EPFL

Prof. Marc Troyanov
Algèbre linéaire avancée II - Physique
Mardi 29 juin 2021
de 8h15 à 11h15

1

Student One

SCIPER : **111111** SIGNATURE

Signature :

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et signer votre examen.
- Documents autorisés: aucun ! Aucun appareil électronique (machine à calculer, téléphone, tablette, montre connectée...)
- L'examen contient 9 questions à choix multiples, 7 questions Vrai/Faux et 4 problèmes ouverts. Le total est de 100 points.
- Pour les questions à choix multiple il n'y a qu'une réponse correcte. On compte +5 points pour une réponse correcte et -2 points pour une réponse fausse. Si vous ne savez pas répondre il faut l'indiquer (il ne vaut pas la peine de répondre au hasard).
- Pour les questions Vrai/Faux on compte + 2 pour une bonne réponse et -1 pour une mauvaise.
- Ce cahier fait 16 pages. Vérifier que votre cahier est complet.
- Les feuilles de brouillon sont pour vos calculs, elles ne seront pas corrigées.
- Ne pas dégrafer le cahier.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** (ne pas écrire au crayon, ni au stylo rouge).
- Si vous changez d'avis dans un QCM, effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- A la fin de l'examen, laissez votre copie sur la table, ainsi que toutes les feuilles de brouillons.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple.

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question. On compte +5 points par réponse correcte et −2 par réponse fausse. L'option "ne sait pas" donne 0 point.

Question 1 Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

Parmi les assertions suivantes, laquelle est fausse *?*

- [x] Si $\phi, \psi \in V^*$ sont non nuls, alors $\dim(\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Ker}(\psi)) = n - 2$.
- [ ] Si $v \in V$ est un vecteur non nul, alors il existe $\psi \in V^*$ tel que $\psi(v) = 1$.
- [ ] Étant donné $v \in V \setminus \{0\}$ fixé, il existe $\psi \in V^*$ non nulle tel que $\psi(v) = 0$.
- [ ] Pour tout covecteur $\phi \in V^*$ non nul, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = n - 1$.
- [ ] Ne sais pas

Question 2 On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Laquelle parmi les affirmations suivantes est vraie ?

- [ ] La matrice B est nilpotente.
- [ ] La forme normale de Jordan $J[B]$ possède un unique blocs de Jordan.
- [ ] La forme normale de Jordan $J[B]$ possède exactement deux blocs de Jordan.
- [x] La matrice B est diagonalisable.
- [ ] Ne sais pas

Question 3 Soit $\mathcal{P}_k$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq k$ (on suppose $k \geq 2$). On considère la fonction $Q : \mathcal{P}_k \to \mathbb{R}$ définie pour tout polynôme $h(x)$ par

$$Q(h) = (h'(\alpha))^2.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h'(x)$ est le polynôme dérivé de $h(x)$.

Laquelle parmi les affirmations suivantes est vraie ?

- [ ] Q est une forme quadratique définie positive.
- [ ] Q est une forme quadratique et sa signature dépend du choix de α.
- [x] Q est une forme quadratique et sa signature est $(p, q) = (1, 0)$.
- [ ] Q n'est pas une forme quadratique sur $\mathcal{P}_2$.
- [ ] Ne sais pas

Question 4 Soit $A \in M_6(K)$ une matrice dont les polynômes caractéristique et minimal sont

$$\chi_A(t) = (t-3)^4(t+2)^2 \qquad \text{et} \qquad \mu_A(t) = (t-3)^3(t+2)$$

Quelle est la forme canonique de Jordan $J[A]$ de A ?

- ■ $J[A] = J_3(3) \oplus J_1(3) \oplus J_1(-2) \oplus J_1(-2)$.
- ☐ $J[A] = J_3(3) \oplus J_3(-2)$.
- ☐ $J[A] = J_4(3) \oplus J_2(-2)$.
- ☐ $J[A] = J_2(3) \oplus J_2(3) \oplus J_2(-2)$.
- ☐ Ne sais pas

Question 5 Quel est le terme général de la récurrence linéaire

$$x_{k+2} = 2x_k + x_{k+1}$$

avec conditions initiales $x_0 = 2,\ \ x_1 = 1$?

- ■ $x_k = (-1)^k + 2^k$
- ☐ $x_k = (-1)^k + (-2)^k$
- ☐ $x_k = \frac{1}{3}(5 + (-2)^k)$
- ☐ $x_k = 2^k - 1$
- ☐ Ne sais pas

Question 6 Soit $V \subset \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1,1,0,0), \qquad v_2 = \big(2,0,1,1), \qquad v_3 = (2,0,0,1).$$

On note $\{u_1, u_2, u_3\}$ la base orthonormée de V obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Laquelle parmi les affirmation suivante est correcte ?

- ■ $u_2 = \frac{1}{2}\big(1,-1,1,1\big)$.
- ☐ $u_2 = \frac{1}{2}\big(1,1,1,-1\big)$.
- ☐ $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)$.
- ☐ $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,-1,-1,-1\big)$.
- ☐ Ne sais pas

Question 7 Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

Laquelle parmi les affirmations suivantes est correcte?

- ☐ La somme de deux vecteurs isotropes est toujours un vecteur isotrope.
- ☐ Q est définie positive si et seulement s'il existe une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ telle que $Q(v_i) > 0$ pour tout i.
- ■ Une base de Sylvester contient un vecteur isotrope si et seulement si Q est dégénérée.
- ☐ Une base de Sylvester ne contient jamais de vecteur isotrope.
- ☐ Ne sais pas

Question 8 On considère la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{C}^3$ où

$$v_1 = (2, i, 1), \qquad v_2 = (1, 0, -1), \qquad v_3 = (i, 0, 1),$$

où $i = \sqrt{-1}$. On note $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base duale de $\mathcal{B}$ et $w = (1, i, 1 + i)$.

Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

- [ ] $\varphi_2(w) = -i$.
- [ ] $\varphi_1(w) = 3 - i$.
- [ ] $\varphi_1(w) = 4$.
- [x] $\varphi_3(w) = i$.
- [ ] Ne sais pas

Question 9 Laquelle parmi les affirmation suivantes concernant les matrice symétriques réelles $A \in M_n(\mathbb{R})$ est correcte ? (on suppose $n \geq 2$).

- [ ] Si la matrice symétrique A n'a qu'une valeur propre réelle λ alors son polynôme minimal est $\mu_A(t) = (t - \lambda)^n$.
- [x] Le polynôme minimal d'une matrice symétrique A ne possède pas de racine multiple.
- [ ] Il existe une matrice symétrique réelle A et une valeur propre $\lambda \in \sigma(A)$ telle que la multiplicité géométrique de λ est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique.
- [ ] Il existe une matrice symétrique A dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé.
- [ ] Ne sais pas

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question dans cette partie, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse). On compte +2 points par réponse correcte et −1 par réponse fausse.

Question 10 Soit V un espace vectoriel euclidien de dimension n et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de dimension m. Soient $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ une base orthonormée de W et $x \in V$. Alors

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle x, w_i \rangle^2 \quad \text{si et seulement si} \quad x \in W.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 11 Soient $B, N \in M_n(K)$ deux matrices qui commutent. Supposons que B est inversible et N est nilpotente. Alors $A = B + N$ est inversible.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 12 Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont des matrice symétriques.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 13 Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de V. Soient $\psi_1, \cdots, \psi_n$ des formes linéaires sur V. Alors elles forment une base de V^* si et seulement la matrice $(\psi_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 14 Pour toute matrice inversible $A \in M_n(\mathbb{C})$ on a $\chi_A(0) = \mu_A(0)$, où $\chi_A(t)$ est le polynôme caractéristique et $\chi_A(t)$ est le polynôme minimal.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 15 Pour tout sous-espace vectoriel W d'un espace vectoriel pseudo-euclidien on a toujours $V = W \oplus W^\perp$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 16 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\delta_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ le covecteur défini par $\delta_a(p) = p(a)$. Alors $\{\delta_a, \delta_b, \delta_c\} \subset (\mathbb{R}[x])^*$ sont linéairement indépendants si et seulement si les nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont deux-à-deux distincts (on rappelle que $\mathbb{R}[x]$ est l'espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients réels en la variable x).

■ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert.

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 17: *Cette question est notée sur 10 points.*

a) Définir la notion d'*espace dual* d'un espace vectoriel V sur un corps K.

Réponse : Le dual de V est l'espace vectoriel $V^* = \mathcal{L}(V, K)$. Un élément de V^* est donc une application linéaire de V à valeurs dans le corps de base K. Une telle application s'appelle un *covecteur* de V ou une *forme linéaire* sur V.

b) Définir la notion de *base duale* une base $\mathcal{B}$ d'un K-espace vectoriel V de dimension finie, puis expliquer pourquoi toute base de V admet une et une seule base duale.

Réponse : La *base duale* d'une base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V est la famille de covecteurs $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ telle que $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$.
Ces covecteurs sont bien définis car une application linéaire est déterminée par son effet sur une base. Pour prouver qu'ils sont linéairement indépendants, on suppose que $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$ est nul dans V^*, alors pour tout j on a

$$0 = \alpha(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(e_j) = \lambda_j.$$

Ainsi $\mathcal{B}^*$ car cette famille contient n covecteurs linéairements indépendants et $n = \dim(V) = \dim(\mathcal{L}(V, K)) = \dim(V^*)$.

c) Définir la notion de *signature* d'une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel de dimension finie, puis énoncer soigneusement le théorème (d'inertie) de Sylvester.

Réponse : Soit g une forme bilinéaire symétrique sur l'espace vectoriel réel de dimension finie V. On dit que g est de signature (p, q) s'il existe une base $\{e_i, \dots, e_n\}$ de V telle que $g(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$ et

$$g(e_i, e_i) = \begin{cases} +1 & \text{si } 1 \leq i \leq p, \\ -1 & \text{si } p+1 \leq i \leq p+q, \\ 0 & \text{si } p+q < i \leq n. \end{cases}$$

Le théorème de Sylvester énonce l'existence d'une telle base et précise que la signature (p, q) ne dépend pas du choix de la base.

d) Définir la notion de *forme hermitienne* sur un espace vectoriel complexe V. Définir ensuite la notion de *produit scalaire hermitien.*

Réponse : Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une *forme hermitienne* sur V est une fonction $h : V \times V \to \mathbb{C}$ qui est sesquilinéaire (i.e. linéaire en la deuxième variable et anti-linéaire en la première variable) et qui vérifie $h(w, v) = \overline{h(v, w)}$ pour tous $v, w \in V$.
Un *produit scalaire hermitien* est une forme hermitienne qui est définie positive, c'est-à-dire telle que $h(v, v) > 0$ pour tout $v \in V$ non nul.

e) Donner deux exemples de produit scalaire hermitien.

Réponse : (i) Le *produit scalaire hermitien standard* sur $\mathbb{C}^n$ est défini par $\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{v}_i w_i$.
(ii) Le *produit scalaire hermitien* L^2 sur $C^0(\Omega, \mathbb{C})$ est $\langle f, g \rangle = \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) dx$.

Question 18 : *Cette question est notée sur 10 points.*

(a) Définir ce qu'est l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{E}^{1,d}$.

(b) Définir les notions de vecteurs temps, espace et isotrope.

(c) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwartz inversée pour deux vecteurs de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{E}^{1,d}$ (en précisant les conditions de validité sur les vecteurs).

(d) Prouver cette inégalité.

Réponses. (a) On appelle *espace-temps de Minkowski* (ou Lorentz-Minkowski) la donnée d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ de dimension finie $n = 1 + d$ muni d'une forme quadratique Q de signature $(1, d)$. On le note habituellement $\mathbb{E}^{1,d}$ et on dit qu'il y a d dimensions d'espaces et 1 dimension temporelle.

(b) Un vecteur $v \in \mathbb{E}^{1,d}$ est de type temps si $Q(v) > 0$ et de type espace si $Q(v) < 0$. Il est isotrope (ou de type lumière) si $Q(v) = 0$.

(c) L'inégalité de Cauchy-Schwartz inversée dit que si $v, w \in \mathbb{E}^{1,d}$ sont deux vecteurs de type temps alors

$$|g(v,w)| \geq \sqrt{Q(v)}\sqrt{Q(w)}$$

On a égalité si et seulement si v et w sont colinéaires.

(d) La preuve est dans le polycopié (il y a en fait deux preuves).

Question 19 *Cette question est notée sur 11 points.*

(a) Définir le notion de *sous-espace invariant* pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel complexe V.

(b) Prouver que si $f, g \in \mathcal{L}(V)$ commutent (i.e. $f \circ g = g \circ f$), alors $\mathrm{Ker}(g)$ est invariant par f.

(c) Définir la notion de *sous-espace caractéristique* (aussi appelé *sous-espace propre généralisé*) d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(V)$.

(d) Prouver tout sous-espace caractéristique de f est invariant par f.

(e) Expliquer le lien entre la dimension de l'espace caractéristique associé à une valeur propre λ et la multiplicité algébrique de cette valeur propre.

Réponses :

(a) Soit W un sous-espace vectoriel de V. On dit que W est *invariant* par l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(V)$ si $f(W) \subset W$, c'est-à-dire si $f(w) \in W$ pour tout $w \in W$.

(b) Soient $f, g \in \mathcal{L}(V)$ tels que $f \circ g = g \circ f$ et $x \in \mathrm{Ker}(g)$, alors

$$g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0.$$

Cela montre que $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$ (pour tout $x \in \mathrm{Ker}(g)$), donc $\mathrm{Ker}(g)$ est invariant par f.

(c) Le sous-espace caractéristique associé à une valeur propre λ de $f \in \mathcal{L}(V)$ est le sous-espace vectoriel

$$N_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{I}_V)^{m_\lambda}.$$

où $m_\lambda \in \mathbb{N}$ est la multiplicité algébrique de la valeur propre λ (c'est-à-dire le plus grand entier m tels que $(t-\lambda)^m$ divise le polynôme caractéristique $\chi_f(t)$.
On peut aussi dire que $N_\lambda(f)$ est la réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble des vecteurs propres généralisés de f pour la valeur propre λ (le théorème de décomposition primaire entraîne l'équivalence des deux définitions).

(d) Posons $\phi_\lambda(t) = (t-\lambda)^{m_\lambda}$, alors on a vu que $N_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(\phi_\lambda(f))$. Mais il est clair que $\phi_\lambda(f)$ commute avec f, donc par le point (b) on déduit que $\mathrm{Ker}\phi_\lambda(f)$ est invariant par f.

Autre argument : un vecteur propre généralisé pour λ est un vecteur (non nul) $w \in V$ tel que $(f-\lambda)^m(w) = 0$ pour un certain entier m. Alors on a clairement $(f-\lambda)^m(f(w)) = f((f-\lambda)^m(w)) = 0$.

(e) La dimension de $N_\lambda(f)$ est égale à la multiplicité algébrique de λ.
Pour le voir, on peut utiliser le théorème de décomposition primaire. Supposons pour simplifier que $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^r (t-\lambda_i)^{m_i}$, alors le théorème de décomposition primaire (avec Cayley-Hamilton) implique que $V = \bigoplus_{i=1}^r N_{\lambda_i}(f)$ et $(t-\lambda_i)^{m_i}$ est le polynôme caractéristique de $N_{\lambda_i}(f_i)$ où on a noté f_i la restriction de f au sous-espace invariant $N_{\lambda_i}(f_i)$, donc

$$m_i = \deg(\chi_{f_i}(t)) = \dim(N_{\lambda_i}(f_i))$$

(le degré du polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel est toujours égal à la dimension de cet espace vectoriel).

Question 20 : *Cette question est notée sur 10 points.*

Le but de cet exercice est de jordaniser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Donner la forme normale de Jordan $J[A]$.

(b) Trouver une base de Jordan.

(c) Donner une matrice P telle que $P^{-1}AP = J[A]$.

Réponses :
(a) Le polynôme caractéristique est $\chi_A(t) = (t-3)^2(t-1)$. On vérifie que $(A - 3\mathrm{I}_3)(A - \mathrm{I}_3)$ n'est pas la matrice nulle, donc $(t-3)(t-1)$ n'est pas le polynôme minimal et A n'est donc pas diagonalisable, par conséquent sa forme normale de Jordan doit contenir deux blocs de Jordan et on a

$$J[A] = J_1(1) \oplus J_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(solution unique à permutation possible des deux blocs de Jordan près).

(b) Une base Jordan doit contenir un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1$ et un cycle de longueur 2 pour la valeur propre $\lambda = 3$.
Un vecteur propre pour $\lambda = 1$ est donné par $v_1 = (1, -2, 1)$. Pour construire un cycle de longueur 2 associé à la valeur propre $\lambda = 3$ on cherche un vecteur (qu'on notera v_3) qui appartient à $\mathrm{Ker}(A - 3\mathrm{I}_3)^2$ mais tel que $v_3 \notin \mathrm{Ker}(A - 3\mathrm{I}_3)$. On a

$$\mathrm{Ker}(A - 3\mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(A - 3\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Un candidat simple pour v_3 est donc $v_3 = (1, 0, 0)$. On complète le cycle en posant $v_2 = (A - 3\mathrm{I}_3) \cdot v_1 = (0, 1, 0)$. On a ainsi obtenu la base (ordonnée) de Jordan

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, -2, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}.$$

(c) La matrice de changement de base P a pour colonne les composantes des vecteurs de la base de Jordan (pour cela il est important d'avoir correctement ordonné ces vecteurs). On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $P^{-1}AP = J[A]$ (ou si on préfère éviter le calcul de P^{-1}, on peut vérifier que $AcdotP = P \cdot J[A]$).