Réponses au Quiz pour le cours d'algèbre linéaire 2 (printemps 2024).

- Pour chaque question répondre par vrai ou faux.
- Sur une feuille indiquer pour vous-même un "degré de certitude" (disons de 0 à 5, avec '5' signifiant que vous êtes certain·e·s de votre réponse).
- Sauriez-vous donner une preuve ou un contre-exemple dans chaque cas ?

Chapitre 8

1. Le vecteur nul $0 \in V$ est vecteur propre de toute matrice A car $A \cdot 0 = 0$. Faux (par définition un cevteur propre doit être non nul.)
2. λ est valeur propre de A si et seulement si
$$\mathrm{Ker}\,(A - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \{0\}.$$
Vrai.
3. Si $f \in \mathcal{L}(V)$ est inversible, alors $0 \in K$ est valeur propre de f. Faux (c'est l'inverse qui est vrai : Si $\dim(V) < \infty$, alors f est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre).
4. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants. Vrai.
5. Si f est un endomorphisme, alors $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels invariants par f. Vrai.
6. Tout espace propre d'un endomorphisme f est invariant par cet endomorphisme. Vrai.
7. La multiplicité algébrique de toute valeur propre est toujours inférieure ou égale à sa multiplicité géométrique. Faux (c'est l'inverse qui est vrai).

Chapitre 9

8. Un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ admet au moins un vecteur propre. Vrai.
9. Le théorème fondamental de l'algèbre entraîne que pour toute matrice complexe $A \in M_n(\mathbb{C})$, la multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à la multiplicité géométrique. Faux (il n'y a pas de lien).
10. Si v est vecteur propre de la matrice A, il l'est aussi pour $p(A)$, pour tout polynôme $p(t)$. Vrai.
11. Toute matrice complexe $A \in M_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire $A = D \cdot N$ où D est diagonalisable et N est nilpotente et ces deux matrices commutent. Faux (mais on peut écrire $A = D + N$ avec les mêmes conditions).
12. Si $p(A) = 0$, les racines du polynôme p sont valeurs propres de A. Faux.
13. Si $p(A) = 0$, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de $p(t)$. Vrai.

14. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est un polynôme annulateur de cet endomorphisme. Vrai (c'est le théorème de Cayley-Hamilton)

15. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme divise son polynôme minimal. Faux (c'est l'inverse qui est vrai).

16. Dans les questions suivantes, on suppose que A est une matrice réelle de polynôme caractéristique $\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2)$. Que peut-on dire de A ?

    a.) A est de taille 3×3. Vrai.

    b.) A est diagonalisable. Faux en général (pour décider il faudrait connaître le polynôme minimal).

    c.) Les valeurs propres de A sont exactement 1 et 2. Vrai.

    d.) $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$. Faux en général. Ce qu'on sait est que $\dim E_1 \{1, 2\}$ et $\dim E_2 = 1$).

    e.) $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$. Faux en général.

    f.) A est inversible. Vrai (car $\det(A) = 2$).

    g.) $(A - I_3)^2(A - 2I_3) = 0$. Vrai (par le théorème de Cayley-Hamilton)

17. Toute matrice carrée réelle est triangulable car il suffit de la considérer comme matrice complexe et dans $\mathbb{C}$ toute matrice est triangulable. Faux. Par exemple une matrice de rotation n'est pas trianguable comme matrice réelle

18. Une matrice diagonalisable qui est nilpotente est nulle. Vrai.

19. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable. Faux.

20. Si une matrice est diagonalisable, alors la multiplicité géométrique de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique. Vrai.

21. Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est non diagonalisable n'a aucune valeur propre réelle. Faux.

22. Si λ est valeur propre d'une matrice complexe A, alors le nombre de blocs de Jordan de A associés à λ est égal à la multiplicité géométrique de A. Vrai.

23. Si $f \in \mathcal{L}(V)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie (non nulle), alors il existe toujours un sous-espace vectoriel $W \subset V$ de dimension 1 ou 2 qui est invariant par f. Vrai.

24. Deux matrices complexes sont semblables si et seulement si elles ont la même forme normale de Jordan. Vrai.

25. Deux matrices complexes sont semblables si et seulement si elles ont la même base de Jordan. Faux (il n'y a pas unicité de la base de Jordan).

Chapitre 10

26. Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $v \in V$ non nul, il existe $\phi \in V^*$ tel que $\phi(v) = 1$. Vrai.

27. Soit V un K-espace vectoriel. Pour tout $v \in V$ il existe $\phi \in V^*$ non nul tel que $\phi(v) = 0$. Faux (mais c'est vrai si on suppose $\dim(V) \geq 2$).

28. Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de l'espace vectoriel V. Alors $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \in V^*$ est une base de l'espace dual V^* si et seulement la matrice $A = (a_{ij})$ est de déterminant non nul, où $a_{ij} = \phi_i(v_j)$. Vrai.

29. Deux matrices carrées congruentes ont le même rang. Vrai.

30. Une fonction $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si et seulement si $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Faux

31. Une forme quadratique est associée à une unique forme bilinéaire symétrique. Vrai (par les formules de polarisation).

32. Pour toute forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel on peut trouver une base orthogonale. Vrai.

Chapitre 11

33. Dans un espace vectoriel vectoriel euclidien, on a $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si et seulement si les vecteurs x et y sont linéairement indépendants. Faux. (L'énoncé de Cauchy-Schwartz précise au contraire qu'on à l'égalité si et seulement si les deux vecteurs sont linéairement dépendants).

34. Si W est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien V, alors pour tout $x \in V$ il existe un unique point de W à distance minimale de x. Vrai.

35. Soient $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base d'un espace vectoriel euclidien V. Notons $\{u_1, \dots, u_n\}$ la base orthonormée obtenue par Gram-Schmidt. Alors u_3 est combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3. Vrai.

36. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Faux (il faux que les colonnes forment une base *orthonormée*).

37. Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si et seulement s'il existe une matrice orthogonale $A \in O(n)$ telle que $f(x) = Ax$. Faux (mais il est vrai que f s'écrit $A(x) + b$ avec $A \in O(n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$ la partie translation de l'isométrie .

38. Si $A \cdot B$ est une matrice orthogonale, alors A et B sont orthogonales. Faux. On pourrait avoir A inversible quelconque et $B = A^{-1}$).

39. Toute matrice orthogonale admet au moins une valeurs propre réelle. Faux, mais c'est vrai si la taille de la matrice est impaire.

40. Les seules valeurs propres réelles possibles d'une matrice orthogonales sont ± 1. Vrai.

41. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices telles que AB est une matrice orthogonale, alors A est orthogonale si et seulement si B est orthogonale. Vrai (car $O(n)$ est un groupe).

42. Toute matrice $A \in SO(3)$ représente une rotation autour d'un axe. Vrai.

43. Tout projecteur orthogonal P appartient au groupe orthogonal $O(n)$. Faux (en général un projecteur n'est pas inversible).

Chapitre 12

45. Une forme bilinéaire symétrique de signature (p, q) sur $\mathbb{R}^n$ est non-dégénérée si et seulement si $p + q = n$. Vrai.

46. Le théorème de Sylvester implique que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors ses valeurs propres sont ± 1 ou 0. Faux.

47. Si (V, g) un espace euclidien, alors une base de Sylvester est une base orthonormée. Vrai.

48. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive, alors toute matrice congruente à A est également définie positive. Vrai.

49. Pour tout sous-espace vectoriel W d'un espace pseudo-euclidien (V, g) on a $V = W \oplus W_g^{\perp}$. Faux (par exemple un vecteur isotrope est orthogonal à lui-même).

50. Si x, y sont deux vecteurs de l'espace de Minkowski $\mathbb{E}^{1,d}$ alors on a toujours l'inégalité de Cauchy-Schwartz inversée $g(x, y)^2 \geq g(x, x)g(y, y)$. Faux (mais c'est vrai si on suppose que les vecteurs sont de type temps).

51. Si une forme bilinéaire symétrique réelle est à la fois semi-définie positive et non dégénérée, alors elle est définie positive. Vrai.

Chapitre 13

52. Deux formes quadratiques sur $\mathbb{C}^n$ sont isométriques si et seulement si elles ont le même rang. Vrai (vu aux exercices).

53. Le produit scalaire Hermitien standard sur $\mathbb{C}^n$ s'écrit $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_i w_i$. Faux (il s'écrit $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n \overline{z}_i w_i$).

54. L'endomorphisme $z \mapsto Az$ de $\mathbb{C}^n$ associé à la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est autoadjoint pour le produit scalaire Hermitien standard sur $\mathbb{C}^n$ si et seulement si A est une matrice hermitienne, i.e. $\overline{A}^{\top} = A$. Vrai.

55. Toute matrice hermitienne est diagonalisable. Vrai (par le théorème spectral).

56. Le produit scalaire hermitien d'un vecteur par lui-même est toujours un nombre purement imaginaire. Faux (c'est un nombre réel).

57. Si T est un opérateur normal, alors $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ pour tout vecteur v de l'espace. Vrai.

58. Les valeurs propres d'un opérateur normal sont toujours réelles. Faux.

59. Les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint sont toujours réelles. Vrai.

60. Les valeurs propres d'une matrice unitaire $A \in U(n)$ sont ± 1. Faux (mais les valeurs propres sont en général des nombres complexes de module 1).