t,$$

Ce qui entraîne d'une part que l'application $L^2(V_1, V_2; W) \to L^1(V_1 \otimes V_2; W)$ définie par $\psi \mapsto \Psi$ est un isomorphisme (d'inverse $\Psi \mapsto \psi = \Psi \circ t$) et d'autre part que cette application est canonique puisque son inverse se décrit sans faire appel à aucun choix.

$\square$

Interprétation : Cette proposition dit que pour toute application bilinéaire $\psi : V_1 \times V_2 \to W$, il existe une unique application linéaire $\Psi : V_1 \otimes V_2 \to W$ telle que $\Psi \circ t = \psi$, i.e. telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "\psi"'] & & V_1 \otimes V_2 \arrow[dl, "\Psi"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

Cette interprétation caractérise le produit tensoriel et peut servir de définition : Si Z est un K-espace vectoriel et $\tau : V_1 \times V_2 \to Z$ est une application telle que pour toute application bilinéaire $\psi : V_1 \times V_2 \to W$, il existe une unique application linéaire $\Psi : Z \to W$ telle que $\Psi \circ \tau = \psi$, i.e. telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\psi"'] & & Z \arrow[dl, "\Psi"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

alors Z est isomorphe à $V_1 \otimes V_2$.

1.5 Les tenseurs de type $\binom{\ell}{k}$

Soit K un corps et V un espace vectoriel de dimension finie n. Pour $\ell, k \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathrm{Tens}^{\ell}_{k}(V) = L^{\ell+k}(\underbrace{V, V, \ldots V}_{k}, \underbrace{V^*, V^*, \ldots V^*}_{\ell}; K),$$

si $k + \ell > 0$. Si $k = \ell = 0$, alors on convient que $\mathrm{Tens}^0_0(V) = K$.

Il est clair que $\mathrm{Tens}^{\ell}_{k}(V)$ est un espace vectoriel de dimension $n^{k+\ell}$, un élément $T \in \mathrm{Tens}^{\ell}_{k}(V)$ s'appelle un *tenseur de type* $\binom{\ell}{k}$. On dit aussi que k est le *degré de covariance et* ℓ le *degré de contravariance* du tenseur. Un tenseur T de type $\binom{\ell}{k}$ est donc une application multilinéaire

$$T : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{\ell} \to K$$

Lemme 1.11 *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Tens}^{\ell}_{k}(V) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{\ell}.$$

Exercice 1.12 Prouver cet isomorphisme.

□

Voyons quelques exemples d'espaces de tenseurs : On sait déjà que $\mathrm{Tens}_0^0(V) = K$. On a aussi

$$\mathrm{Tens}_1^0(V) = \mathrm{Hom}(V; K) = V^*,$$

ainsi que les espaces suivants :

i.) $\mathrm{Tens}_0^1(V) = \mathrm{Hom}(V^*; K) = (V^*)^* = V$,

ii.) $\mathrm{Tens}_0^2(V) = V \otimes V$,

iii.) $\mathrm{Tens}_2^0(V) = \mathrm{Bil}(V) = V^* \otimes V^*$,

iv.) $\mathrm{Tens}_1^1(V) = V^* \otimes V = \mathrm{End}(V)$.

Remarque 1.3 Si $\dim(V) = n$, alors $\dim \mathrm{Tens}_k^\ell(V) = n^{k+\ell}$. Si $(e_i)_{1 \le i \le \dim(V)}$ est une base de V, et $(\varepsilon^i)_{1 \le i \le \dim(V)}$ est la base duale, alors tout tenseur $T \in \mathrm{Tens}_k^\ell(V)$ est déterminé par ses $n^{k+\ell}$ composantes

$$T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_\ell} = T(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}, \varepsilon^{j_1}, \cdots, \varepsilon^{j_\ell}). \tag{1.5.1}$$

1.6 Produit tensoriel de deux tenseurs

Définition Le *produit tensoriel* d'un tenseur T de type $\binom{q}{p}$ et d'un tenseur S de type $\binom{s}{r}$ est le tenseur $T \otimes S$ de type $\binom{q+s}{p+r}$ défini par

$$T \otimes S(v_1, v_2, \ldots, v_{p+r}, \xi^1, \xi^2, \ldots \xi^{q+s}) = \\ T(v_1, \ldots, v_p, \xi^1, \ldots \xi^q) \cdot S(v_{p+1}, \ldots, v_{p+r}, \xi^{q+1}, \ldots \xi^{q+s})$$

Proposition 1.12 *a.) Le produit tensoriel définit une application bilinéaire*

$$\mathrm{Tens}_p^q(V) \times \mathrm{Tens}_r^s(V) \to \mathrm{Tens}_{p+r}^{q+s}(V);$$

b.) ce produit est associatif ;

c.) les scalaires commutent avec tout tenseur.

Le preuve est une simple vérification à partir des définitions.

□

Remarque Le produit tensoriel n'est pas commutatif, en général $T \otimes S \neq S \otimes T$. Il y a quelques exceptions. En particulier, si T est purement covariant et S est purement contravariant, ou l'inverse, alors $T \otimes S = S \otimes T$. Pour s'en rendre compte, il suffit de le vérifier dans le cas de deux tenseurs d'ordre 1 (puis d'utiliser l'associativité). Si $v \in V$ et $\theta \in V^*$, alors

$$\theta \otimes v = v \otimes \theta \in L^2(V, V^*; K)$$

est l'application bilinéaire définie par

$$\theta \otimes v(x, \xi) = v \otimes \theta(x, \xi) = \theta(x) \cdot \xi(v).$$

Exercice 1.13 Supposons que v et w sont deux vecteurs non nuls de V. A quelle condition a-t-on $v \otimes w = w \otimes v$?

Proposition 1.13 (Base de l'espace $\mathrm{Tens}_k^\ell(V)$**)** *Soit* $(e_i)_{1\le i\le n}$ *une base de* V*, et* $\left(\varepsilon^i\right)_{1\le i\le n}$ *la base duale. On note*

$$E^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_\ell} = \varepsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon^{i_k}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_\ell}\in \mathrm{Tens}_k^\ell(V). \tag{1.6.1}$$

Alors les $n^{k+\ell}$ *tenseurs*

$$\left(E^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_\ell}\right)^n_{i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_\ell=1}$$

forment une base de $\mathrm{Tens}_k^\ell(V)$*. Tout élément* $T\in\mathrm{Tens}_k^\ell(V)$ *s'écrit (en utilisant la convention d'Einstein*[2]*)*

$$T = T^{j_1,\cdots,j_\ell}_{i_1,\cdots,i_k}\cdot E^{i_1,\cdots,i_k}_{j_1,\cdots,j_\ell}$$

où les composantes $T^{j_1,\cdots,j_\ell}_{i_1,\cdots,i_k}$ *sont données par l'équation (1.5.1).*

Exercice 1.14 Démontrer cette proposition.

Remarque Il faut observer que pour un tenseur de la base, les indices supérieurs sont les indices covariants et les indices inférieurs sont les indices contravariants. Pour les composantes d'un tenseur, c'est l'inverse : les indices supérieurs sont les indices contravariants et les indices inférieurs sont les indices covariants.

Voyons quelques exemples :
a) Un vecteur (contravariant) s'écrit dans la base $v = x^j e_j \in V$. Ses composantes sont $x^j = \varepsilon^j(v)$.
b) Un covecteur s'écrit dans la base $\xi = \xi_i\varepsilon^i\in V^*$. Ses composantes sont $\xi_i = e_i(\xi)$ (où $e_i\in V$ est vu comme un élément du bidual, i.e. comme une application linéaire $e_i : V^*\to K$).
c) Une forme bilinéaire $g\in\mathrm{Bil}(V) = \mathrm{Tens}_2^0(V) = V^*\otimes V^*$ s'écrit $g = g_{ij}\varepsilon^i\otimes\varepsilon^j$. Ses composantes sont $g = g_{ij} = g(e_i,e_j)$.
d) Un endomorphisme $A\in\mathrm{End}(V) = \mathrm{Tens}_1^1(V) = V^*\otimes V$ s'écrit $A = A_i^j\ \varepsilon^i\otimes e_j$. Ces composantes sont données par $A_i^j = \varepsilon^j\otimes e_i(A) = \varepsilon^j(A(e_i))$.

Lemme 1.14 *On a l'isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}\left(\mathrm{Tens}_p^q(V),\mathrm{Tens}_s^t(V)\right) = \mathrm{Tens}_{q+s}^{p+t}(V).$$

Exercice 1.15 Prouver cet isomorphisme.

Voici quelques cas particuliers de cet isomorphisme :
a) $\mathrm{Tens}_k^\ell(V) = \mathrm{Tens}_\ell^k(V^*) = \left(\mathrm{Tens}_\ell^k(V)\right)^*$.

(ainsi $\mathrm{Tens}_k^k(V)$ est canoniquement égal à son propre dual, et en particulier $\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}(V)^*$).
b) $\mathrm{Tens}_k^1(V) = \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Tens}_0^k(V),\mathrm{Tens}_0^1(V)\right) = \mathrm{Hom}(\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{k};V) = L^k(\underbrace{V,\cdots,V}_{k};V)$.

Il est recommandé au lecteur de construire directement ces isomorphismes canoniques.

Exercice 1.16 Soient deux tenseurs $A\in\mathrm{Tens}_1^2(V)$ et $B\in\mathrm{Tens}_2^0(V)$, où V est un espace vectoriel muni d'une base $\{e_i\}$. Ecrire ces deux tenseurs en composantes, ainsi que les produits $A\otimes B$ et $B\otimes A$. A quelle condition (sur les composantes de A et B) a-t-on $A\otimes B = B\otimes A$?

2. La convention d'Einstein dit qu'on somme sur les indices qui se répètent

1.7 L'algèbre tensorielle

Proposition 1.15 *La somme directe*

$$\mathrm{Tens}(V) = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{N}} \mathrm{Tens}_p^q(V),$$

munie du produit tensoriel est une K-algèbre associative. Cette algèbre est unitaire, de dimension infinie et non commutative.

Exercice 1.17 Démontrer cette proposition.

Remarque Un élément de $\mathrm{Tens}(V)$ est une somme finie de tenseurs de différents types. Le produit tensoriel de deux sommes de tenseurs purement covariants est encore une somme de tenseurs purement covariants, en d'autre termes

$$\mathrm{Tens}_\bullet^0(V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{Tens}_p^0(V)$$

est une sous-algèbre de $\mathrm{Tens}(V)$. Cette algèbre est graduée car les degrés de deux tenseurs covariants s'additionne lorsqu'on multiplie ces tenseurs.

L'ensemble des sommes de tenseurs contravariants

$$\mathrm{Tens}_0^\bullet(V) = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} \mathrm{Tens}_0^q(V)$$

est aussi une sous-algèbre graduée de $\mathrm{Tens}(V)$. L'algèbre $\mathrm{Tens}(V)$ est dite *bigraduée.* On peut définir une notion de produit tensoriel dans la catégorie des algèbres, et montrer que

$$\mathrm{Tens}(V) = \mathrm{Tens}_\bullet^0(V) \otimes \mathrm{Tens}_0^\bullet(V)$$

Exercice 1.18 Si $\dim(V) = 1$, alors l'algèbre $\mathrm{Tens}(V)$ est isomorphe à l'algèbre $K[X, Y]$ des polynômes à deux variables. On a aussi $\mathrm{Tens}_\bullet^0(V) = K[X]$ et $\mathrm{Tens}_0^\bullet(V) = K[Y]$.

Résumé de quelques propriétés :

i) $\mathrm{Tens}_\bullet^\bullet(V)$ est de dimension infinie comme K-espace vectoriel.
ii) Un tenseur $T \in \mathrm{Tens}_\bullet^\bullet(V)$ est dit *homogène* si $T \in \mathrm{Tens}_k^\ell(V)$.
iii) $\mathrm{Tens}_\bullet^0(V), \mathrm{Tens}_0^\bullet(V)$ sont des sous-algèbres de $\mathrm{Tens}_\bullet^\bullet(V)$.
iv) $\mathrm{Tens}_\bullet^0(V) \cap \mathrm{Tens}_0^\bullet(V) = K$
v) $\mathrm{Tens}_\bullet^\bullet(V)$ est bigraduée, et $\mathrm{Tens}_\bullet^0(V), \mathrm{Tens}_0^\bullet(V)$ sont graduées.
vi) $T \in \mathrm{Tens}_\bullet^0(V), S \in \mathrm{Tens}_0^\bullet(V) \Rightarrow S \otimes T = T \otimes S$.

Exercice 1.19 (Propriété universelle de l'algèbre tensorielle) On considère le foncteur $\mathrm{Tens}_0^\bullet(-)$ qui associe à un espace vectoriel l'ensemble des tenseurs contravariants sur cet espace, et à chaque application linéaire $F : V \to W$, l'application linéaire $F_* : \mathrm{Tens}_0^\bullet(V) \to \mathrm{Tens}_0^\bullet(W)$. On appelle $\iota : V \to \mathrm{Tens}_0^\bullet(V)$ l'injection canonique évidente. Montrer que ce foncteur vérifie la propriété universelle suivante : pour toute algèbre A, toute application linéaire ϕ de V dans A s'étend à tout $\mathrm{Tens}_0^\bullet(V)$ en un homomorphisme d'algèbres unitaires Φ. (Un *homomorphisme d'alèbres unitaires* envoie l'unité de la première algèbre sur l'unité de la seconde.)
Formuler et démontrer une propriété analogue pour $\mathrm{Tens}_\bullet^0(-)$.

Exercice 1.20 Soient A et B deux algèbres de dimensions finies sur un corps K. On munit $A \otimes B$ d'un produit défini par

$$(\sum_i a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_j a'_j \otimes b'_j) = \sum_{ij} (a_i a'_j) \otimes (b_i b'_j).$$

a.) Montrer que $A \otimes B$ est une algèbre.

b.) Montrer que si A et B sont associatives, alors $A \otimes B$ l'est également.

c.) Prouver que si A et B sont unitaires, alors $A \otimes B$ l'est aussi.

d.) $A \otimes M_n(K) = M_n(A)$

e.) $M_n(K) \otimes M_m(K) = M_{nm}(K)$

1.8 Le tenseur de Kronecker et la contraction

On note $\delta \in \mathrm{Tens}_1^1(V) = \mathrm{End}(V)$ le tenseur correspondant à l'endomorpshisme identité Id.

Lemme 1.16 *Les composantes de δ sont les mêmes dans toute base. Elles valent :*

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si \quad sinon \end{cases}$$

Preuve Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base quelconque de V et $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ la base duale. Soit S le tenseur

$$S = \delta_i^j \, e_j \otimes \varepsilon^i = e_i \otimes \varepsilon^i.$$

Il faut voir que $S = \delta$, c'est-à-dire $S(v) = v$ pour tout vecteur $v \in V$. Soit $v = x^k e_k$, alors

$$S(v) = S(x^k e_k) = (e_i \otimes \varepsilon^i)(x^k e_k) = x^k \varepsilon^i(e_k) \cdot e_i = x^k \, \delta_k^i \cdot e_i = x^k e_k = v.$$

□

Le tenseur de Kronecker permet d'associer à tout tenseur de type $\binom{\ell}{k}$ un tenseur de type $\binom{\ell+1}{k+1}$ défini par

$$\begin{aligned} \mathrm{Tens}_k^\ell(V) &\longrightarrow \mathrm{Tens}_{k+1}^{\ell+1}(V) \\ T &\longmapsto \delta \otimes T \end{aligned}$$

Dans une base $e_1, \ldots, e_n$ de V, cette opération s'écrit

$$T \longmapsto \varepsilon^\mu \otimes e_\mu \otimes T.$$

On veut montrer que cette opération est injective, pour cela on introduit la définition suivante :

Definition 1.4 La *contraction* est l'application linéaire

$$C : \mathrm{Tens}(V) \longrightarrow \mathrm{Tens}(V)$$

définie de la façon suivante : si U est un tenseur covariant ou contravariant, i.e. si $U \in \mathrm{Tens}_\bullet^0(V)$ ou $U \in \mathrm{Tens}_0^\bullet(V)$, alors $C(U) = 0$. Et si U est un tenseur mixte

$$U \in \mathrm{Tens}_{k+1}^{\ell+1}(V) = L^{k+\ell+2}(\underbrace{V, \cdots, V}_{k+1}, \underbrace{V^*, \cdots, V^*}_{\ell+1}; K),$$

alors $C(U) \in \mathrm{Tens}_k^\ell(V) = L^{k+\ell}(\underbrace{V, \cdots, V}_{k}, \underbrace{V^*, \cdots, V^*}_{\ell}; K)$ est le tenseur

$$C(U)(v_1, \cdots, v_k, \xi^1, \cdots, \xi^\ell) = \sum_\mu U(e_\mu, v_1, \cdots, v_k, \varepsilon^\mu, \xi^1, \cdots, \xi^\ell).$$

Exemple Si $A = A_i^j\, \varepsilon^i \otimes e_j \in \mathrm{Tens}_1^1(V) = \mathrm{End}(V)$, alors $C(A) \in \mathrm{Tens}_0^0(V) = K$ est le scalaire donné par

$$C(A) = \sum_\mu A_i^j\, \varepsilon^i \otimes e_j(e_\mu, \varepsilon^\mu) = \sum_\mu A_\mu^\mu = \mathrm{Trace}(A).$$

En particulier $C(\delta) = \dim(V)$.

Plus généralement, lorsqu'un tenseur U est donné par ses composantes

$$U = U_{i_0 \cdots i_k}^{j_0 \cdots j_\ell}\, \varepsilon^{i_0} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} \otimes e_{j_0} \otimes \cdots \otimes e_{j_\ell},$$

on a

$$C(U) = \sum_\mu U_{\mu\, i_1 \cdots i_k}^{\mu\, j_1 \cdots j_\ell}\, \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_\ell}.$$

On peut aussi écrire

$$(CU)_{i_i \cdots i_k}^{j_i \cdots j_\ell} = \delta_{j_0}^{i_0}\, U_{i_0\, i_i \cdots i_k}^{j_0\, j_1 \cdots j_\ell}.$$

Propriétés 1.17 *(i.) C est linéaire.*

(ii.) Si U est un tenseur mixte, alors $C(U \otimes S) = C(U) \otimes S$.

(iii.) $C(\delta \otimes S) = \dim(V) \cdot S$.

(iv.) La contraction est l'unique endomorphisme linéaire de $\mathrm{Tens}(V)$ *tel que*

$$C(\xi \otimes v \otimes S) = \xi(v) \cdot S \qquad (\text{pour tout } S \in \mathrm{Tens}_k^\ell(V)).$$

Généralisation On peut contracter n'importe quel indice covariant avec n'importe quel indice contravariant d'un tenseur $U \in \mathrm{Tens}_{k+1}^{\ell+1}(V)$: si $1 \leq p \leq k$ et $1 \leq q \leq \ell$, alors on définit un tenseur $C_p^q(U) \in \mathrm{Tens}_k^\ell(V)$ par

$$C_p^q(U)(v_1, \cdots, v_k, \xi^1, \cdots, \xi^\ell) = \sum_\mu U(v_1, \cdots, v_{p-1}, e_\mu, v_{p+1}, \cdots v_k, \xi^1, \cdots, \xi^{q-1}, \varepsilon^\mu, \xi^{q+1}, \cdots \xi^\ell).$$

Ce qui donne en composantes

$$(C_p^q(U))_{i_i \cdots i_k}^{j_i \cdots j_\ell} = \delta_{j_q}^{i_p}\, U_{i_0 \cdots i_p \cdots i_k}^{j_0 \cdots j_q \cdots j_\ell}\ .$$

La contraction précédemment définie correspond donc à $C = C_1^1$.

Exercice 1.21 a) Montrer que la composition de deux endomorphismes $A, B \in \mathrm{End}(V)$ peut s'écrire

$$A \circ B = C_1^2(A \otimes B).$$

b) Montrer que si $B \in \mathrm{Bil}(V)$ est une forme bilinéaire et $v, w \in V$, alors

$$B(v, w) = C \circ C(B \otimes v \otimes w).$$

D'une manière générale, on appelle *produit contracté* de deux tenseurs U, S, leur produit tensoriel suivi d'une contraction

$$C_p^q(U \otimes S).$$

Exercice 1.22 On note $C^{(k)}$ la contraction usuelle répétée k fois : $C^{(k)} = C \circ \cdots \circ C$. Le couplage $\mathrm{Tens}_0^k(V) \times \mathrm{Tens}_k^0(V) \to K$ défini par $(S, T) \mapsto C^{(k)}(S \otimes T)$ est-il non-dégénéré ?

1.9 Les isomorphismes musicaux

Soit g une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel V, et $\{e_i\}$ une base de cet espace. On définit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tens}_k^{\ell+1}(V) & \to & \mathrm{Tens}_{k+1}^{\ell}(V) \\ T & \mapsto & T^\flat = C(g \otimes T) \end{array}$$

Exercice 1.23 a.) Ecrire $T^\flat$ en composantes.

b.) Soit $v \in V$. Déterminer une formule intrinsèque pour $v^\flat$.

c.) Montrer que si T est au moins une fois contravariant, $(T \otimes S)^\flat = T^\flat \otimes S$.

d.) On suppose de plus que g est non-dégénérée. Soit (g_{ij}) la matrice de g (i.e. $g = g_{ij}\varepsilon \otimes \varepsilon^j$), et (g^{ij}) la matrice inverse. Utiliser cette matrice pour écrire un inverse à $T \mapsto T^\flat$, qu'on notera $T \mapsto T^\sharp$. On a alors montré que ce sont des isomorphismes, appelés *isomorphismes musicaux.*

e.) Ecrire $T^\sharp$ en composantes.

1.10 Changement de bases

Soient $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ et $\{f_1, f_2, \cdots f_n\}$ deux bases de V et $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \cdots \varepsilon^n\}$, $\{\varphi^1, \varphi^2, \cdots \varphi^n\}$ les bases duales de V^*. Notons P et Q les matrices

$$P = \begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^n & \cdots & p_n^n \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} q_1^1 & \cdots & q_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^n & \cdots & q_n^n \end{pmatrix}$$

définies par

$$p_i^j = \varphi^j(e_i), \qquad q_\mu^\nu = \varepsilon^\nu(f_\mu).$$

Proposition 1.18 *Nous avons les relations suivantes*

i) $e_i = p_i^j f_j$ *;*

ii) $f_\mu = q_\mu^\nu e_\nu$ *:*

iii) les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre : $Q = P^{-1}$;

iv) $\varepsilon^j = q_i^j \varphi^i$ *;*

v) $\varphi^j = p_i^j \varepsilon^i$.

Preuve (i) Pour tout vecteur $x \in V$, on a $x = \varphi^j(x) f_j$, donc en particulier

$$e_i = \varphi^j(e_i) f_j = p_i^j f_j.$$

(ii) Même argument : $f_\mu = \varepsilon^\nu(f_\mu) e_\nu = q_\mu^\nu e_\nu$.

(iii) La relation $Q = P^{-1}$ est une conséquence de (i) et (ii), on a

$$e_i = p_i^j f_j = p_i^j (q_j^\ell e_\ell) = (p_i^j q_j^\ell)\, e_\ell.$$

On a donc

$$q_j^\ell p_i^j = \delta_i^\ell.$$

(iv) Posons $\lambda^j = q^j_i \varphi^i \in V^*$, et évaluons ce covecteur sur e_k :

$$\lambda^j(e_k) = q^j_i \varphi^i(e_k) = q^j_i \varphi^i(p^\ell_k f_\ell) = q^j_i p^\ell_k \underbrace{\varphi^i(f_\ell)}_{\delta^i_\ell} = q^j_i p^i_k.$$

Puisque $Q = P^{-1}$, on a donc

$$\lambda^j(e_k) = q^j_i p^i_k = \delta^j_k,$$

ce qui signifie que $\lambda^j = \varepsilon^j$.

(v) On a finalement

$$p^j_i \varepsilon^i = p^j_i q^i_k \varphi^k = \delta^j_k \varphi^k = \varphi^j.$$

□

On peut écrire ces relations sous la forme

$$(e_i) \xrightarrow{P} (f_j), \qquad (f_j) \xrightarrow{P^{-1}} (e_i).$$

$$(\varepsilon^i) \xrightarrow{P^{-t}} (\varphi^j), \qquad (\varphi^i) \xrightarrow{P^t} (\varepsilon^i).$$

où P^{-t} est la matrice contragrédiente de P, c'est à dire l'inverse de la transposée.

Corollaire 1.19 *Soit $T \in \mathrm{Tens}^\ell_k(V)$ un tenseur de type $\binom{\ell}{l}$ sur l'espace vectoriel V. Si les composantes de T dans les bases $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ et $\{f_1, f_2, \cdots f_n\}$ sont données par*

$$T^{j_1 j_2 \dots j_\ell}_{i_1 i_2 \dots i_k} \qquad \text{et} \qquad \tilde{T}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\ell}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k},$$

alors on a la relation

$$\tilde{T}^{\nu_1 \dots \nu_\ell}_{\mu_1 \dots \mu_k} = T^{j_1 \dots j_\ell}_{i_1 \dots i_k} \cdot q^{i_1}_{\mu_1} \cdots q^{i_k}_{\mu_k} \cdot p^{\nu_1}_{j_1} \cdots p^{\nu_\ell}_{j_\ell}. \tag{1.10.1}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} T &= T^{j_1 j_2 \dots j_\ell}_{i_1 i_2 \dots i_k} \, \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_\ell} \\ &= T^{j_1 j_2 \dots j_\ell}_{i_1 i_2 \dots i_k} (q^{i_1}_{\mu_1} \varphi^{\mu_1}) \otimes \cdots \otimes (q^{i_k}_{\mu_k} \varphi^{\mu_k}) \otimes (p^{\nu_1}_{j_1} f_{\nu_1}) \otimes \cdots \otimes (p^{\nu_\ell}_{j_\ell} f_{\nu_\ell}) \\ &= \tilde{T}^{\nu_1 \dots \nu_\ell}_{\mu_1 \dots \mu_k} \, \varphi^{\mu_1} \cdots \varphi^{\mu_k} \otimes f_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes f_{\nu_\ell}. \end{aligned}$$

□

Exemples 1. Si $x \in V$ est un vecteur, $x = x^j e_j = \tilde{x}^\nu f_\nu$, alors on a

$$\tilde{x}^\nu = p^\nu_j x^j.$$

2. Si $\alpha \in V^*$ est un covecteur, $\alpha = a_i \varepsilon^i = \tilde{a}_\mu \varphi^\mu$, alors on a

$$\tilde{a}_\mu = a_i q^i_\mu.$$

3. Si $A \in \mathrm{End}(V) = \mathrm{Tens}^1_1(V)$ est un endomorphisme, $A = a^j_i \, e_j \otimes \varepsilon^i = \tilde{a}^\nu_\mu \, f_\nu \otimes \varphi^\mu$, alors on a

$$\tilde{a}^\nu_\mu = p^\nu_j a^j_i q^i_\mu,$$

on peut écrire cette relation sous la forme matricielle $\tilde{A} = P \cdot A \cdot P^{-1}$.

4. Si $B \in \mathrm{Bil}(V) = \mathrm{Tens}^0_2(V)$ est une forme bilinéaire, $B = b_{ij} \, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j = \tilde{b}_{\mu\nu} \, \varphi^\mu \otimes \varphi^\nu$, alors on a

$$\tilde{b}_{\mu\nu} = b_{ij} q^i_\mu q^j_\nu = q^i_\mu b_{ij} q^j_\nu,$$

on peut écrire cette relation sous la forme matricielle $\tilde{B} = Q^t \cdot B \cdot Q$.

Exercice 1.24 Soit P une matrice inversible. Montrer que $(P^{-1})^t = (P^t)^{-1}$. (La matrice $(P^{-1})^t$ est appelée la matrice *contragrédiente* de P, et on la note P^{-t}).

Exercice 1.25 Montrer qu'il existe un tenseur de $\mathrm{Tens}_k^k(M)$ dont les coefficients sont donnés dans toute base par
$$\delta^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0$$
si les indices $i_1, i_2, \dots, i_k$ ne sont pas deux-à-deux distincts ou si les indices $j_1, j_2, \dots, j_k$ ne sont pas deux-à-deux distincts et
$$\delta^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i_1 i_2 \dots i_k) \text{ est une permutation paire de } (j_1 j_2 \dots j_k); \\ -1 & \text{si } (i_1 i_2 \dots i_k) \text{ est une permutation impaire de } (j_1 j_2 \dots j_k) \end{cases}$$
(ce tenseur s'appelle le tenseur de Kronecker généralisé).

Exercice 1.26 Montrer que le produit vectoriel classique dans $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire dans une base orthonormée sous la forme
$$x \times y = \delta^{ijk}_{123}\, x_i y_j\, e_k.$$

1.11 L'effet d'une application linéaire

Soit $F : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K. Alors on définit deux applications linéaires

$$F^* : \mathrm{Tens}^0_\bullet(W) \to \mathrm{Tens}^0_\bullet(V)$$
et
$$F_* : \mathrm{Tens}^\bullet_0(V) \to \mathrm{Tens}^\bullet_0(W)$$

Definition 1.5 Soit V, W deux espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps K, et $F : V \to W$ une application linéaire. On définit une application linéaire sur les tenseurs contravariants :
$$F_* : \mathrm{Tens}^\ell_0(V) \to \mathrm{Tens}^\ell_0(W)$$
par la formule suivante : si $T \in \mathrm{Tens}^\ell_0(v) = L^\ell(V^*, \cdots, V^*; K)$, alors
$$F_*(T)(\eta^1, \cdots, \eta^\ell) = T(\eta^1 \circ F, \cdots, \eta^\ell \circ F)$$
De manière équivalente, on peut aussi voir $F_* : V \otimes \cdots \otimes V \to W \otimes \cdots \otimes W$ ainsi :
$$F_*(v_1 \otimes \cdots \otimes v_\ell) = F(v_1) \otimes \cdots \otimes F(v_\ell)$$
Donc $F_* : \mathrm{Tens}^\bullet_0(V) \to \mathrm{Tens}^\bullet_0(W)$ est un homomorphisme d'algèbres qui prolonge l'application $F : V \to W$. De même, on définit une application linéaire sur les tenseurs contravariants :
$$F^* : \mathrm{Tens}^0_\ell(W) \to \mathrm{Tens}^0_\ell(V)$$
par la formule suivante : si $S \in \mathrm{Tens}^0_k(W) = L^k(W, \cdots, W; K)$, alors
$$F^*(S)(v_1, \cdots, v_k) = S(F(v_1), \cdots, F(v_k))$$

De manière équivalente, on peut aussi voir $F^* : W^* \otimes \cdots \otimes W^* \to V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ ainsi :

$$F^*(\xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^k) = \left(\xi^1 \circ F\right) \otimes \cdots \otimes \left(\xi^k \circ F\right)$$

En particulier, si $k = 1, \mathrm{Tens}^0_1(W) = W^*$ et on a $F^* : W^* \to V^*$, $F^*(\eta) = \eta \circ F$. Donc $F^* : \mathrm{Tens}^0_k(W) \to \mathrm{Tens}^0_k(V)$ est l'unique homéomorphisme d'algèbres (défini sur l'algèbre des foncteurs covariants) qui étend l'application duale de F.

Propriétés 1.20 *(i.)* $id^* = id$ *et* $id_* = id$

(ii.) $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ *et* $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$.

Comportement sur des bases : Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de V, $(f_j)_{1\leq j\leq m}$ une base de W, et notons $\left(\varepsilon^i\right)_{1\leq i\leq n}$, $\left(\phi^j\right)_{1\leq j\leq m}$ les bases duales respectives. On pose :

$$a^i_j = \phi^i(F(e_j))$$

Definition 1.6 (a^i_j) est la matrice de F relativement aux bases choisies.

Lemme 1.21 $F(e_j) = a^i_j f_i$

Preuve $F(e_j) = \phi^i(F(e_j))f_i = a^i_j f_i$

□

Corollaire 1.22 $F \in \mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$ *est donné par*

$$F = a^i_j f_i \otimes \varepsilon^j$$

Preuve $F(e_k) = a^i_k f_i = a^i_j f_i \otimes \varepsilon^j(e_k)$.

□

L'expression de $F_* : \mathrm{Tens}^\ell_0(V) \to \mathrm{Tens}^\ell_0(W)$ est donc donnée par la formule suivante :

$$F_*(T^{j_1\cdots j_\ell} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_\ell}) = a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_\ell}_{j_\ell} f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_\ell},$$

et $F^* : \mathrm{Tens}^0_k(W) \to \mathrm{Tens}^0_k(V)$ est donnée par

$$F^*(S_{i_1\cdots i_k}\varphi^{i_1} \otimes \cdots \varphi^{i_k}) = S_{i_1\cdots i_k} a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_k}_{j_k} \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_k}.$$

Le cas des tenseurs mixtes : Si $F : V \to W$ est un isomorphisme, alors on définit deux applications linéaires

(a)

$$\begin{aligned} F_* : \mathrm{Tens}^\ell_k(V) &\to \mathrm{Tens}^\ell_k(W) \\ S \otimes T &\longmapsto \left(F^{-1}\right)^*(S) \otimes F_*(T), \qquad S \in \mathrm{Tens}^0_k(V), T \in \mathrm{Tens}^\ell_0(V) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} F^* : \mathrm{Tens}^\ell_k(W) &\to \mathrm{Tens}^\ell_k(V) \\ S' \otimes T' &\longmapsto F^*(S') \otimes \left(F^{-1}\right)_*(T'), \qquad S' \in \mathrm{Tens}^0_k(V), T' \in \mathrm{Tens}^\ell_0(V) \end{aligned}$$

1.12 Quelques mots sur les catégories

La *théorie des catégories* a été développée à partir de 1945 par Samuel Eilenberg et Saunders MacLane pour formaliser la manipulation de structures mathématiques apparaissant en topologie et en algèbre. Voyons la définition :

Définition Une *catégorie* $\mathfrak{C}$ est une classe dont les éléments sont appelés des "objets" lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

a.) A chaque paire d'objets $X, Y \in \mathfrak{C}$ est associée un ensemble noté $\mathrm{Mor}(X, Y)$ et dont les éléments s'appellent des *morphismes* de X vers Y.

b.) Si $X, Y, Z \in \mathfrak{C}$ sont trois objets, alors il existe une application appelée *composition*

$$\theta : \mathrm{Mor}(X, Y) \times \mathrm{Mor}(Y, Z) \to \mathrm{Mor}(X, Z);$$

pour $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ et $g \in \mathrm{Mor}(Y, Z)$ on note $g \circ f = \theta(f, g) \in \mathrm{Mor}(X, Z)$. Cette composition doit en outre obéir aux deux règles suivantes :

i.) pour tout objet X, il existe un morphisme $1_X \in \mathrm{Mor}(X, X)$ tel que pour tout objet Y et tous $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}(Y, X)$, on a $f \circ 1_X = f$ et $1_X \circ g = g$;

ii.) si $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}(Y, Z)$ et $h \in \mathrm{Mor}(Z, W)$, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Le morphisme $1_X \in \mathrm{Mor}(X, X)$ s'appelle l'*identité* de X.

Voyons quelques exemples :

1. La *catégorie des ensembles* est simplement la classe de tous les ensembles et dont les morphismes sont les applications entre ensembles.
2. La *catégorie des ensembles pointés* est la classe dont les éléments sont des paires (X, x_0) où X est un ensembles et $x_0 \in X$ est un élément (appelé le *point base*), les morphismes $\mathrm{Mor}((X, x_0), (Y, y_0))$ sont les applications $f : X \to Y$ respectant les points bases (i.e. telles que $f(x_0) = y_0$).
3. La *catégorie des groupes* est la classe de tous les groupes et les morphismes sont les homomorphismes entre deux groupes.
4. Les espaces topologiques forment une catégorie dont les morphismes sont les applications continues.
5. Les espaces vectoriels sur un corps K forment une catégorie dont les morphismes sont les applications K-linéaires.
6. Les anneaux forment une catégorie dont les morphismes sont les homomorphismes d'anneaux.
7. Les algèbres sur un corps K forment une catégorie dont les morphismes sont les homomorphimes d'algèbres (c'est une sorte d'intersection des deux exemples précédents).

On voit sur ces exemples que la notion de catégorie formalise et unifie le concept de "classe d'ensembles munis d'une même structure" –cette structure peut-être algébrique, topologique ou autre– et les morphismes sont les applications qui sont compatibles avec la ou les structures choisies. Ce type de catégories sont appelées "concrètes" par Saunders Mac Lane.

Pourtant il existe des catégories dont les objets ne sont pas des "ensembles munis d'une structure". Par exemple un ensemble E forme lui-même une catégorie dont les objets sont les éléments $x \in E$ et pour laquelle il y a exactement un morphisme pour chaque paire $x, y \in E$.

Un autre exemple est donné par un groupe G, cette fois il n'y a qu'un objet (noté $*$) et on décide que $\mathrm{Mor}(*,*) = G$, i.e. les morphismes sont les éléments du groupe et la composition est donnée par la loi de groupe.

Exercice 1.27 Expliquer comment on peut représenter une catégorie finie (i.e. ayant un nombre fini d'objets et de morphismes) par un graphe orienté. Quels sont les graphes qui correspondent à de telles catégories ?

Definition 1.7 Un foncteur est une correspondance entre deux catégories. Plus précisément, un *foncteur covariant* $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ est la donnée pour chaque objet $X \in \mathfrak{C}$ d'un objet $\mathcal{F}(X) \in \mathfrak{D}$ et pour chaque morphisme $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ dans la catégorie $\mathfrak{C}$ d'un morphisme noté $f_* = \mathcal{F}(f) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y)$; ces données doivent satisfaire les axiomes suivants :

i) $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}X}$ pour tout objet X de $\mathfrak{C}$;

ii) si $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ et $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$, alors $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Z)$

Avec la notation $f_* = \mathcal{F}(f)$, la dernière condition s'écrit $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Quelques exemples :

1. A tout espace vectoriel V on peut associer un ensemble pointé en considérant l'ensemble sous-jacent à l'espace vectoriel et en prenant $0 \in V$ comme point base, cela forme un foncteur covariant de la catégorie des espaces vectoriels vers celle des ensembles pointés.
2. A tout ensemble X on peut le K-espace vectoriel $Vect(X)$ de base X, cela définit un foncteur de la catégorie des ensembles vers celle des K-espaces vectoriels.
3. A toute K-algèbre on peut associer un K-espace vectoriel (en oubliant la multiplication), cela définit un foncteur covariant de la catégorie des algèbres vers celle des espaces vectoriels.
4. De la même faḉn, on définit un foncteur covariant de la catégorie des K-algèbres vers celle des anneaux.
5. Si S est un ensemble donné, alors $X \to X^S$ est un foncteur covariant de la catégorie des ensembles vers elle mm̂e.

En topologie algébrique, on étudie plusieurs foncteurs importants de la catégorie des espaces topologiques vers celle des groupes (les "groupes d'homotopie" et les "groupes d'homologie" sont de tels foncteurs).

On définit aussi de manière semblable la notion de foncteur contravariant ; un *foncteur contravariant* $\mathcal{G} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ est la donnée pour chaque $X \in \mathfrak{C}$ d'un objet $\mathcal{G}(X) \in \mathfrak{D}$ et pour chaque morphisme $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ d'un morphisme $f^* = \mathcal{G}(f) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{G}Y, \mathcal{G}X)$; ces données vérifient :

i) $\mathcal{G}(1_X) = 1_{\mathcal{G}X}$ pour tout objet X de $\mathfrak{C}$;

ii) si $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ et $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$, alors $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(f) \circ \mathcal{G}(g) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{G}Z, \mathcal{G}X)$

Avec la notation $f^* = \mathcal{G}(f)$, la dernière condition s'écrit $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Exemples :

1. Si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses sous-ensembles, si $f : X \to Y$ est une application ensembliste, on note $\mathcal{P}(f) = f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ l'application définie par $\mathcal{P}(f)(B) = f^{-1}(B) = \{x \in X \,|\, f(x) \in B\}$. Il est clair que $\mathcal{P}$ est un foncteur contravariant de la catégorie des ensembles vers elle-même.

2. La correspondance $V \to V^*$ qui à tout K-espace vectoriel associe son dual est un foncteur contravariant de la catégorie des K-espaces vectoriels vers elle-mm̂e (si $f : V \to W$ est une application linéaire, on note $f^* : W^* \to V^*$ l'application définie par $f^*(\eta) = \eta \circ f$, c'est donc la transposée de f).
3. A tout ensemble X on peut associer l'algèbre $A_K(X)$ des fonctions $u : X \to K$ de X vers le corps K, c'est un foncteur contravariant de la catégorie des ensembles vers celle des K-algèbres.
4. A tout espace topologique X on peut associer l'algèbre $C(X)$ des fonctions $u : X \to \mathbb{R}$ continues de X vers $\mathbb{R}$, c'est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques vers celle des $\mathbb{R}$-algèbres.

Le cas des tenseurs : Soit V un K-espace vectoriel. Rappelons qu'un tenseur covariant d'ordre k sur V est un élément de

$$\mathrm{Tens}^0_k(V) = \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots V^*}_{k},$$

et qu'un tenseur contravariant d'ordre m sur V est un élément de

$$\mathrm{Tens}^m_0(V) = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots V}_{m}.$$

Un tenseur mixte de type $\binom{m}{k}$ sur V étant un élément de

$$\mathrm{Tens}^m_k(V) = \mathrm{Tens}^0_k(V) \otimes \mathrm{Tens}^m_0(V) = \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots V^*}_{k} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots V}_{m}.$$

Le produit tensoriel définit une structure d'algèbre sur

$$\mathrm{Tens}(V) = \bigoplus_{k,m \in \mathbb{N}} \mathrm{Tens}^m_k(V),$$

cette algèbre étant elle-même produit tensoriel des deux sous-algèbres

$$\mathrm{Tens}^0_\bullet(V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Tens}^0_k(V), \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tens}^\bullet_0(V) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{Tens}^m_o(V).$$

On dit que $\mathrm{Tens}^0_\bullet(V)$ est l'algèbre des tenseurs covariants sur V et $\mathrm{Tens}^\bullet_0(V)$ l'algèbre des tenseurs contravariant.

La correspondance $V \to \mathrm{Tens}(V)$ n'est pas un foncteur, car on ne peut pas associer d'application naturelle $\mathrm{Tens}(V) \to \mathrm{Tens}(W)$ ou $\mathrm{Tens}(W) \to \mathrm{Tens}(V)$ à une application linéaire $V \to W$ (sauf si l'application est inversible). Mais

$V \to \mathrm{Tens}^\bullet_0(V)$ est un foncteur covariant, et

$V \to \mathrm{Tens}^0_\bullet(V)$ est un foncteur contravariant.

Vous avez bien lu ! C'est une catastrophe terminologique : l'algèbre des tenseurs *covariants* sur V est un foncteur *contravariant* et l'algèbre des tenseurs *contravariants* sur V est un foncteur *covariant*.

D'où vient cette catastrophe ? Il faut chercher l'explication dans le développement historique, le calcul tensoriel a débuté son histoire 50 ans avant la théorie des catégories. A l'époque (fin du XIX^e siècle), on représentait un vecteur (et plus généralement un tenseur) par ses composantes, l'objet vecteur "est" le n-tuple des ses composantes $(x^1, x^2, \cdots x^n)$, mais chaque composante est en réalité un élément du dual de l'espace vectoriel considéré. Donc historiquement, c'est le covecteur qui est l'objet premier et le vecteur apparaît comme un élément du bidual. Cette circonstance crée une inversion malheureuse entre ce qui est co-variant et ce qui est contra-variant, elle se corrige en observant que la correspondance $V \to \mathrm{Tens}^{\bullet}_{0}(V^*)$ est bien un foncteur contravariant et $V \to \mathrm{Tens}^{0}_{\bullet}(V^*)$ est est un foncteur covariant.

Chapitre 2

L'algèbre de Grassmann

Dans ce chapitre, on fixe un corps K de caractéristique nulle. Rappelons que cela signifie que $n \cdot 1 \neq 0$ pour tout entier n.

2.1 Les tenseurs alternés

On note $\mathfrak{S}_k$ le groupe symétrique d'ordre k, rappelons qu'il s'agit du groupe des permutations (bijections) de l'ensemble $\{1, \cdots, k\}$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ et tout $T \in \mathrm{Tens}_k^0(V)$, on définit une nouvelle application multilinéaire ${}^{\sigma}T \in \mathrm{Tens}_k^0(V)$ par

$$ {}^{\sigma}T(v_1, \cdots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}). $$

Exercice 2.1 Montrer qu'il s'agit d'une anti-action du groupe symétrique sur l'espace $\mathrm{Tens}_k^0(V)$, c'est à dire que ${}^{\mathrm{id}}T = T$ et ${}^{\tau}({}^{\sigma}T) = {}^{(\sigma\tau)}T$ pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k$.

Exercice 2.2 Montrer que si $\theta^1, \cdots, \theta^k \in V^*$, alors

$$ {}^{\sigma}\left(\theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^k\right) = \theta^{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \theta^{\sigma^{-1}(k)}. $$

Definition 2.1 Le tenseur $T \in \mathrm{Tens}_k^0(V)$ est dit

(a.) *Symétrique* si ${}^{\sigma}T = T$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.

(b.) *Antisymétrique* ou *alterné* si ${}^{\sigma}T = \mathrm{sgn}(\sigma)T$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.

Definition 2.2 On note $\Lambda_k(V) \subset \mathrm{Tens}_k^0(V)$ l'ensemble des vecteurs covariants alternés de degré k

$$ \Lambda_k(V) = \left\{ T \in \mathrm{Tens}_k^0(V) \,\middle|\, {}^{\sigma}T = \mathrm{sgn}(\sigma)T \right\}. $$

C'est un sous-espace vectoriel, et on le note aussi $\Lambda^k(V^*)$ ou $A^k(V)$.

Remarque 2.3 On notera habituellement avec des lettres grecques $\alpha, \beta, \phi, \omega, \theta$ les éléments de $\Lambda_k(V)$. Un élément de $\Lambda_k(V)$ se nomme aussi une *k-forme alternée* ou *k-forme extérieure* et k est le *degré* de la forme. On note $k = \deg(\alpha)$.

Definition 2.4 On note $\mathrm{Alt} : \mathrm{Tens}_k^0(V) \to \Lambda_k(V)$ l'application linéaire définie par

$$ \mathrm{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot {}^{\sigma}T. $$

Proposition 2.1 *Cette application vérifie les propriétés suivantes*

a) Si $T \in \mathrm{Tens}^0_k(V)$*, alors* $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda_k(V)$.

b) Si $\alpha \in \Lambda_k(V)$*, alors* $\mathrm{Alt}(\alpha) = \alpha$.

c) $\mathrm{Alt} : \mathrm{Tens}^0_k(V) \to \Lambda_k(V) \subset \mathrm{Tens}^0_k(V)$ *est un projecteur (i.e.* $\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$*).*

d) On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}(T) \otimes S\right) &= \mathrm{Alt}\left(T \otimes \mathrm{Alt}(S)\right) \\ &= \mathrm{Alt}(T \otimes S) \\ &= \mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}(T) \otimes \mathrm{Alt}(S)\right). \end{aligned}$$

Preuve

a) Soit $\alpha = \mathrm{Alt}(T)$ et $\rho \in \mathfrak{S}_k$ une permutation quelconque, alors

$$\begin{aligned} {}^{\rho}\alpha &= {}^{\rho}\left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot {}^{\sigma}T\right) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)^{(\sigma\rho)}T \\ &\overset{\tau=\sigma\rho}{=} \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\rho)\,\mathrm{sgn}(\tau)^{\rho}T \\ &= \mathrm{sgn}(\rho)\,\mathrm{Alt}(T) \\ &= \mathrm{sgn}(\rho)\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi ${}^{\rho}\alpha = \mathrm{sgn}(\rho)\alpha$ et donc $\alpha = \mathrm{Alt}(T) \in \Lambda_k(V)$.

b) Si $\alpha \in \Lambda_k(V)$, alors

$$\mathrm{Alt}(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\rho) \cdot {}^{\rho}\alpha = \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_k} \alpha = \alpha.$$

c) C'est une conséquence immédiate des deux propriétés précédentes.

d) Montrons que $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T) \otimes S) = \mathrm{Alt}(T \otimes S)$ pour $T \in \mathrm{Tens}^0_k(V)$, $S \in \mathrm{Tens}^0_m(V)$. Pour la preuve, on utilisera le plongement naturel

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_k &\hookrightarrow \mathfrak{S}_{k+m} \\ \tau &\mapsto \tau' \end{aligned}$$

défini par

$$\tau'(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \geq k+1 \\ \tau(j) & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que $\mathrm{sgn}(\tau') = \mathrm{sgn}(\tau)$ car la décomposition en transpositions est la même pour

τ et τ'. Nous pouvons donc calculer

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}(T)\otimes S\right) &= \frac{1}{(k+m)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+m}}\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)\cdot{}^{\sigma}(({}^{\tau}T)\otimes S)\\
&= \frac{1}{(k+m)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+m}}\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau')\cdot{}^{\sigma}({}^{\tau'}(T\otimes S))\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\frac{1}{(k+m)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+m}}\mathrm{sgn}(\tau'\sigma)\cdot{}^{(\tau'\sigma)}(T\otimes S)\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\frac{1}{(k+m)!}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_{k+m}}\mathrm{sgn}(\rho)\cdot{}^{\rho}(T\otimes S)\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{Alt}(T\otimes S)\\
&= \mathrm{Alt}(T\otimes S).
\end{aligned}$$

L'identité $\mathrm{Alt}\left(T\otimes\mathrm{Alt}(S)\right)=\mathrm{Alt}(T\otimes S)$ se prouve de la même manière. Finalement, la dernière identité est une conséquence des précédentes :

$$\mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}(T)\otimes\mathrm{Alt}(S)\right)=\mathrm{Alt}\left(T\otimes\mathrm{Alt}(S)\right)=\mathrm{Alt}(T\otimes S).$$

□

Exercice 2.3 Soit $T\in\mathrm{Tens}^0_k(V)$, montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
(a) T est alterné.
(b) $T(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)=-T(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots)$ pour tout $i<j$.
(c) $T(x_1,\dots,x_k)=0$ si $\{x_1,\dots,x_k\}$ sont linéairement d épendants.
(d) $T(x_1,\dots,x_k)=0$ dès qu'il existe $i<j$ avec $x_i=x_j$.
En déduire que $\dim\Lambda_k(V)=0$ pour tout $k>\dim V$.

2.2 Le produit extérieur de deux formes alternées

Definition 2.5 Soit $\alpha\in\Lambda_k(V),\beta\in\Lambda_m(V)$. On définit $\alpha\wedge\beta\in\Lambda_{k+m}(V)$ par

$$\alpha\wedge\beta=\frac{(k+m)!}{k!\,m!}\,\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta).$$

Lemme 2.2 *Le produit extérieur* $\Lambda_k(V)\times\Lambda_m(V)\xrightarrow{\wedge}\Lambda_{k+m}(V)$ *est bien défini, biliéaire et associatif.*

Preuve Puisque Alt est linéaire et que $\otimes$ est bilinéaire, alors $\wedge$ est nécessairement bilinéaire. Il faut donc seulement prouver l'associativité. Soient $\alpha\in\Lambda_p$, $\beta\in\Lambda_q$ et $\gamma\in\Lambda_r$. Alors

$$\begin{aligned}
(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma &= \frac{((p+q)+r)!}{(p+q)!\,r!}\,\mathrm{Alt}\left(\frac{(p+q)!}{p!\,q!}\,\mathrm{Alt}\left(\alpha\otimes\beta\right)\otimes\gamma\right)\\
&= \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}\,\mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}\left(\alpha\otimes\beta\right)\otimes\gamma\right)\\
&= \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!}\,\mathrm{Alt}\left(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma\right).
\end{aligned}$$

Par le même calcul, on a

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \frac{(p+q+r)!}{p!\, q!\, r!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma) .$$

et on a donc $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

□

Un examen de la preuve suggère qu'on a la formule suivante :

Lemme 2.3 *Soit $p_1, \cdots, p_\nu$ des entiers naturels. Si $\alpha_i \in \Lambda_{p_i}(V)$ pour $1 \leq i \leq \nu$, alors*

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_\nu) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{\nu} p_j\right)!}{\prod_{j=1}^{\nu} (p_j!)} \operatorname{Alt}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_\nu) .$$

Preuve Exercice.

□

Dans le cas particulier où $p_1 = p_2 = \cdots = p_\nu = 1$, la formule précédente nous dit que $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in V^*$, alors

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = k! \operatorname{Alt}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k) .$$

Exemples Si $\alpha, \beta, \gamma \in V^*$, alors

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha,$$

et

$$\begin{aligned} &\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \\ &\quad = \alpha \otimes \beta \otimes \gamma + \beta \otimes \gamma \otimes \alpha + \gamma \otimes \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \otimes \gamma - \gamma \otimes \beta \otimes \alpha - \alpha \otimes \gamma \otimes \beta \end{aligned}$$

Proposition 2.4 (Formule du déterminant) *Si $\theta^1, \cdots, \theta^r \in V^*$ sont des covecteurs et si $v_1, \cdots, v_r$ sont des vecteurs, alors*

$$\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r (v_1, \cdots, v_r) = \det(\theta^i(v_j)).$$

Par exemple si $\theta, \varphi \in V^*$, alors

$$\begin{aligned} (\theta \wedge \varphi)(v, w) &= \theta(v)\varphi(w) - \theta(w)\varphi(v) \\ &= \det \begin{pmatrix} \theta(v) & \varphi(v) \\ \theta(w) & \varphi(w) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Preuve de la formule du déterminant
Le lemme précédent entraîne que

$$(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r) = r!\ \operatorname{Alt}(\theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^r),$$

donc

$$\begin{aligned}(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r)(v_1, \cdots, v_r) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \theta^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \theta^r(v_{\sigma(r)}) \\ &= \det(\theta^i(v_j))_{1 \leq i,j \leq r}\end{aligned}$$

□

La formule du déterminant entraîne plusieurs corollaires :

Corollaire 2.5 *Si $\sigma \in \Sigma_r$ et $\theta^i, \cdots, \theta^r \in V^*$, alors*

$$^\sigma\left(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r\right) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot (\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r).$$

Preuve En effet, une permutation des termes dans $\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r$ revient à une permutation des colonnes (ou des lignes) de la matrice $(\theta^i(v_j))$.

□

Definition 2.6 Une forme $\alpha \in \Lambda^*(V)$ est dite *décomposable* s'il existe des covecteurs $\theta^1, \cdots, \theta^r \in V^*$ tels que $\alpha = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r$.

Les r-formes décomposables engendrent l'espace $\Lambda_r(V)$, plus précisément on a le

Corollaire 2.6 *Si $\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n$ est une base duale de V^*, alors*

$$\left\{\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\right\}$$

est une base de $\Lambda_r(V)$. En particulier $\dim(\Lambda_r(V)) = \binom{n}{r}$, et $\Lambda_r(V) = 0$ si $r > n$.

Preuve On sait que $\left\{\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_r} \mid 1 \leq i_1, \cdots, i_r \leq n\right\}$ est une base de l'espace des tenseurs $\mathrm{Tens}^0_r(V)$. Or $\mathrm{Alt} : \mathrm{Tens}^0_r(V) \to \Lambda_r(V)$ est linéaire, surjective, et de plus

$$\mathrm{Alt}(\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_r}) = \frac{1}{r!}\left(\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_r}\right),$$

donc $\left\{\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_r} \,\middle|\, 1 \leq i_1, \cdots, i_r \leq n\right\}$ engendre $\Lambda_r(V)$. Mais la formule du déterminant entraîne que $\alpha = \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_r} = 0$ si les i_μ ne sont pas tous distincts, et aussi que ${}^\sigma\alpha = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. Ainsi, on peut se ramener au cas où les indices sont tous distincts et ordonnés. Donc

$$\left\{\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\right\}$$

engendre $\Lambda_r(V)$. Il reste à voir que ces éléments sont linéairement indépendants. Soit $e_1, \cdots, e_n$ la base de V duale à ε^i, et supposons $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, alors on a

$$\left(\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_r}\right)(e_{j_1}, \cdots, e_{j_r}) = \det\left(\varepsilon^{i_\mu}(e_{j_\nu}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } j_\mu = i_\mu \text{ pour tout } \mu \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Cette identité entraîne que les $\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_r}$ sont linéairement indépendants. En effet, supposons que

$$\gamma = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} c_{i_1 \cdots i_r}\, \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_r} = 0,$$

en évaluant γ sur $e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}$, on trouve que les coefficients $c_{i_1 \cdots i_r}$ sont tous nuls.

$\square$

Corollaire 2.7 *Le produit extérieur est anticommutatif au sens gradué : si $\alpha \in \Lambda_k(V)$ et $\beta \in \Lambda_\ell(V)$, alors*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$$

Preuve Il suffit de le vérifier sur les formes décomposables décomposables. Si $\theta, \varphi \in V^*$, alors

$$\theta \wedge \varphi = \theta \otimes \varphi - \varphi \otimes \theta = -\varphi \wedge \theta.$$

Plus généralement, si $\theta^i, \varphi^j \in V^*$ alors

$$\begin{aligned}(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k) \wedge (\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^\ell) &= (-1)^k \varphi^1 \wedge (\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k) \wedge (\varphi^2 \wedge \cdots \wedge \varphi^\ell) \\ &= (-1)^{2k} \varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge (\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k) \wedge (\varphi^3 \wedge \cdots \wedge \varphi^\ell) \\ &= \ldots \\ &= (-1)^{k\ell} (\varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^\ell) \wedge (\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k).\end{aligned}$$

$\square$

Voyons un dernier corollaire de la formule du déterminant :

Corollaire 2.8 *Soient $\alpha \in \Lambda_k(V)$ une k-forme et $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k \in V$ des vecteurs. Si $w_i = a_i^j v_j$, alors*

$$\alpha(w_1, \ldots, w_k) = \det(a_i^j)\, \alpha(v_1, \ldots, v_k).$$

Preuve On peut supposer que α est décomposable, disons $\alpha = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k$. On a alors

$$\alpha(w_1, \ldots, w_k) = \det(\langle \theta^j, w_i \rangle) = \det(a_i^\mu \langle \theta^j, v_\mu \rangle) = \det(a_i^\mu) \cdot \det(\langle \theta^j, v_\mu \rangle) = \det(a_i^\mu) \alpha(v_1, \ldots, v_\mu).$$

$\square$

En particulier, pour toute n-forme $\omega \in \Lambda_n(V)$ où $n = \dim(V)$, on a

$$\omega(w_1, \ldots, w_n) = c \cdot \det(a_i^j)$$

2.3 L'algèbre de Grassman ou algèbre extérieure

Definition 2.7 *L'algèbre extérieure (algèbre de Grassman covariante)* d'un K-espace vectoriel V est l'algèbre

$$(\Lambda_\bullet(V), +, \wedge)\,,$$

où

$$\Lambda_\bullet(V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Lambda_k(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda_k(V).$$

Proposition 2.9 *L'algèbre extérieure vérifie les propriétés suivantes :*

a) $\Lambda_0(V) = K$ est le centre de $\Lambda_\bullet(V)$.

b) $\dim \Lambda_\bullet(V) = 2^n$, où $n = \dim(V)$.

c) $\Lambda_\bullet(V)$ est une algèbre unitaire et graduée et anticommutative.

Proposition 2.10 *L'application linéaire* $\mathfrak{a} : \mathrm{Tens}^0_\bullet(V) \to \Lambda_\bullet(V)$ *définie par* $\mathfrak{a}(T) = k!\,\mathrm{Alt}(T)$ *est un homomorphisme d'algèbres. Cet homomorphisme est surjectif et son noyau est l'idéal bilatère* $Q \subset \mathrm{Tens}^0_\bullet(V)$ *engendré par les tenseurs de la forme* $\theta \otimes \theta, \theta \in V^*$.

Preuve Exercice.

Cette proposition entraîne en particulier qu'on a la suite exacte d'algèbres :

$$0 \to Q \to \mathrm{Tens}^0_\bullet(V) \xrightarrow{\mathfrak{a}} \Lambda_\bullet(V) \to 0$$

et que l'algèbre extérieure est isomorphe au quotient d'algèbres

$$\Lambda_\bullet(V) \cong \mathrm{Tens}^0_\bullet(V)/Q.$$

2.4 Le produit intérieur

Définition : Le produit intérieur est l'opération

$$\iota : V \times \Lambda_\bullet(V) \to \Lambda_\bullet(V)$$

définie par

$$i_v\alpha = C(v \otimes \alpha)$$

où C dénote la contraction. Ce produit est aussi noté $\alpha \lrcorner v = i_v\alpha$.

Exercice 2.4 a.) Vérifier que $i_v : \Lambda_\bullet(V) \to \Lambda_\bullet(V)$ est linéaire.

b.) Expliciter $(i_v\alpha)(v_1, \dots, v_{k-1})$.

c.) Montrer que $i_v : \Lambda_k(V) \to \Lambda_{k-1}(V)$.

d.) Montrer que $i_v \circ i_v = 0$.

e.) Prouver que $i_v \circ i_w = -i_w \circ i_v$.

Exercice 2.5 Soit $\alpha \in \Lambda_k(V)$, $\beta \in \Lambda_l(V)$ et $v \in V$. Prouver que

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_v\beta)$$

en choisissant α et β dans la base de $\Lambda(V)$ induite par une base $\{e_i\}$ de V telle que $v = e_1$.

2.5 Forme volume et orientation d'un espace vectoriel réel

Définition Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie n. On appelle *forme volume* sur V la donnée d'une n-forme $\omega \in \Lambda_n(V)$ non nulle.
Si $v_1, \dots, v_n \in V$, alors le *volume* du parallélépipède $[v_1, \dots, v_n]$ relatif à ω est défini par

$$\mathrm{Vol}[v_1, \dots, v_n] = |\omega(v_1, \dots, v_n)|.$$

Rappelons que $\dim(\Lambda_n(V)) = 1$, donc deux formes volumes sont toujours multiples l'une de l'autre et le volume d'un parallélépipède est donc bien défini à une constante près.

Exercice 2.6 $\mathrm{Vol}[v_1, \dots, v_n] \neq 0$ si et seulement si les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont linéairement indépendants.

On dit que les formes volumes $\omega', \omega'' \in \Lambda_n(V)$ sont *co-orientée* (ou ont *même orientation*) si $\omega'' = c \cdot \omega'$ avec $c > 0$. Il s'agit clairement d'une relation d'équivalence sur $\Lambda_n(V)$. Une classe d'équivalence s'appelle une *orientation* de l'espace vectoriel V. Une orientation de V n'est donc rien d'autre que le choix d'une composante connexe de $\Lambda_n(V) \setminus \{0\}$.

Si $v_1, \dots, v_n \in V$ sont linéairement indépendants, alors on dit que cette base est *positivement orientée* ou *directe* relativement à la forme volume ω si

$$\omega(v_1, \dots, v_n) > 0.$$

On dit que cette base est *négativement orientée* ou *indirecte* dans le cas contraire. La notion de base directe ou indirecte ne dépend clairement que de l'orientation définie par ω.

Exercice 2.7 Soient $v_1, \dots, v_n$ et $w_1, \dots, w_n$ deux bases de l'espace vectoriel réel V. Alors ces deux bases sont de même orientation si et seulement si $\det(p_i^j) > 0$ où (p_i^j) est la matrice de changement de base : $w_i = p_i^j v_j$.

Remarque Ce dernier exercice fait le lien avec la définition usuelle de l'orientation d'un espace vectoriel. Sur Wikipédia par exemple, on peut lire la définition suivante : *Deux bases d'un espace vectoriel réel E définissent la même orientation lorsque le déterminant de la matrice de passage est (strictement) positif. Cette matrice est évidemment inversible : son déterminant est donc non nul. Est ainsi définie une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E, relation admettant exactement deux classes d'équivalence, les orientations de E. Une fois fixée une orientation, une base de E est dite base directe ou base indirecte selon que cette base définit l'orientation choisie ou l'autre.*

Exercice 2.8 Il est clair que tout espace vectoriel complexe (de dimension finie) W est naturellement un espace vectoriel réel. Montrer que cet espace W admet une orientation naturelle.

2.6 L'algèbre de Grassman d'un espace vectoriel euclidien

Rappelons qu'un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire.

Soit (V, g) un espace vectoriel euclidien, alors son dual est aussi un espace euclidien (et on notera aussi g le produit scalaire sur V). On introduit un produit scalaire G sur $\Lambda_\bullet(V)$ par les règles suivantes :

(i) $G(\alpha, \beta) = 0$ dès que $\alpha \in \Lambda_k(V)$ et $\beta \in \Lambda_\ell(V)$ avec $k \neq \ell$.

(ii) $G(\alpha, \beta) = \det(g(\theta^i, \phi^j))$ si $\alpha = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k$ et $\beta = \phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^k$.

Exercice 2.9 a.) Calculer $G(\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}, \varepsilon^{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{j_k})$ si $\{\varepsilon^i\}$ est la base duale d'une base donnée sur V.

b.) En déduire que G est un produit scalaire sur $\Lambda_\bullet(V)$ et décrire une base orthonormée.

Proposition 2.11 *Supposons que V est un espace vectoriel réel orienté muni d'un produit scalaire g. Alors il existe une unique forme volume ω compatible avec l'orientation et telle que*

$$\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$$

pour toute base orthonormée $e_1, \dots, e_n$ d'orientation positive.

On appelle ω *la forme volume associée au produit scalaire g.*

Exercice 2.10 Montrer que si $e_1, \ldots, e_n$ est une base quelconque de l'espace vectoriel euclidien orienté V, alors la forme volume associée à g est donnée par

$$\omega = \eta \cdot \sqrt{\det(g_{ij})}\, \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n$$

où $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ et ε^j est la base duale à e_i. $\eta = 1$ si la base $e_1, \ldots, e_n$ est directe et $\eta = -1$ si cette base est indirecte.

Exercice 2.11 (*Dualité de Hodge*) Soit (V, g) un espace vectoriel euclidien orienté. Montrer qu'il existe une unique application $\mathcal{H} : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{n-k}(V^*)$ telle que pour tout α, β éléments de $\Lambda^k(V^*)$, on ait

$$\alpha \wedge \mathcal{H}(\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \omega$$

où ω et le produit scalaire $\langle , \rangle$ ont été définit plus haut. Cet opérateur $\mathcal{H}$ s'appelle la *dualité de Hodge*. On note $\mathcal{H}(\beta) = \star\beta$.

Exercice 2.12 a.) On voudrait exprimer l'opérateur de Hodge $\star$ en composantes. Soit donc V et g comme dans l'exercice précédent, et $\{e_i\}$ une base orthonormée directe de V. Alors

$$\star(\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}) = \operatorname{sgn}(\pi)\varepsilon^{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{j_{n-k}}$$

où $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ et π est la permutation de n éléments définie par $\pi(\nu) = i_\nu$ si $\nu \leq k$ et $\pi(\nu) = j_{\nu-k}$ si $\nu > k$.

b.) En déduire que

$$(\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}) \wedge \star(\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}) = \omega.$$

c.) Montrer ensuite les propriétés suivantes de l'opérateur de Hodge :

(1) $\star\omega = 1$, $\star 1 = \omega$.

(2) $\star\star = (-1)^{k(n-k)}$ sur $\Lambda^k(V^*)$, ce qui implique en particulier que $\star$ est bijective.

(3) $\alpha \wedge \star\alpha = \|\alpha\|^2\omega$.

(4) $\langle \alpha, \beta \rangle = (-1)^{k(n-k)} \star ((\star\alpha) \wedge \beta)$ si $\alpha, \beta \in \Lambda^k(V^*)$.

2.7 L'algèbre de Grassman contravariante

Un tenseur contravariant $S \in \mathrm{Tens}_0^k(V)$ est alterné si

$$S(\theta^1, \cdots, \theta^k) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot S(\theta^{\sigma 1}, \cdots, \theta^{\sigma k})$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$. On note $\Lambda^k(V) = \Lambda_k(V^*)$ l'espace des tenseurs contravariants alternés de degré k.

Un élément de $\Lambda^k(V)$ est un *multivecteur* (contravariant) de degré k. Il s'écrit

$$M = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} m^{i_1 \cdots i_k} \cdot v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}.$$

Exercice 2.13 $\Lambda^k(V)$ est le dual de $\Lambda_k(V)$:

$$\Lambda^k(V) = \Lambda_k(V^*) = \Lambda_k(V)^*.$$

Les propriétés de $\Lambda^k(V)$ sont donc similaires à celles de $\Lambda^k(V)$. En particulier :

a) On peut redéfinir Alt : $\mathrm{Tens}_0^k(V) \to \Lambda^k(V)$ et donc un produit extérieur (parfois noté $\vee$).

b) On a alors une algèbre

$$\Lambda^\bullet(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V) = \mathrm{Tens}_0^\bullet(V)/\,(v \otimes v)$$

c) $\dim \Lambda_k(V) = \binom{n}{k}$.

d) Si V est un espace vectoriel réel, une orientation de V peut être définie comme le choix d'une composante connexe de $\Lambda^n(V) \setminus \{0\}$.

e) Si (V, g) est un espace vectoriel euclidien, alors on peut définir un produit scalaire sur $\Lambda^\bullet(V)$.

f) Si (V, g) est un espace vectoriel euclidien orienté, alors on peut définir l'étoile de Hodge

$$\star : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V),$$

et l'isomorphisme $\Lambda^k(V) = \Lambda_k(V)^*$ est donné par les opérateurs musicaux

$$\flat : \Lambda^k(V) \to \Lambda_k(V) \qquad \text{et} \qquad \sharp : \Lambda_k(V) \to \Lambda^k(V).$$

Exercice 2.14 Soit (V, g) un espace vectoriel réel orienté de dimension n muni d'une base $e_1, \cdots, e_n$, et soient $v_1, \cdots, v_n \in V$. Comme $\dim(\Lambda^n(V)) = 1$, on a

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = m \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

i) Que vaut le coefficient m ?

ii) Montrer que $m = 0 \Leftrightarrow$ les v_j sont linéairement indépendants,

iii) $m > 0 \Leftrightarrow v_1, \cdots, v_n$ est une base de même orientation que $e_1, \cdots, e_n$,

iv) $m < 0 \Leftrightarrow v_1, \cdots, v_n$ est une base d'orientation opposée à $e_1, \cdots, e_n$,

v) $|m| = \frac{\mathrm{Vol}[v_1, \cdots, v_n]}{\mathrm{Vol}[e_1, \cdots, e_n]}$.

Exercice 2.15 Soient v et w des éléments de l'espace euclidien orienté V. Montrer que

a.) $\langle v, w \rangle = \star(v \wedge \star(w))$.

b.) Si $\dim(V) = 3$, alors le produit vectoriel de ces vecteurs est donné par

$$v \times w = \star(v \wedge w).$$

2.8 Effet d'une application linéaire (fonctorialité) :

Soit $F : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies sur un même corps. On définit deux applications

$$F_* : \Lambda^k(V) \to \Lambda^k(W) \quad \text{(sens covariant)}$$

et

$$F^* : \Lambda_k(W) \to \Lambda_k(V) \quad \text{(sens contravariant)}$$

par

$$F^*(\eta^1, \cdots, \eta^k) = (\eta^1 \circ F, \cdots, \eta^k \circ F)$$

et

$$F^*\beta(v_1, \cdots, v_k) = \beta(F(v_1), \cdots, F(v_k)).$$

Propriétés 2.12 *a) F_* et F^* sont des homomorphismes d'algèbres :*

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F(\alpha) \wedge F(\beta) \quad \text{et} \quad F_*(M \wedge N) = F_*(M) \wedge F_*(N).$$

b) Si $F : V \to W$ et $G : W \to Z$ sont deux applications linéaires, alors

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : \Lambda^k(V) \to \Lambda^k(Z) \quad \text{et} \quad (G \circ F)^* = F^* \circ G^* : \Lambda^k(Z) \to \Lambda^k(V).$$

Chapitre 3

Calcul différentiel

3.1 Applications différentiables

Il existe plusieurs notions de différentiabilité des applications de plusieurs variables, ces définitions recèlent quelques subtilités.

Definition 3.1 Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Fixons un point $p \in U$ et un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$. La *dérivée directionnelle* de f au point p en direction du vecteur v est par définition la limite suivante (si elle existe).

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(p+tv) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t} \in \mathbb{R}^m. \tag{3.1.1}$$

La *dérivée partielle* en direction de la coordonnées x^i est la dérivée directionnelle de f en direction du $i^{\text{ème}}$ vecteur e_i de la base canonique, on la note

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = df_p(e_i) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+te_i)-f(p)}{t} \in \mathbb{R}^m.$$

Ces définitions simples appellent un certain nombre de remarques : La première chose à relever est (presque) banale : l'existence des dérivées partielles n'entraîne pas l'existence des dérivées directionnelles pour toute direction.

Par exemple la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \sqrt{|xy|} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admet des dérivées partielles nulles à l'origine : $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = 0$. Mais elle n'admet aucune autre dérivée directionnelle :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_1(p+tv)-f_1(p)}{t} \qquad \text{n'existe pas si } v \neq \pm e_1 \text{ ou } \pm e_2.$$

La seconde chose à observer est le caractère homogène de la dérivée directionnelle. Si $df_p(v)$ existe, alors $df_p(\lambda v)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a

$$df_p(\lambda v) = \lambda df_p(v).$$

Toutefois, df_p n'est en général pas additive. Par exemple la fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & \text{si } x \neq -y \\ 0 & \text{si } x = -y \end{cases}$$

possède une dérivée directionnelle en $p = (0,0)$ dans chaque direction. Elle est facile à calculer, on trouve

$$(df_2)_{(0,0)}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{ab}{a+b} & \text{si } a \neq -b \\ 0 & \text{si } a = -b \end{cases}$$

et en particulier df_2 n'est pas linéaire en p.

Definition 3.2 L'application $f : U \to \mathbb{R}^m$ est *différentiable au sens de Gâteau* en $p \in U$ si la dérivée directionnelle de f en p existe pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, et si l'application

$$df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

est linéaire. Cette application $df_p \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ s'appelle la *différentielle* de f en $p = 0$.

Proposition 3.1 *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable au sens de Gâteau en $p \in U$, alors la matrice de df_p dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est la matrice Jacobienne, i.e. la matrice des dérivées partielles :*

$$df = \left(\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x^1}}, \cdots \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x^n}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

La notion de différentiabilité au sens de Gâteau reste une notion très faible. Une fonction différentiable au sens de Gâteau n'est par exemple pas forcément continue. Considérons par exemple la fonction $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y} & \text{si } x^2 \neq -y \\ 0 & \text{si } x^2 = -y \end{cases}$$

On peut vérifier que les dérivées directionnelles de cette fonction en $p = (0,0)$ existent dans toutes les directions et que

$$(df_3)_{(0,0)}(v) = 0$$

pour tout vecteur v. En particulier f est Gâteau-différentiable avec différentielle nulle. Pourtant cette fonction n'est pas continue : si $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ est le chemin $\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{t^2-1})$, alors $f_3(\alpha(t)) = 1$ pour tout t et donc

$$1 = \lim_{t\to 0} f_3(\alpha(t)) \neq 0 = f_3(0,0).$$

La raison qui explique ce phénomène est que la différentielle de Gâteau ne contrôle a priori que le comportement de la fonction f lorsqu'un point se rapproche de p *sur une droite*. Cela justifie l'introduction d'une notion plus fine de différentiabilité :

Definition 3.3 L'application $f : U \to \mathbb{R}^m$ est *différentiable au sens de Fréchet* en $p \in U$ s'il existe une application linéaire $\ell \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - \ell(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{3.1.2}$$

On peut écrire la condition (3.1.2) sous la forme

$$f(p+h) = f(p) + \ell(h) + o(h). \tag{3.1.3}$$

C'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ avec

$$||f(h) - f(p) - \ell(h)|| \leq \epsilon ||h|| \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^n \text{ avec } ||h|| < \delta\,. \tag{3.1.4}$$

Proposition 3.2 *Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable au sens de Fréchet en $p \in U$, alors*

a) f est aussi différentiable au sens de Gâteau et l'application linéaire ℓ de la condition (3.1.2) coincide avec la différentielle :
$$\ell = df_p.$$
En particulier ℓ est unique et sa matrice dans la base canonique est la matrice Jacobienne de f en p.

b) f est continue dans un voisinage de p.

Remarquons que la réciproque de l'affirmation (a) est fausse, ainsi que le montre l'exemple de la fonction f_3.

Proposition 3.3 (Différentielle des fonctions composées) *Soient $f : U \to V$ et $g : V \to W$ deux applications. Si f est Fréchet-différentiable en $p \in U$ et g est Fréchet-différentiable en $q = f(p) \in V$, alors $g \circ f : U \to W$ est Fréchet-différentiable en p et*
$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p.$$

Nous laissons la preuve en exercice. Elle est facile, c'est l'un des avantages de la notion de dérivée au sens de Frechet.

Exercice 3.1 a) Prouver les deux propositions précédentes.

b) Vérifier les affirmations de cette section au sujet des fonctions précédentes f_1, f_2, f_3.

c) Montrer par un exemple que la règle de différentiation des fonctions composées peut être fausse si les applications sont différentiables au sens de Gâteau.

Définition Une application $f =: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite de *classe* C^k $(k = 1, 2, 3...)$ si chaque composantes f^j admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k. Elle est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k. Lorsque l'application est simplement continue, on dit qu'elle est de classe C^0.
On note $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des applications $f =: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^k $(k = 0, 1, 2, 3..., \infty)$, observons que c'est un espace vectoriel sur le corps des réels.
Si $m = 1$, on note simplement $C^k(U) := C^k(U, \mathbb{R})$, comme le produit de deux fonctions de fonctions de classe C^l est un fonction de classe C^k, l'espace $C^k(U)$ est une algèbre et non seulement un espace vectoriel.

Proposition 3.4 *Si $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, alors f est Frechet différentiable en tout point de U.*

3.2 Théorème d'inversion locale

Une application $f =: U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ est de classe C^k si chaque composantes f^j admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k. On dit que f est un *difféomorphisme* de classe C^k si elle est de classe C^k, bijective et si son inverse est aussi de classe C^k.

Exercice 3.2 Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ est un difféomorphisme C^1, alors $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est un isomorphisme pour tout $p \in U$. En particulier $n = m$.

Remarque Un théorème de Brouwer dit que s'il existe un homéomorphisme $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ entre deux ouverts non vides, alors $n = m$. La dimension est donc une notion invariante par homéomorphisme. Ce théorème est difficile, mais l'invariance de la dimension par difféomorphisme est (presque) élémentaire.

Théorème 3.5 (Théorème d'inversion locale) *Soit $f : U \to V$ une application de classe C^1 entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si $J_f(p) = \det df_p \neq 0$, alors f est localement inversible au voisinage de p. Plus précisément, il existe des voisinages $U' \subset U$ de p et $V' \subset V$ de $q = f(p)$ tels que la restriction de f à U' définisse un difféomorphisme $f : U' \to V'$.*

Théorème 3.6 (Théorème des fonctions implicites) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^k$ une application de classe C^1 où $k < n$. On suppose que la matrice de taille $k \times k$ définie au point $p \in U$ par*

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)\right)_{1 \le i,j \le k,\ (n-k) \le j \le n} \tag{*}$$

est inversible. Alors il existe un voisinage de p de la forme $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ et une application $g : U_1 \to U_2$ de classe C^1 telle que $f(x_1, x_2) = q$ (où $q \in \mathbb{R}^k$ est le point $q = f(p)$) avec $x_1 \in U_1$ et $x_2 \in U_2$ si et seulement si $x_2 = g(x_1)$.

Interprétation géométrique : Sous l'hypothèse (*), les solutions de l'équation (implicite) $f(x) = q$ qui sont proches de p sont données (explicitement) par le graphe de g.
Considérons le cas particulier d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, Alors $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application linéaire, c'est donc un covecteur $df_p \in (\mathbb{R}^n)^*$. Rappelons qu'il est défini par

$$df_p(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p + tv).$$

En particulier, on a $df_p(e_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(p)$. Ainsi, par linéarité

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,\varepsilon^i.$$

Lorsque f est la i-ème fonction de coordonnées x^i, on obtient

$$dx^i_p = \varepsilon^i,$$

Pour tout p, on peut donc écrire

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot dx^i_p.$$

3.3 Dérivations ponctuelles

Fixons U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in U$.

Definition 3.4 Une *dérivation ponctuelle* en p définie sur U est une application

$$X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$$

telle que

a) X est $\mathbb{R}$-linéaire : $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $f, g \in C^\infty(U)$.

b) X vérifie la règle de Leibniz :

$$X(f \cdot g) = f(p) \cdot X(g) + X(f) \cdot g(p).$$

On note $\mathcal{D}_p(U)$ l'ensemble des dérivations ponctuelles en p définie sur U. Observons que c'est un espace vectoriel.

Lemme 3.7 *Si f est constante, alors $X(f) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{D}_p(U)$.*

Preuve Pour $f \equiv 1$, on a

$$X(1) = X(1 \cdot 1) = 1 \cdot X(1) + 1 \cdot X(1) = 2 \cdot X(1),$$

donc $X(1) = 0$. Si $f \equiv c$ (où c est constante), alors $X(f) = X(c) = c \cdot X(1) = 0$.

□

Proposition 3.8 (localité des dérivations) *Si $f = g$ dans un voisinage de p, alors $X(f) = X(g)$ pour toute dérivation $X \in \mathcal{D}_p(U)$ et toutes fonctions $f, g \in C^\infty(U)$.*

Nous admettrons cette proposition dont la preuve demande un peu de travail technique.

A tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, on associe une dérivation $\partial_v \in \mathcal{D}_p(U)$ définie par

$$\partial_v(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p + tv) = df_p(v).$$

Théorème 3.9 *Cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$\begin{array}{rcl} \partial : \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{D}_p(U). \\ v & \mapsto & \partial_v \end{array}$$

$$\partial : \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}_p(U).$$

Remarque 3.5 a) Observons qu'aucun choix n'intervient dans la définition de cet isomorphisme, il est donc canonique.
b) Ce résultat est en fait assez surprenant, a priori il n'est même pas clair que $\mathcal{D}_p(U)$ est de dimension finie.

Le preuve du théorème précédent repose sur le lemme suivant

Lemme 3.10 (Lemme de Hadamard) *Soit $U \in \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $p = (p^1, \dots, p^n) \in U$. Toute fonction $f \in C^k(U)$ peut s'écrire sous la forme*

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) \cdot g_i(x),$$

où $g_i \in C^{k-1}(U)$ et $g_i(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.

Preuve On a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \int_0^1 \frac{df}{dt}(p + t(x-p))\, dt \\ &= f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))\, dt. \end{aligned}$$

On pose donc $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))\, dt$ et la preuve est complète.

□

Preuve du théorème Par la proposition 3.8, on peut se ramener au cas où U est un domaine convexe (par exemple une boule centrée en p). Par le lemme de Hadamard, on a pour tout $f \in C^\infty(U)$

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} X\left((x^i - p^i) \cdot g_i(x)\right)$$

Comme $f(p)$ est constante, on a $X(f(p)) = 0$. D'autre part, $g_i \in C^\infty(U)$ et $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$, on a donc par la règle de Leibniz

$$X(f) = \underbrace{X(f(p))}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} X\left((x^i - p^i)\right) \cdot g_i(p) + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(p^i - p^i)}_{=0} \cdot X\left(g_i(p)\right).$$

Posons $a^i = X(x^i) = X\left((x^i - p^i)\right)$, alors on a

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} a^i \cdot g_i(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i \partial_{e_i}(f).$$

On a donc montré que toute dérivation $X \in \mathcal{D}_p(U)$ s'écrit

$$X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

(avec $a^i = X(x^i)$). Par conséquent $X = \partial_v$ avec $v = a^i e_i$. Ainsi $\partial : \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}_p(U)$ est surjective et donc bijective.

$\square$

Nous pouvons résumer nos résultats par les formules :

$$\epsilon^i = dx^i, \qquad e_j = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

La deuxième formule sous-entend qu'on a identifié $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{D}_p(U)$ via l'isomorphisme canonique ∂.

Exercice 3.3 Si $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $\theta = dh$, alors

$$\theta(X) = \langle \theta, X \rangle = X(h) = a^i \frac{\partial h}{\partial x^i}$$

$$dh(X) = X(h).$$

En particulier

$$\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_i^j$$

3.4 Champs de vecteurs et dérivations globales

Definition 3.6 Un *champ de vecteur de classe C^k* sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ est la donnée pour tout point $p \in U$ d'un vecteur $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ qui dépend de façon C^k du point p :

$$\mathbf{v}_p = a^i(p) \cdot \mathbf{e}_i,$$

avec $a^i \in C^k(U)$.

Remarque On peut bien sûr voir le champ de vecteur comme une application C^k définie sur l'ouvert U et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{v} : U \to \mathbb{R}^n.$$

mais il est important d'interpréter l'image $\mathbf{v}_p$ comme un vecteur et non un point.

Lemme 3.11 *L'ensemble des champs de vecteurs C^k sur U forme un module sur l'algèbre $C^k(U)$.*

La preuve de ce lemme est évidente.

Lorsque $k = \infty$, on note $\Gamma(U) = \mathcal{X}(U)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur U de classe C^∞. C'est un module sur l'algèbre $C^\infty(U)$.

Definition 3.7 Une *dérivation globale* sur l'ouvert U est une application

$$X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$$

telle que

a) X est $\mathbb{R}$-linéaire : $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $f, g \in C^\infty(U)$.

b) X vérifie la règle de Leibniz :

$$X(f \cdot g) = f \cdot X(g) + X(f) \cdot g.$$

On note $\mathcal{D}(U)$ l'ensemble des dérivations globales sur U. C'est un $C^\infty(U)$-module.

A tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in \Gamma(U)$, on associe la dérivation globale $\partial_\mathbf{v} \in \mathcal{D}(U)$ définie par

$$\partial_\mathbf{v} f(p) = \partial_{\mathbf{v}(p)}(f) = df_p(\mathbf{v}(p)).$$

Proposition 3.12 *Cette opération définit un isomorphisme de $C^\infty(U)$-modules*

$$\partial : \Gamma(U) \to \mathcal{D}(U).$$

La preuve ne fait que reprendre les arguments précédents. En particulier, toute dérivation globale X s'écrit

$$X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

où $a^i = X(x^i) \in C^\infty(U)$.

Cette isomorphisme est canonique. On identifiera donc en général les espaces $\Gamma(U)$ et $\mathcal{D}(U)$, et les mots "champs de vecteurs" et "dérivations globales" seront interchangeables.

3.5 Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs

Definition 3.8 Soit $X, Y \in \Gamma(U)$. On note $[X, Y]$ l'opérateur différentiel

$$[X, Y] = XY - YX$$

Interprétation : X et Y sont des champs de vecteurs, et donc des opérateurs différentiels purement d'ordre 1. Ainsi, $[X, Y]$ est aussi un opérateur différentiel. A priori c'est un opérateur différentiel d'ordre 2.

Lemme 3.13 *Le crochet* $[X, Y]$ *est un opérateur différentiel d'ordre* 1 *(et donc c'est un nouveau champ de vecteurs).*

Preuve Cela découle du lemme de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^j \partial x^i},$$

Il est facile de trouver la formule donnant le crochet de deux champs de vecteurs : si $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, alors

$$\begin{aligned} X(Y(h)) &= X\left(b^j \frac{\partial h}{\partial x^j}\right) \\ &= a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(b^j \frac{\partial h}{\partial x^j}\right) \\ &= a^i b^j \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j} \end{aligned}$$

De même,

$$X(Y(h)) = b^i a^j \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} + b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j}$$

Ainsi,

$$[X, Y] = \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

Exemple 3.9 Si $X = y\frac{\partial}{\partial x} - \cos(x)\frac{\partial}{\partial y}$ et $Y = x\frac{\partial}{\partial x}$, alors

$$\begin{aligned} [X, Y] &= XY - YX \\ &= X(x)\frac{\partial}{\partial x} - Y(y)\frac{\partial}{\partial x} - Y(\cos(x))\frac{\partial}{\partial y} \\ &= y\frac{\partial}{\partial x} + x\sin(x)\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Exercice 3.4 Le crochet $[\cdot, \cdot] : \Gamma(U) \times \Gamma(U) \to \Gamma(U)$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) $[\cdot, \cdot]$ est $\mathbb{R}-$bilinéaire,

(b) $[X, Y] = -[Y, X]$

(c) On a *l'identité de Jacobi* :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Definition 3.10 Un espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni d'une opération interne $[\cdot, \cdot]$ vérifiant les conditions $(a) - (c)$ est une *algèbre de Lie*. Elles ne sont pas associatives et unitaires en géneral.

Exemples 3.11 i) $\Gamma(U)$ est une algèbre de Lie (de dimension infinie).

ii) $M_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie pour le crochet donné par $[A, B] = AB - BA$.

iii) $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel $\times$.

Chapitre 4

Les champs de tenseurs sur un domaine de $\mathbb{R}^n$

4.1 Domaines et coordonnées

Définitions Un *domaine* de dimension n est un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ qui est ouvert, non vide et connexe.
Un *système de coordonnées* sur le domaine U est la donnée de n fonctions $x^1, x^2, \ldots, x^n \in C^\infty(U)$ telles que l'application

$$\begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R}^n \\ p & \to & (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p)) \end{array}$$

est un difféomorphisme sur son image.

Remarques

a) Par le théorème d'inversion locale, il suffit de vérifier que cette application est injective et que son jacobien est non nul en tout point p de U.

b) Il n'y a *a priori* pas de système de coordonnées privilégiés, ils sont tous équivalents. Ceci entraîne par exemple qu'on ne parlera pas de "fonction linéaire" sur un domaine U (car une fonction qui est linéaire dans un système de coordonnées ne le sera en général plus dans un autre).

c) Un élément p du domaine U s'appellera un *point* et non un vecteur.

Si $x^1, x^2, \ldots, x^n$ et $y^1, y^2, \ldots, y^n$ sont deux systèmes de coordonnées sur U, d'image respectivement U' et U'', alors le changement de coordonnées se décrit par un difféomorphisme

$$y^j = y^j(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

de U' vers U''.

4.2 Champ de tenseurs

Un *champ de tenseurs* de type $\binom{q}{p}$ sur le domaine U de dimension n est une application

$$T : U \to \mathrm{Tens}_p^q(\mathbb{R}^n).$$

On suppose en général que cette application est différentiable de classe C^∞ (ou tout au moins de classe C^k pour un certain $k \geq 1$).

Remarque On note en général T_x (et non $T(x)$) la valeur du champ T au point $x \in U$, ainsi le champ T est la donnée pour tout point x d'un tenseur $T_x \in \mathrm{Tens}_p^q(\mathbb{R}^n)$.

Certains champs de tenseurs portent des noms particuliers :

- Un *champ scalaire*, i.e. un champ de type $\binom{0}{0}$, est simplement une *fonction*.
- Un *champ de vecteurs* est un champ de tenseurs contravariant de degré 1.
- Une *forme différentielle* de degré k sur U est un champ ω de tenseurs covariants de degré k tel que ω_x est alterné en tout point $x \in U$ (donc ω est une fonction $\omega : U \to \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$).
- Un *champ de covecteurs* est un champ de tenseurs covariant de degré 1, c'est donc une forme différentielle de degré 1.

L'ensemble des champs de tenseurs de type $\binom{q}{p}$ sur le domaine $U \subset \mathbb{R}^n$ se note

$$\mathrm{Tens}_p^q(U),$$

avec les cas particuliers suivants :

- $\mathrm{Tens}_0^0(U)$ se note $C^\infty(U)$. C'est l'algèbre des fonctions indéfiniments différentiables sur U.
- L'ensemble $\mathrm{Tens}_0^1(U)$ des champs de vecteurs se note $\mathcal{X}(U)$ ou $\Gamma(U)$.
- L'ensemble $\mathrm{Tens}_1^0(U)$ des champs de covecteurs se note $\Omega^1(U)$ ou $\mathcal{A}^1(U)$.
- Et l'ensemble des formes différentielles de degré k se note $\Omega^k(U)$ ou $\mathcal{A}^k(U)$.

Remarques

- $C^\infty(U)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$ (de dimension infinie).
- $\mathrm{Tens}_p^q(U)$ est un module sur cette algèbre.
- $\Gamma(U)$ est une algèbre de Lie (pour le crochet des champs de vecteurs).

Remarquons aussi que le produit tensoriel est bien défini (point par point) pour les champs de tenseurs, en particulier

$$\mathrm{Tens}(U) = \oplus_{p,q} \mathrm{Tens}_p^q(U)$$

admet une structure d'algèbre. Cette algèbre contient deux sous-algèbres importantes $\mathrm{Tens}_\bullet^0(U)$ et $\mathrm{Tens}_0^\bullet(U)$ formées respectivement par les champs de tenseurs covariants et contravariants. De plus on a

$$\mathrm{Tens}(U) = \mathrm{Tens}_\bullet^0(U) \otimes \mathrm{Tens}_0^\bullet(U).$$

On peut aussi définir le produit extérieur des formes différentielles, ce qui donne une structure d'algèbre sur

$$\Omega^\bullet(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U).$$

Notons enfin que la contraction est une opération bien définie

$$C : \mathrm{Tens}_{p+1}^{q+1}(U) \to \mathrm{Tens}_p^q(U).$$

Comme cas particulier, on a le produit intérieur d'une forme différentielle par un champ de vecteurs

$$\iota : \Gamma(U) \times \Omega^{k+1}(U) \to \Omega^k(U).$$

Rappelons que si $\omega \in \Omega^{k+1}(U)$ et $v \in \Gamma(U)$, alors $\iota_v\omega \in \Omega^k(U)$ est le k-forme définie par

$$\iota_v\omega(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \omega(v, v_1, v_2, \ldots, v_k).$$

4.3 Champ de tenseurs et difféomorphismes

A tout difféomorphisme $f : U \to V$ on peut associer des applications linéaires

$$f_* : \mathrm{Tens}(U) \to \mathrm{Tens}(V) \qquad \text{et} \qquad f^* : \mathrm{Tens}(V) \to \mathrm{Tens}(U),$$

par les formules évidentes

$$(f_*T)_y = (df_x)_*(T_x) \qquad \text{et} \qquad (f^*S)_x = (df_x)^*(S_y)$$

où $x \in U$ et $y \in V$ sont deux points tels que $y = f(x)$ et $T \in \mathrm{Tens}(U)$, $S \in \mathrm{Tens}(V)$.
Voyons quelques exemples : Si $h \in C^\infty(V)$ est un scalaire (une fonction) sur V, alors

$$f^*h = h \circ f \in C^\infty(U)$$

est un scalaire sur U. Si $X \in \Gamma(U)$ est un champ de vecteurs sur U, alors

$$(f_*X)_y = (df_x)_*(X_{f^{-1}(y)})$$

définit un champ de vecteurs sur V. On peut voir ce champ comme une dérivation : si $h \in C^\infty(V)$, alors

$$(f_*X)(h) = X(h \circ f^{-1}).$$

Finalement, si $\omega \in \Omega^k(V)$, alors $f^*(\omega) \in \Omega^k(U)$ est la forme différentielle sur U définie par

$$f^*(\omega)_x(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(x)}(df_x(v_1), \dots, df_x(v_k)).$$

Remarque Les champs de tenseurs covariants définissent un foncteurs (contravariant) $\mathrm{Tens}^0_\bullet(U)$ de la catégorie des domaines vers celle des algèbres. On peut en effet définir l'opération $f^* : \mathrm{Tens}^0_\bullet(V) \to \mathrm{Tens}^0_\bullet(U)$ pour toute application (inversible ou non) $f : U \to V$ de classe C^∞ entre deux domaines par

$$(f^*S)_x(v_1, \dots, v_k) = (df_x)^*(S_y)(v_1, \dots, v_k) = S(df_x(v_1), \dots, df_x(v_k)).$$

Ca n'est pas le cas des champs de tenseurs contravariants. Il est impossible de définir une application $f_* : \mathrm{Tens}^0_\bullet(U) \to \mathrm{Tens}^0_\bullet(V)$ si $f : U \to V$ n'est pas inversible.

4.4 Composantes d'un champ de tenseurs

Soit $T \in \mathrm{Tens}^\ell_k(U)$ un champ de tenseurs mixte sur U. En coordonnées $x^1, x^2, \dots, x^n$, ce champ s'écrit

$$T_x = T^{j_1\cdots j_\ell}_{i_1\cdots i_k}(x)\, \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_\ell}.$$

en utilisant les identifications $e_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$, et $\varepsilon^i = dx^i$ vues au chapitre précédent, on a

$$T_x = T^{j_1\cdots j_\ell}_{i_1\cdots i_k}(x)\, dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}}. \tag{4.4.1}$$

où les $T^{j_1\cdots j_\ell}_{i_1\cdots i_k}(x)$ sont des fonctions C^∞ sur U, on les appelles les *composantes* du tenseurs et elles sont données par

$$\begin{aligned} T^{j_1\cdots j_\ell}_{i_1\cdots i_k}(x) &= T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, \varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_\ell},) \\ &= T(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_\ell},). \end{aligned}$$

Proposition 4.1 *Pour tout champ $T \in \mathrm{Tens}^{\ell}_{k}(U)$, on a une application*

$$T : \underbrace{\Gamma(U) \times \cdot \times \Gamma(U)}_{k} \times \underbrace{\Omega^1(U) \times \cdot \times \Omega^1(U)}_{\ell} \to C^{\infty}(U) \tag{4.4.2}$$

définie ainsi : si $X_1, \cdots X_k \in \Gamma(U)$ sont des champs de vecteurs et $\theta^1, \cdots \theta^{\ell} \in \Omega^1(U)$ sont des champs de covecteurs, alors la fonction associée est donnée par

$$x \to T_x(X_1(x), \cdots X_k(x), \theta^1(x), \cdots \theta^{\ell}(x)).$$

A) Cette application est $C^{\infty}(U)$-multilinéaire, i.e.

$$T(\cdots, fX'_j + gX''_j, \cdots) = fT(\cdots, X'_j \cdots) + gT(\cdots, X''_j, \cdots)$$

et

$$T(\cdots\cdot, f\theta'\mu + g\theta''^{\mu} \cdots) = fT(\cdots, \theta'^{\mu} \cdots) + gT(\cdots, \theta''^{\mu}, \cdots)$$

pour tout $f, g \in C^{\infty}(U)$.
B) Toute application $C^{\infty}(U)$-multilinéaire du type (4.4.2) provient d'un champ de tenseurs.

Exercice 4.1 Prouver cette proposition.

4.5 Changement de coordonnées et champs de tenseurs

Soit U un domaine de dimension n et $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$ deux systèmes de coordonnées sur ce domaine. Un champ $T \in \mathrm{Tens}^{\ell}_{k}(U)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} T &= T^{j_1 \cdots j_\ell}_{i_1 \cdots i_k}(x)\, dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_\ell}} \\ &= \tilde{T}^{\nu_1 \cdots \nu_l}_{\mu_1 \cdots \mu_k}(y) dy^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dy^{\mu_k} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\nu_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial y^{\nu_\ell}}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^{\mu}} dy^{\mu}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^{\nu}}$$

et la multilinéarité du produit tensoriel, on trouve que

$$\tilde{T}^{\nu_1 \cdots \nu_l}_{\mu_1 \cdots \mu_k}(y) = T^{j_1 \cdots j_\ell}_{i_1 \cdots i_k}(x) \cdot \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{\mu_k}} \cdot \frac{\partial y^{\nu_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{\nu_l}}{\partial x^{j_l}} \tag{4.5.1}$$

Cs formules nous conduisent à la seconde définition des champs de tenseurs, c'est la définition classique des champs de tenseurs :

Definition 4.1 (définition classique des champs de tenseurs) Un *champ de tenseurs* de type $\binom{\ell}{k}$ sur un ouvert U est la donnée pour tout système de coordonnées $x^1, \cdots, x^n$ d'un système de n^{k+l} fonctions C^{∞}

$$T^{j_1 \cdots j_\ell}_{i_1 \cdots i_k}(x)$$

tel que si $y^1, \cdots, y^n$ est un autre système de coordonnées alors les formules de changement de coordonnées sont données par (4.5.1).

Comme première application, on peut redémontrer qu'un opérateur différentiel d'ordre 1 (c'est-à-dire une application $L : C^{\infty}(U) \to C^{\infty}(U)$ définie par $L(h)(x) = \sum_i a^i(x) \frac{\partial h}{\partial x^i}$) est un champs de vecteurs[1] :

1. Bien sûr, on le sait déjà puisque un tel opérateur est une dérivation et donc un champ de vecteurs.

Proposition 4.2 *Tout opérateur différentiel linéaire d'ordre* 1 *est un champs de vecteurs, i.e. un champ de* 1*-tenseurs contravariants.*

Demonstration Ecrivons $L(h)(x) = a^i(x)\dfrac{\partial h}{\partial x^i}(x)$. Soit $y^1, \cdots, y^n$ un autre système de coordonnées. Si $y = f(x)$, alors

$$L(h \circ f^{-1})(y) = a^i(f^{-1}(y))\frac{\partial y^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial y^\mu}.$$

Ce qui signifie que $L(h \circ f^{-1})(y) = \tilde{a}^\mu(y)\frac{\partial}{\partial y^\mu}$ avec

$$\tilde{a}^\mu(y) = a^i(x)\frac{\partial y^\mu}{\partial x^i}$$

□

Voyons maintenant un contre-exemple : Si $h \in C^\infty(U)$ est une fonction, alors

$$h_{ij}(x) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j}$$

ne définit *pas* un champ de tenseurs. En effet, si $y^1, \cdots, y^n$ un autre système de coordonnées, avec $y = f(x)$ et si $\tilde{h} = h \circ f^{-1}$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^\mu \partial y^\nu} &= \frac{\partial}{\partial y^\mu}\left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial y^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial y^\mu}\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^\nu}\frac{\partial h}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{\partial x^j}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\left(\frac{\partial h}{\partial x^j}\right) + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\mu y^\nu} \cdot \frac{\partial h}{\partial x^j} \\
&= \frac{\partial x^j}{\partial y^\nu}\frac{\partial x^i}{\partial y^\mu}\frac{\partial^2 h}{\partial x^i x^j} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\mu y^\nu} \cdot \frac{\partial h}{\partial x^j}
\end{aligned}$$

donc

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(y) = h_{ij}(x) \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^\nu}\frac{\partial x^i}{\partial y^\mu} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\mu y^\nu} \cdot \frac{\partial h}{\partial x^j}$$

Le second terme de cette somme montre le caractère non tensoriel de h_{ij}.

Remarque 4.2 D'une manière générale, si $T \in \mathrm{Tens}(U)$, alors $\frac{\partial T}{\partial x^i}$ n'est pas un champ de tenseurs indépendant des coordonnées au sens de la définition classique.

4.6 Appendice : Le théorème du redressement des champs de vecteurs

Définition On dit que deux tenseurs $T \in \mathrm{Tens}(U)$ et $S \in \mathrm{Tens}(V)$ sont C^k*-équivalents* s'il existe un difféomorphisme $f : U \to V$ de classe C^{k+1} tel que $f_*(T) = S$.
On dit que T et S sont *localement équivalents* au voisinage de points $x_0 \in U$ et $y_0 \in V$ s'il existe un difféomorphisme local f tel que $f(x_0) = y_0$ et $f_*(T) = S$ au voisinage de x_0.

Théorème 4.3 (Théorème du redressement des champs de vecteurs) *Soit* $v \in \Gamma(U)$ *un champ de vecteurs de classe* C^1 *tel que* $v(x_0) \neq 0$. *Alors* v *est localement équivalent au champ constant* $\mathbf{e}_1$ *au voisinage de* x_0.

Démonstration Quitte à faire un changement affine de coordonnées, on peut supposer que $x_0 = 0$ et que $v_0 = v_{x_0} = \mathbf{e}_1$.
On définit un nouveau champ de vecteurs en intégrant le champ v la long de la première coordonnées :

$$w(x) = w(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \int_0^{x^1} v(t, x^2, \ldots, x^n) dt.$$

Observons que w est de classe C^1 et

$$\frac{\partial w}{\partial x^1}(0) = v(0) = \mathbf{e_1},$$

et que si $j \neq 0$, alors $\frac{\partial w}{\partial x^j}(x) = \int_0^{x^1} \frac{\partial v}{\partial x^j}(t, x^2, \ldots, x^n) dt$, en particulier

$$\frac{\partial w}{\partial x^j}(0) = 0$$

pour tout $j \neq 0$.
Définissons maintenant une application g au voisinage de 0 à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} g(x) &:= x + (w(x) - x^1 \mathbf{e_1}) \\ &= w(x) + \sum_{j=2}^{n} x^j \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Nous avons pour tout x dans ce voisinage

$$dg(\mathbf{e_1}) = \frac{\partial g}{\partial x^1} = \frac{\partial w}{\partial x^1} = v.$$

Il suffit donc de montrer que g est un difféomorphisme dans un voisinage de $x_0 = 0$; calculons pour cela la matrice Jacobienne de g en 0. On a

$$\frac{\partial g}{\partial x^1}(0) = v(0) = \mathbf{e}_1,$$

et pour $j \neq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x^j}(0) &:= \frac{\partial x}{\partial x^j} + \frac{\partial w}{\partial x^j} \\ &= \mathbf{e}_j + \frac{\partial w}{\partial x^j}(0) \\ &= \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Donc la matrice Jacobienne de g en 0 est la matrice identité et le théorème des fonctions implicites entraîne que g est un difféomorphisme dans un voisinage de 0.

$\square$

Chapitre 5

Les formes différentielles

5.1 La différentielle extérieure des formes différentielles

Soit U un domaine de $\mathbb{R}^n$. On note $\Omega^k(U) \subset \mathrm{Tens}_k^0(U)$ l'espace des formes différentielles de degré k sur U, et $\Omega^\bullet(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$. Tout élément $\omega \in \Omega^k(U)$ s'écrit de façon unique (dans un système de coordonnées $x^1, \cdots, x^n$) :

$$\omega_x = \sum_I a_I(x) dx^I, \quad a_I \in C^\infty(U)$$

où la somme porte sur les multi-indices ordonnés $I = i_1 \cdots i_k$ (on note pour abréger $dx^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$).

Definition 5.1 (Différentielle extérieure) La différentielle extérieure de $\omega = \sum_I a_I dx^I$ est la $(k+1)$-forme différentielle $d\omega \in \Omega^{k+1}$ donnée par

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx^I$$

Exemples 5.2

1. Si $h \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$, alors $dh = \frac{\partial h}{\partial x^i} dx^i$ = différentielle usuelle.
2. Si $\omega = Adx + Bdy + Cdz$, alors

$$\begin{aligned}
d\omega &= dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz\right) \wedge dx + \\
&+ \left(\frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz\right) \wedge dy + \\
&+ \left(\frac{\partial C}{\partial x} dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy + \frac{\partial C}{\partial z} dz\right) \wedge dz \\
&= \frac{\partial A}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial A}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial B}{\partial z} dy \wedge dz - \frac{\partial C}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial C}{\partial y} dy \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy - \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\
&= \text{“rotationnel”}
\end{aligned}$$

3. Si $\theta = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, alors $d\theta = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$ (divergence)

Proposition 5.1 *La différentielle extérieure admet la caractérisation suivante :*

(A) L'opérateur d vérifie les 4 propriétés suivantes :

1.) $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ est $\mathbb{R}-$linéaire.

2.) Si $h \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$, alors dh est la différentielle ordinaire de h.

3.) Si $\alpha \in \Omega^k(U), \beta \in \Omega^l(U)$, alors

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$$

4.) $d \circ d = 0$

(B) Tout opérateur $Q : \Omega^\bullet(U) \to \Omega^\bullet(U)$ vérifiant ces quatre propriétés coïncide avec d.

Preuve

(A) Les propriétés (1) et (2) sont immédiates à partir de la définition. Montrons (3) : supposons que $\alpha = a_I dx^I, \beta = b_J dx^J, I = i_1 \cdots i_k$. On a

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d\left(a_I b_J dx^I \wedge dx^J\right) \\ &= \left(b_J da_I \wedge dx^I \wedge dx^J + a_I db_J \wedge dx^I \wedge dx^J\right) \\ &= \left(da_I \wedge dx^I\right) \wedge \left(b_J dx^J\right) + (-1)^k a_I dx^I \wedge \left(db_J \wedge dx^J\right) \\ &= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

Montrons maintenant (4). Soit $\alpha = a dx^I$. On a $d\alpha = da \wedge dx^I = \frac{\partial a}{dx^i} dx^i \wedge dx^I$.

$$\begin{aligned} d^2\alpha &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I \\ &= \sum_{j<i} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^i \partial x^j}\right) dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I \\ &= 0 \end{aligned}$$

Moralité : $d \circ d = 0$ car $\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$, mais $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$.

(B) Soit $Q : \Omega^\bullet(U) \to \Omega^\bullet(U)$ un opérateur vérifiant les propriétés $(1) - (4)$. Alors on observe que

- $Q(x^i) = dx^i$, car $x^i \in \Omega^0(U)$
- $Q(dx^i) = Q(Qx^i) = 0$
- $Q(dx^i \wedge dx^j) = Q(dx^i) \wedge dx^j - dx^i \wedge Q(dx^i) = 0$
- Par induction, $Q(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0$.

Par conséquent nous avons

$$\begin{aligned} Q(adx^I) &= Q(a) \wedge dx^I + aQ(dx^I) \\ &= da \wedge dx^I = d(a^I dx^I) \end{aligned}$$

□

Definition 5.3 On dit qu'une forme différentielle $\omega \in \Omega^\bullet(U)$ est *fermée* si $d\omega = 0$. On dit qu'elle est *exacte* s'il existe $\theta \in \Omega^\bullet(U)$ telle que $d\theta = \omega$. On dit alors que θ est une *primitive* ou un *potentiel* de ω.

Observons que toute forme exacte est fermée. En effet, si ω est exacte, alors $\omega = d\theta$ pour un certain θ et donc $d\omega = d \circ d\theta = 0$.

Exemple 5.4 La forme $\alpha = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ est fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Cela peut se vérifier par un calcul direct, mais on peut aussi remarquer que si (r, θ) sont les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$. Alors $\alpha = d\theta$ et donc $d\alpha = d \circ d\theta = 0$.

(mais la forme α n'est pas une forme exacte sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La formule $\alpha = d\theta$ est locale).

Exercices : Si α et β sont fermées, alors $\alpha \wedge \beta$ aussi. Si α est exacte et β est fermée, alors $\alpha \wedge \beta$ est exacte.

5.2 Rappel d'une forme différentielle

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ sont deux ouverts et $\alpha \in \Omega^k(V)$, alors on défini $f^*(\alpha) \in \Omega^k(U)$ par

$$f^*(\alpha)_x(w_1, w_2, \cdots, w_k) = \alpha_{f(x)}(df_x(w_1), df_x(w_2), \cdots, df_x(w_k)).$$

La forme $f^*(\alpha)$ s'appelle le *rappel* par f de α.

Proposition 5.2 *Le rappel vérifie les propriétés suivantes :*
1.) Si $h \in C^\infty(V) = \Omega^0(V)$, alors $f^*h = h \circ f$;
2.) $f^* : \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U)$ est linéaire ;
3.) $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) f^*(\beta)$.

Preuve : Facile.

Lemme 5.3 *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ sont des ouverts et $f : U \to V$ une application différentiable, alors $f^* : \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U)$ est donnée par la formule suivante : si*

$$\alpha_y = a(y)\, dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k} \in \Omega^k(V),$$

alors

$$f^*(\alpha)_x = a(f(x)) \cdot df^{j_1} \wedge \cdots \wedge df^{j_k}.$$

Théorème 5.4 (Naturalité de d) *Si $f : U \to V$ est une application différentiable, alors $f^* : \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U)$ commute avec d :*

$$f^* d\alpha = d f^* \alpha \quad \forall \alpha \in \Omega^\bullet(V).$$

Corollaire 5.5 *La formule définissant la différentielle d est indépendante du système de coordonnées.*

Preuve Rappelons que $f^* : \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U)$ est $\mathbb{R}-$linéaire et vérifie $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$ (c'est un homomorphisme d'algèbres). De plus, si h est une $0-$forme, alors

$$f^* dh = d(f^* h).$$

Notons $x^1, \cdots, x^n$ des coordonnées sur U, $y^1, \cdots y^m$ des coordonnées sur V, et $f = \left(f^1, \cdots, f^m\right)$ (donc $y^j = f^j(x^1, \cdots, x^n)$). On a

$$f^* dy^j = df^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i.$$

En particulier, $f^* dy^j$ est une forme fermée : $df^* dy^j = d \circ df^j = 0$. Donc

$$f^* \left(dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}\right) = df^{j_1} \wedge \cdots \wedge df^{j_k}$$

est fermée. Si $\alpha = a dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_1}$, alors $d\alpha = da \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^* d\alpha &= f^* da \wedge f^* dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge f^* dy^{j_1} \\ &= d\left(a \circ f\right) \wedge df^{j_1} \wedge \cdots \wedge df^{j_k} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} d\left(f^* \alpha\right) &= df^* \left(a dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_1}\right) \\ &= d\left(a \circ f\right) \wedge df^{j_1} \wedge \cdots \wedge df^{j_k} \end{aligned}$$

□

5.3 Intégration des formes différentielles

Soit $\alpha \in \Omega^n(U)$ une $n-$forme différentielle sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$, en tout point x de U, on a

$$\alpha_x = a(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

où $a \in C^\infty(U)$.

Definition 5.5 L'intégrale de α sur un compact $K \subset U$ est l'intégrale (au sens de Riemann ou de Lebesgue) de la fonction a sur K

$$\int_K \alpha := \int_K a(x) dx^1 dx^2 \cdots dx^n.$$

Proposition 5.6 *Si $f : V \to U$ est un difféomorphisme entre deux ouverts connexes et $\alpha \in \Omega^n(U)$, alors*

$$\int_{f^{-1}(K)} f^* \alpha = \begin{cases} +\displaystyle\int_K \alpha & \textit{si } f \textit{ préserve l'orientation} \\ -\displaystyle\int_K \alpha & \textit{si } f \textit{ renverse l'orientation} \end{cases}$$

Preuve Soient $y^1, \cdots, y^n$ les coordonnées sur V, et $x^i = f^i(y^1, \cdots, y^n)$. On a donc $dx^i = df^i = \frac{\partial f^i}{\partial y^j} dy^j$, et par la formule du déterminant :

$$\begin{aligned} f^* \left(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\right) &= df^1 \wedge \cdots \wedge df^n \\ &= \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j}\right) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \\ &= J_f(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{f^{-1}(K)} f^*\alpha &= \int_{f^{-1}(K)} (a\circ f)\, f^*\left(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\right)\\
&= \int_{f^{-1}(K)} (a\circ f)\, J_f(y) dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n\\
&= \pm\int_{f^{-1}(K)} (a\circ f)\, |J_f(y)|\, dy^1\cdots dy^n\\
&= \pm\int_K a(x) dx^1\cdots dx^n\\
&= \pm\int_K \alpha
\end{aligned}$$

□

Definition 5.6 a) Une *forme volume* sur $U\subset\mathbb{R}^n$ est une forme $\omega\in\Omega^n(U)$ telle que pour tout point $x\in U$ et pour toute base $\{v_1,\cdots,v_n\}$ d'orientation positive, on a $\omega_x(v_1,\cdots,v_n)>0$

b) Sur $\mathbb{R}^n$, la *forme volume standard* est $\omega=\omega_0=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$.

c) Si g est une métrique riemannienne sur U (i.e. un champs de tenseurs $g\in \mathrm{Tens}^0_2(U)$ deux fois contravariant, symétrique et défini positif), alors la forme volume associée à g est l'unique forme volume ω_g telle que $\omega_g(v_1,\cdots,v_n)=+1$ pour toute base orthonormée $(v^1,\cdots,v^n)$ d'orientation positive.

Exercice : Si $g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$, alors $\omega_g=\sqrt{\det g_{ij}(x)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\sqrt{\det g_{ij}}\omega_0$.

Definition 5.7 Le *volume riemannien* de (U,g) est $\mathrm{Vol}_g(U)=\int_U\omega_g=\int_U\sqrt{\det g_{ij}}dx^1\cdots dx^n$

5.4 Cube singulier et chaîne cubique dans $\mathbb{R}^n$

Voyons quelques définitions. Un *cube singulier* de dimension $k\in\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^n$ est une application de classe C^∞

$$c: I^k\to\mathbb{R}^n$$

où $I=[0,1]$. Une *k-chaîne cubique singulière* de dimension k dans $\mathbb{R}^n$ est une combinaison linéaire formelle finie de k-cubes singuliers à coefficients entiers [1] :

$$C=\sum_{i=1}^m r_ic_i$$

où les c_i sont des k-cubes singuliers et les r_i des entiers.

Le *bord* d'un cube singulier c de dimension k est une chaîne de dimension $k-1$ notée ∂c et définie ainsi : Si $k=0$, on pose $\partial c=0$ et si $k\geq 1$, on pose

$$\partial c=\sum_{i=1}^k(-1)^{i+1}\,(c_i'-c_i'')$$

1. On pourrait en fait prendre les coefficients dans n'importe quel anneau.

où c_i',c_i'' sont les cubes singuliers de dimension $k-1$ définis par

$$c_i'(t_1, t_2, \cdots, t_{k-1}) = c_i(t_1, \cdots, t_{i-1}, 1, t_i \cdots, t_{k-1})$$

et

$$c_i''(t_1, t_2, \cdots, t_{k-1}) = c_i(t_1, \cdots, t_{i-1}, 0, t_i \cdots, t_{k-1}).$$

Exemple 5.8 Si cube singulier de dimension 1 est simplement un chemin $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Son bord est alors donné par

$$\partial c = c(1) - c(0).$$

Le bord d'une chaîne est alors défini par linéarité :

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{m} r_i c_i\right) = \sum_{i=1}^{m} r_i \partial c_i.$$

Exercice 5.1 Montrer que $\partial^2 = 0$, i.e. pour toute chaîne C, on a $\partial(\partial C) = 0$.

5.5 Intégration d'une forme différentielle sur une chaîne

Definition 5.9 Si $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ et $c : I^k \to \mathbb{R}^n$ est un cube singulier, alors

$$\int_c \alpha := \int_{I^k} c^* \alpha$$

est *l'intégrale de α sur le cube c.*

Exemple 5.10 Si $h \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ est une fonction sur $\mathbb{R}^n$ et c est un 0-cube, alors $\int_c h = h(c(0)$ (un 0-cube est simplement un point et une 0-forme est une fonction : l'intégrale de la 0-forme sur le 0-cube est simplement l'évaluation de la fonction sur le point).

Exemple 5.11 Si $\alpha = a_i dx^i$ est une 1-forme et $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ un 1-cube singulier (donc un chemin), l'intégrale de α sur ce chemin est définie par

$$\int_c \alpha = \int_0^1 \alpha(\dot{c}(t))dt = \int_0^1 a_i(c(t)) \cdot \frac{dc^i}{dt}(t)\, dt.$$

Lemme 5.7 *La définition de $\int_c \alpha$ est invariante par difféomorphisme direct (reparamétrisation).*

Preuve Soient $c, c' : I^n \to \mathbb{R}^n$ deux k-cubes singuliers tels qu'il existe un difféomorphisme $f : I^k \to I^k$ préservant l'orientation et vérifiant $c' = c \circ f$. Alors on a

$$\int_{c'} \alpha = \int_{I^k} (c')^* \alpha = \int_{I^k} (c \circ f)^* \alpha = \int_{I^k} (f^* \circ c^*) \alpha = \int_{I^k} f^*(c^* \alpha) = \int_{I^k} c^* \alpha = \int_c \alpha.$$

□

Definition 5.12 (intégrale d'une forme différentielle sur une chaîne) L'intégrale de la $k-$forme α sur la k-chaîne $C = \sum_{i=1}^m r_i c_i$ se définit par linéarité :

$$\int_C \alpha = \sum_{i=1}^{m} r_i \int_{c_i} \alpha.$$

5.6 La formule de Stokes

Théorème 5.8 *Si c est une $k-$chaîne et α une $(k-1)$-forme sur $\mathbb{R}^n$, alors*

$$\int_{\partial c} \alpha = \int_c d\alpha.$$

Exemple 5.13

$$\int_a^b df = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = \int_{\partial[a,b]} f(x)dx.$$

La formule de Stokes généralise toutes les formules d'intégration par parties (intégration par partie des fonctions réelles d'une variable réelle, formule de Green, formule de Riemann, etc...). Elle offre l'avantage d'être indépendante du système de coordonnées. Le prix à payer étant d'introduire les opérateurs vectoriels (gradient, divergence, rotationnel, Laplacien, flux, etc...) dans le langage des formes différentielles.

Preuve de la formule de Stokes
Notons $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ la forme volume standard sur $\mathbb{R}^k$, et

$$\theta^i = *dx^i = (-1)^{i+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^k).$$

Remarquons que

$$dx^j \wedge \theta^i = \delta_{ij}\, \omega.$$

Soit $c : I^k \to \mathbb{R}^n$ un cube singulier et $\alpha \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$. On peut alors écrire

$$c^*(\alpha) = \sum_{i=1}^k a_i\, \theta^i,$$

où $a_i \in C^\infty(I^k)$. D'où

$$\begin{aligned}
c^*(d\alpha) &= dc^*(\alpha) = \sum_i \left(da_i \wedge \theta^i + a_i d\theta^i\right) \\
&= \sum_i da_i \wedge \theta^i \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\, dx^j \wedge \theta^i \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial x^i}\, \omega.
\end{aligned}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
\int_c d\alpha &= \int_{I^k} c^*(d\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{I^k} \frac{\partial a_i}{\partial x^i}\, dx^1 dx^2 \cdots dx^k \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{I^{k-1}} \left(\int_{x_i=0}^{1} \frac{\partial a_i}{\partial x^i}\, dx^i \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^k \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{I^{k-1}} \Big(a_i(x^1, \cdots, 1, \cdots, x^k) - a_i(x^1, \cdots, 0, \cdots, x^k) \Big)\, dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^k \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \left(\int_{c_i'} \alpha - \int_{c_i''} \alpha \right) \\
&= \int_{\partial c} \alpha.
\end{aligned}
$$

Si $c = \sum_i r_i c_i$ est une chaîne singulière, alors

$$
\int_c d\alpha = \int_{\sum_i r_i c_i} d\alpha = \sum_i r_i \int_{c_i} d\alpha = \sum_i r_i \int_{\partial c_i} \alpha = \int_{\sum_i r_i \partial c_i} \alpha = \int_{\partial c} \alpha.
$$

$\square$

Chapitre 6

Compléments

6.1 Connexions

Definition 6.1 Une *connexion* sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une application

$$\nabla : \Gamma(U) \times \Gamma(U) \to \Gamma(U),$$

que l'on note $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ et qui vérifie les conditions suivantes :

(i) ∇ est $C^\infty(U)$ linéaire en la première variable :

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y \qquad \text{(pour tous } f_1, f_2 \in C^\infty(U)).$$

(ii) ∇ est $\mathbb{R}-$linéaire en la seconde variable :

$$\nabla_X (a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2 \qquad \text{(pour tous } a_1, a_2 \in \mathbb{R}).$$

(iii) ∇ vérifie la règle de Leibniz suivante en la seconde variable :

$$\nabla_X (f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + X(f) \cdot \nabla_X Y \qquad \text{(pour tout } f \in C^\infty(U)).$$

Definition 6.2 Les *symboles de Cristoffel* $\Gamma_{ij}^k(x)$ de la connexion ∇ sont les n^3 fonctions définies sur le domaine U par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma_{ij}^k \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Les symboles de Cristoffel dépendent de la connexion ∇ et du système de coordonnées choisi.

Lemme 6.1 *Les symboles de Christoffel déterminent la connexion sur tout les champs de vecteurs. Plus précisément, si $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = b^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ sont deux champs de vecteurs sur U, alors*

$$\nabla_X (Y) = \left(a^i \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + a^i b^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{6.1.1}$$

Preuve. C'est un calcul :

$$\begin{aligned}
\nabla_X (Y) = \nabla_{a^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= a^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + a^i b^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + a^i b^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 6.2 *La valeur du champ $\nabla_X(Y)$ en un point $p \in U$ ne dépend que de la valeur de X en p et de Y le long d'une courbe arbitraire $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = 0$ et $\dot{\gamma}(0) = X_p$*

Preuve. Le lemme précédent montre que

$$(\nabla_X(Y))p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Y_{\gamma(t)} + a^i(p)b^j(p)\Gamma^k_{ij}(p)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

$\square$

6.1.1 Effet d'un changement de coordonnées sur une connexion :

On peut se demander si les Γ^k_{ij} sont les coefficients d'un tenseur (si c'est le cas, il serait de type $\binom{1}{2}$). La réponse est non.

Soient $(x^1, \cdots, x^n)$ et $(y^1, \cdots, y^n)$ deux systèmes de coordonnées sur le domaine U, et ∇ une connexion sur U. Notons les symboles de Cristoffel correspondant par
Notons les symboles de Cristoffel correspondant par

$$\Gamma^k_{ji}(x) = -\nabla dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \qquad \text{et} \quad \overline{\Gamma}^\mu_{\sigma\nu}(x) = -\nabla dy^\mu \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu}, \frac{\partial}{\partial y^\sigma}\right)$$

Or,

$$dy^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^k} dx^k, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y^\nu} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^\mu_{\sigma\nu} &= -\nabla \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^k} dx^k\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial x^j}{\partial y^\sigma}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= -\left(d\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^k}\right) \otimes dx^k + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^k}\nabla dx^k\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial x^j}{\partial y^\sigma}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= -\left(\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\ell \partial x^k} dx^\ell \otimes dx^k - \frac{\partial y^\mu}{\partial x^k}\Gamma^k_{ba} dx^a \otimes dx^b\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial x^j}{\partial y^\sigma}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\overline{\Gamma}^\mu_{\sigma\nu}(y) = \Gamma^k_{ji}(x)\frac{\partial y^\mu}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^\nu}\frac{\partial x^j}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^\nu}\frac{\partial x^j}{\partial y^\sigma} \tag{6.1.2}$$

Cette formule entraîne en particulier qu'il n'existe pas de "connexion nulle" : si les symboles de Cristoffel sont nuls dans un système de coordonnées, il sont en géneral non nuls dans un autre. Pour qu'ils le soient, il faut que le changement de coordonnées soit affine (car alors les termes en dérivée seconde sont nuls).

6.1.2 Dérivée covariante dans la direction d'un champ de vecteurs

Soit M une variété différentiable munie d'une connexion ∇.

Proposition 6.3 *Il existe une unique application* $\Gamma(M) \times \mathrm{Tens}_k^\ell(M) \to \mathrm{Tens}_k^\ell(M)$ *telle que*
a) Les champs T *et* $\nabla_X T$ *sont de même type,*
b) $\nabla_{hX} T = h\nabla_X T$,
c) $\nabla_X(\cdot)$ *est* $\mathbb{R}-$*linéaire,*
d) $\nabla_X(hT) = X(h)T + h\nabla_X T$,
e) $\nabla_X h = X(h)$ *pour toute fonction* h,
f) $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S$.

`A revoir !!!`

Definition 6.3 Si $T \in \mathrm{Tens}_k^\ell(U)$ et $X \in \Gamma(U)$, alors $T \otimes \nabla X \in \mathrm{Tens}_{k+1}^{\ell+1}(U)$ et on note

$$\nabla_X(T) = C_{k+1}^{\ell+1}(T \otimes \nabla X) \in \mathrm{Tens}_k^\ell(U)$$

sa contraction sur les deux derniers indices. On dit que $\nabla_X(T)$ est la *dérivée covariante directionnelle* de T dans la direction du champ de vecteurs X.

Propriétés 6.4 *a) Les champs* T *et* $\nabla_X T$ *sont de même type,*
b) $\nabla_{hX} T = h\nabla_X T$,
c) $\nabla_X(\cdot)$ *est* $\mathbb{R}-$*linéaire,*
d) $\nabla_X(hT) = X(h)T + h\nabla_X T$,
e) $\nabla_X h = X(h)$ *pour toute fonction* h,
f) $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S$.

Les propriétés (b) et (c) nous disent que $(X, T) \to \nabla_X T$ est $C^\infty(U)-$linéaire en la première variable.

Exercice 6.1 Montrer que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Exercice 6.2 Montrer que si $T \in \mathrm{Tens}_k^\ell(U)$ avec $k, \ell \geq 1$, alors

$$\nabla_X(C(T)) = C(\nabla_X(T))$$

$$(\nabla\theta)(X, Y) = (\nabla_X \theta)(Y).$$

On observe que d'une part

$$\nabla_X(\theta(Y)) = d(\theta(Y))(X),$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned}
\nabla_X(\theta(Y)) &= \nabla_X\left(C(\theta \otimes Y)\right) \\
&= C\left(\nabla_X(\theta \otimes Y)\right) \\
&= C\left((\nabla_X\theta) \otimes Y + \theta \otimes \nabla_X Y\right) \\
&= C\left((\nabla_X\theta) \otimes Y\right) + C\left(\theta \otimes \nabla_X Y\right) \\
&= (\nabla_X\theta)(Y) + \theta\left(\nabla_X Y\right)
\end{aligned}$$

$$(\nabla_X\theta)(Y) = d\left(\theta(Y)\right)(X) - \theta(\nabla_X Y).$$

qqqqqqqqq

6.2 La dérivée covariante

Definition 6.4 Une *connexion* est un opérateur différentiel

$$\nabla : \mathrm{Tens}(U) \to \mathrm{Tens}(U)$$

tel que :

(i) ∇ est $\mathbb{R}-$linéaire,

(ii) $\nabla(\mathrm{Tens}_k^\ell(U)) \subset \mathrm{Tens}_{k+1}^\ell(U)$ (i.e. ∇ augmente le degré de covariance de 1),

(iii) $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$,

(iv) Si $h \in C^\infty(U)$, alors $\nabla(h) = dh$,

(v) $\nabla\delta = 0$, où δ est le tenseur de Kronecker.

Remarque 6.5 Cette définition est **fausse** (pourtant je l'ai prise dans le livre de relativité de Caroll). Le problème vient de la règle de Leibniz, voici pourquoi : On a $(fT) \otimes S = T \otimes (fS)$ pour toute fonction (0-tenseur) f, or en général

$$(\nabla(fT)) \otimes S + fT \otimes (\nabla S) \neq (\nabla T) \otimes fS + T \otimes (\nabla(fS))$$

(sauf si df et S commutent, i.e. si S est contravariant). Il faut donc reconstruire ce paragraphe.

Exercice Montrer à partir de cette définition que $\nabla(1) = 0$ et que si $h \in C^\infty(U)$, alors $\nabla(h) = dh$.

Puisque $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ est un champs de vecteurs, c'est-à-dire un champs de tenseurs de type $\binom{1}{0}$, $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ est un champs de tenseurs de type $\binom{1}{1}$.

Definition 6.6 Les *symboles de Cristoffel* $\Gamma_{ij}^k(x)$ de la connexion ∇ sont les n^3 fonctions définies sur le domaine U par

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i.$$

Les symboles de Cristoffel dépendent de la connexion ∇ et du système de coordonnées choisi.

Soit $X = a^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ un champ de vecteurs, alors

$$\begin{aligned}
\nabla(X) &= \nabla\left(a^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes da^j + a^j \nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes da^j + a^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \\
&= \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i + a^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \\
&= \frac{\partial a^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i + a^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \\
&= \left(\frac{\partial a^k}{\partial x^i} + a^j \Gamma_{ij}^k\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i.
\end{aligned}$$

Ce calcul montre que les symboles de Christoffel déterminent l'action de la connexion sur tout les champs de vecteurs. On va prouver que ces symboles définissent entièrement la connexion sur tous les champs de tenseurs, commençons par le cas des champs de covecteurs.

Proposition 6.5 *On a*
$$\nabla dx^k = -\Gamma^k_{ij}\, dx^j \otimes dx^i.$$

Preuve Notons $\nabla dx^k = \Lambda^k_{ij}\, dx^j \otimes dx^i$, nous devons calculer les coefficients Λ^k_{ij}. Pour cela, on observe que le tenseur de Kronecker s'écrit
$$\delta = dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^k},$$
mais comme $\nabla\delta = 0$, on a
$$\nabla\left(dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \left(\nabla dx^k\right) \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} + dx^k \otimes \left(\nabla \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = 0.$$
Par conséquent
$$\begin{aligned}\Lambda^k_{ij}\, dx^j \otimes dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} &= -dx^k \otimes \left(\Gamma^m_{\ell k}\, \frac{\partial}{\partial x^m} \otimes dx^\ell\right)\\ &= -\Gamma^k_{ij}\, dx^j \otimes dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}\end{aligned}$$
et donc $\Lambda^k_{ij} = -\Gamma^k_{ij}$.

□

Remarque Une conséquence importante de la proposition est la formule suivante :
$$\Gamma^k_{ij} = -\left(\nabla dx^k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

Corollaire 6.6 *Si $\theta \in \Omega^1(U)$ et $X, Y \in \Gamma(U)$, alors*
$$(\nabla\theta)(X,Y) = d\left(\theta(Y)\right)(X) - \theta(\nabla_X Y).$$

Exercice Prouver ce corollaire. Remarquer qu'il s'agit de prouver en coordonnées que
$$(\nabla(a_k dx^k))\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - a_k\Gamma^k_{ij}\right).$$

A partir de là, on peut calculer la dérivée covariante d'un tenseur de n'importe quel type. Par exemple, si $S = \theta \otimes \phi \otimes X, \theta, \phi \in \Omega^1(U)$ et $X \in \Gamma(U)$, on a
$$\nabla S = \nabla(\theta) \otimes \phi \otimes X + \theta \otimes \nabla(\phi) \otimes X + \theta \otimes \phi \otimes \nabla X$$

Exercice 6.3 Soit ∇ une connexion sur $\mathbb{R}^n$, et Γ^k_{ij} ses symboles de Cristoffel dans un système de coordonnées $x^1, \cdots, x^n$. Notons T^k_{ij} les fonctions définies par
$$T^k_{ij}(x) = \Gamma^k_{ij}(x) - \Gamma^k_{ji}(x)$$
Montrer que T^k_{ij} est un tenseur en utilisant la formule de changement de coordonnées.

Exercice 6.4 Montrer que si ∇ et $\widetilde{\nabla}$ sont deux connexions, alors les n^3 fonctions $A^k_i j(x) = \Gamma^k_{ij}(x) - \widetilde{\Gamma}^k_{ij}(x)$ sont les coefficients d'un champ de tenseurs A de type $\binom{1}{2}$.

6.3 Métriques semi-riemannniennes

Definition 6.7 Une *métrique semi-riemannienne* g sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$ est un champ de tenseurs $g \in \mathrm{Tens}_2^0(U)$ tel que :

(i.) g est symétrique ($g_x(v,w) = g_x(w,v) \forall x, v, w$),

(ii.) g_x est non dégénéré (si $g_x(v,w) = 0 \forall w, v = 0$),

(iii.) g_x est de signature constante, i.e. le nombre

$$P = \max\{h \mid \exists E \subset \mathbb{R}^n, \text{ sous-espace vectoriel de dimension } k \text{ tel que } g\,|_E \text{ est def. pos. }\}$$

est de indépendant de x. La *signature* de g est le couple d'entiers $(p, n-p)$.

Definition 6.8
- g est *Riemannienne* si elle est de signature $(n, 0)$
- g est *Lorentzienne* si elle est de signature $(n-1, 1)$

En coordonnées, $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ (souvent écrit $g_{ij} dx^i dx^j$), avec :

1. $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ pour tout $x \in U, i, j = 1, \cdots, n$ (symétrie),
2. $(g_{ij}(x))_{ij}$ est inversible pour tout $x \in U$ (non-dégénérescence),
3. $(g_{ij}(x))_{ij}$ est de signature constante en x.

Exemples 6.9
1. La métrique euclidienne en coordonnées standard (cartésiennes) :
$$g = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$$
2. La métrique euclidienne dans le plan en coordonnées polaires :
$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2$$
3. L'espace-temps de Minkowski : $\mathbb{R}_1^3 := \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^4$ avec $g = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$ (métrique de Lorentz).
4. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une immersion (i.e. df_x est injective pour tout x), alors $g = f^* \left(\sum_{i=1}^m (dg^i)^2\right) = \sum_{i=1}^m (df^i)^2$ est la *métrique induite par* f. C'est une métrique riemannienne.

Notation : On note g^{ij} les coefficients de la matrice inverse de g_{ij}.

Théorème 6.7 (Lemme fondamental de la géométrie semi-riemannienne) *Soit* (U, g) *un domaine semi-riemannien. Alors il existe une unique connexion* Δ *telle que*

1. ∇ *est symétrique :* $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \forall i, j, k,$
2. $\nabla g = 0$

Preuve La condition 2) est équivalente à dire que

$$d(g(X,Y))(Z) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Or, $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ et $(dg_{ij})\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \Gamma_{ki}^l g_{jl} + \Gamma_{kj}^l g_{li} (I)
\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma^l_{ji} g_{kl} + \Gamma^l_{jk} g_{li} (II)$$

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^j} = \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \Gamma^l_{ik} g_{lj} (III)$$

On somme $I + II - III$:

$$2 g_{li} \Gamma^l_{kj} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}$$

Finalement,

$$\Gamma^m_{kj} = \frac{1}{2} g^{mi} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right)$$

Definition 6.10 La connexion ∇ obtenue est la connexion canonique de (U, g), ou connexion de Levi-Civita.

6.3.1 Tenseur de Courbure de Riemann-Christoffel

Definition 6.11 A toute connexion ∇ on associe un champ de tenseurs $R \in \mathrm{Tens}^1_3(U)$ donné par

$$\begin{array}{rl} R : \Gamma(U) \times \Gamma(U) \times \Gamma(U) & \to \Gamma(U) \\ (X, Y, Z) & \mapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{array}$$

Ce champ de tenseurs se nomme le *tenseur de courbure* ou le *tenseur de Riemann.*

Soit R^l_{ijk} les coefficients du tenseur de courbure, i.e $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l}$
Le calcul qui suit permet d'expliciter les R^l_{ijk} :

$$\begin{array}{rcl} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \dfrac{\partial}{\partial x^k} \right) & = & \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\Gamma^l_{jk} \dfrac{\partial}{\partial x^l} \right) \\ & = & \dfrac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} \dfrac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{jk} \dfrac{\partial}{\partial x^l} \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \dfrac{\partial}{\partial x^k} \right) & = & \dfrac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} \dfrac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^m_{jl} \Gamma^l_{ik} \dfrac{\partial}{\partial x^l} \end{array}$$

On sait que

$$R^l_{ijk} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Ainsi :

$$R^l_{ijk} = \left(\frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ik} \right) \frac{\partial}{\partial x^l}$$

Definition 6.12 Le *Tenseur de Ricci* est le champ de tenseurs $\mathrm{Ric} \in \mathrm{Tens}^0_2(U)$ défini en coordonnées par

$$\mathrm{Ric}_{ij} = \sum_k R^k_{ijk}.$$

C'est la "contraction" ou la "trace" du tenseur de courbure.

Definition 6.13 La *Courbure scalaire* est la fonction $S \in C^\infty(U)$ définie par

$$S = \sum_i \mathrm{Ric}_{ii} = \sum_{i,k} R^k_{iik}$$

Definition 6.14 Le *Tenseur d'Einstein* est le champ de tenseurs $G \in \mathrm{Tens}^0_2(U)$ défini par

$$G = \mathrm{Ric} - \frac{1}{2} S \cdot g.$$

En coordonnées,

$$G_{ij} = (\mathrm{Ric})_{ij} - \frac{1}{2} S g_{ij}.$$

Théorème 6.8

$$\nabla G = 0$$

Localement, l'espace-temps est un domaine $U \subset \mathbb{R}^4$ muni d'une métrique Lorentzienne. On dégini un tenseur "énergie-impulsion" $T \in \mathrm{Tens}^0_2$ (qui représente "l'énergie en mouvement"). Sur (U, g), on a deux tenseurs de type $\binom{0}{2}$ de dérivée covariante nulle : G (géométrie) et T (physique). *L'équation d'Einstein* [1] est

$$G = T.$$

Toute la théorie de la relativité se déduit de cette équation.

6.4 Difféomorphismes et champs de vecteurs revisités

Soit $f : U \to V$ un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$. On note $(y^1, \cdots, y^n) = f(x^1, \cdots, x^n)$, et on écrit indifféremment $\frac{\partial f^\nu}{\partial x^j} = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^j}$. On peut construire les quatre matrices suivantes à partir de la matrice jacobienne de f :

$$df = \left(\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x^1}}, \cdots \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x^n}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}, \quad df^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$$df^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}, \qquad df^t = (df^{-1})^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

Rappelons que cette dernière se nomme la *contragédiente* de la jacobienne de f. Ces quatre matrices nous permettent d'expliciter les applications $f_* : \Gamma(U) \to \Gamma(V)$ et $f^* : \Omega^1(U) \to \Omega^1(V)$ en coordonnées. Ce sont des morphismes d'algèbres, et donc il suffit de les décrire sur les vecteurs et les covecteurs de base :

$$df(e_j) = f_* e_j = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^j} e_\nu$$

1. 1916.

$$f^*e_\nu = df^{-1}(e_\nu) = \frac{\partial x^i}{\partial y^\nu} e_i$$

$$f^*\varepsilon^\mu = df^t(e_\mu) = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^j} \varepsilon_j$$

$$f_*\varepsilon^i = (df^{-1})^t(\varepsilon^i) = \frac{\partial x^i}{\partial y^\mu} \varepsilon_\mu$$

Soit maintenant $T \in \mathrm{Tens}_k^l(U)$ un champ de tenseurs mixte sur U. En coordonnées,

$$T = T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_l} \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}$$

6.5 Les opérateurs ι_μ et π_μ sur $\Omega^\bullet(U)$

Definition 6.15 $\pi_\mu : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ est défini par $\pi_\mu(\alpha) = dx^\mu \wedge \alpha$. L'opérateur $\iota_\mu : \Omega^{k-1}(U) \to \Omega^{k-1}(U)$ est donné par $\iota_\mu(\alpha) = \iota_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} = \iota_{e_\mu}\alpha$.

Remarque 6.16 La différentielle extérieure s'écrit $d = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu}\pi_\mu = \sum_{\mu=1}^n \partial_\mu \pi_\mu$, où $\partial_\mu \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}$ (on dérive les coefficients de α dans la direction x^μ direction.

Definition 6.17 La codifférentielle est l'opérateur $\delta = \sum_\mu \partial_\mu \iota_\mu = \sum_\mu \iota_\mu \partial_\mu : \Omega^k \to \Omega^{k-1}$.

A titre d'exercice, on peut calculer le *laplacien* : $\Delta = d\partial - \partial d = (d+\delta)^2$.

Propriétés 6.9

1. *$\pi_\mu^2 = 0$*
2. *$\iota_\mu^2 = 0$*
3. *Si $\mu \neq \nu$, alors $\pi_\mu \circ \iota_\nu = -\iota_\nu \circ \pi_\mu$*
4. *$\iota_\mu\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = \iota_\mu\pi_\mu\theta$*

Preuve $(1), (2), (3)$ sont laissés à l'exercice. Il suffit de vérifier (4) sur les formes de base $\theta = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. Alors $\iota_\mu\theta = 0 \Longleftrightarrow \mu \in \{i_1, \cdots, i_k\}$. Donc $\pi_\mu\theta = dx^\mu \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, d'où $\iota_\mu\pi_\mu\theta = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \theta$. La réciproque est évidente : si $\theta = \iota_\mu\pi_\mu\theta$, alors $\iota_\mu\theta = 0$.

Proposition 6.10 *Toute forme différentielle s'écrit de façon unique sous la forme $\theta = \pi_\mu\alpha + \beta$, avec $\alpha, \beta \in \ker i_\mu$.*

Preuve On commence par l'unicité. Supposons que l'on puisse écrire $\theta = \pi_\mu\alpha + \beta = \pi_\mu\alpha' + \beta'$, avec $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \ker i_\mu$. Par la propriété (4), on a $\iota_\mu(\theta) = \iota_\mu\pi_\mu\alpha = \alpha = \alpha'$. On a alors $\beta = \theta - \pi_\mu\alpha = \theta - \pi_\mu\alpha' = \beta'$. Voici pour l'unicité. Pour l'existence, on pose $\alpha = \iota_\mu\theta$, et $\beta = \theta - \pi_\mu\alpha = \theta - \pi_\mu\iota_\mu\theta$. Alors $\theta = \pi_\mu\alpha + \beta$ par définition. De plus, $\iota_\mu\alpha = \iota_\mu^2\theta = 0$, et donc $\alpha \in \ker \iota_\mu$. Il reste à voir que $\beta \in \ker \iota_\mu$. On a $\iota_\mu\beta = \iota_\mu\theta - \iota_\mu\pi_\mu\alpha$. □

Proposition 6.11 $(\iota_\mu\pi_\nu + \iota_\nu\pi_\mu) = \delta_{\mu\nu} Id : \Omega^\bullet \to \Omega^\bullet$.

Preuve Laissée à l'exercice. Il faut écrire $\theta = \pi_\mu\alpha + \beta$, avec $\alpha, \beta \in \ker \iota_\mu$.

Corollaire 6.12 (Formule magique de Cartan)

$$\partial_\mu = d\iota_\mu + \iota_\mu d.$$

Preuve C'est un calcul.

$$\begin{aligned} d\iota_\mu + \iota_\mu d &= \sum_\nu \partial_\nu \circ (\pi_\nu \iota_\mu + \iota_\mu \pi_\nu) \\ &= \sum_\nu \partial_{\mu\nu} Id \circ \partial_\nu = \partial_\mu \end{aligned}$$

Corollaire 6.13 *Soit $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un domaine, et $V = U \times I$, où I est l'invervalle standard. Alors pour toute forme fermée $\theta \in \Omega^k(V)$, on a*

$$\theta = \theta_0 + dP\theta$$

où $P\theta = \int_0^{x^n} \iota_n \theta$ et $\theta_0 = j^*\theta$, $j : U \to V$ désignant l'injection canonique.

Preuve

$$\begin{aligned} dP\theta &= d\int_0^{x^n} \iota_n\theta = \int_0^{x^n} d\iota_n\theta \\ &= \int_0^{x^n} (d\iota_n\theta + \iota_n d\theta) \qquad\qquad (\text{car } d\theta = 0) \\ &= \int_0^{x^n} \partial_n\theta = \int_0^{x^n} \frac{\partial\theta}{\partial x^n} \\ &= \theta(x^n) - \theta(0) = \theta - \theta_0 \end{aligned}$$

□

Théorème 6.14 (Une version du Lemme de Poincaré) *Si θ est une forme fermée au voisinage d'un cube, alors θ est exacte sur ce cube.*

Preuve Le corollaire précédent nous dit que $\theta = \theta_0 +$ forme exacte, où θ_0 ne dépend que de $(n-1)-$variables, et est fermée. Par récurrence, $\theta = \phi +$ forme exacte, où ϕ dépend de 0 variables (et est donc à coefficients constants donc exacte). Ainsi θ est exact.

□

6.6 Cohomologie

Notations :

1. $Z^k(U) = \Omega^k(U) \cap \ker(d) = \{k-$ formes fermées $\}$.
2. $B^k(U) = \Omega^k(U) \cap \mathrm{Im}(d) = \{k-$ formes exactes $\}$.
3. $H^k_{DR}(U) = Z^k(U)/B^k(U)$ est le *k-ème groupe (sic) de cohomologie de de Rham.*

Definition 6.18 $b_k(U) = \dim\left(H^k_{DR}(U)\right) = k-$ième nombre de Betti de U.

Faits :

1. Pour les "bons domaines" (de type topologique fini), $b_k < \infty$.
2. $b_k(U)$ est un invariant topologique, et même homotopique de U.

Sur le changement de variables **A méditer :** dans le cours d'analyse 1, on voit deux formules

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. $\int_a^b \int_c^d g(x^1, x^2)dx^1dx^2 = \int_{a'}^{b'} \int_{c'}^{d'} g(y^1, y^2) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \end{pmatrix} dy^1dy^2$.

La formule (1) est orientée : $f(x)dx$ est une forme différentielle. Dans la formule (2), c'est moins clair, elle est en général interprétée de façon non orientée. La première formule (intégrale) devrait s'écrire $\int_{[a,b]} f(x)dx$.