Quiz pour le cours d'algèbre linéaire 2 (printemps 2024).

- Pour chaque question répondre par vrai ou faux.
- Sur une feuille indiquer pour vous-même un "degré de certitude" (disons de 0 à 5, avec '5' signifiant que vous êtes certain·e·s de votre réponse).
- Sauriez-vous donner une preuve ou un contre-exemple dans chaque cas ?

Chapitre 8 (pour révision)

1. Le vecteur nul $0 \in V$ est vecteur propre de toute matrice A car $A \cdot 0 = 0$.
2. λ est valeur propre de A si et seulement si
$$\ker(A - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \{0\}.$$
3. Si $f \in \mathcal{L}(V)$ est inversible, alors $0 \in K$ est valeur propre de f.
4. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants.
5. Si f est un endomorphisme, alors $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels invariants par f.
6. Tout espace propre d'un endomorphisme f est invariant par cet endomorphisme.
7. La multiplicité algébrique de toute valeur propre est toujours inférieure ou égale à sa multiplicité géométrique.

Chapitre 9

8. Un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ admet au moins un vecteur propre.
9. Le théorème fondamental de l'algèbre entraîne que pour toute matrice complexe $A \in M_n(\mathbb{C})$, la multiplicité algébrique de chaque valeur propre est égale à la multiplicité géométrique.
10. Si v est vecteur propre de la matrice A, il l'est aussi pour $p(A)$, pour tout polynôme $p(t)$.
11. Toute matrice complexe $A \in M_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire $A = D \cdot N$ où D est diagonalisable et N est nilpotente et ces deux matrices commutent.
12. Si $p(A) = 0$, les racines du polynôme p sont valeurs propres de A.
13. Si $p(A) = 0$, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de $p(t)$.
14. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est un polynôme annulateur de cet endomorphisme.
15. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme divise son polynôme minimal.

16. Dans les questions suivantes, on suppose que A est une matrice réelle de polynôme caractéristique $\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2)$. Que peut-on dire de A ?

    a.) A est de taille 3×3.

    b.) A est diagonalisable.

    c.) Les valeurs propres de A sont exactement 1 et 2.

    d.) $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$.

    e.) $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$.

    f.) A est inversible.

    g.) $(A - I_3)^2(A - 2I_3) = 0$.

17. Toute matrice carrée réelle est triangulable car il suffit de la considérer comme matrice complexe et dans $\mathbb{C}$ toute matrice est triangulable.

18. Une matrice diagonalisable qui est nilpotente est nulle.

19. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

20. Si une matrice est diagonalisable, alors la multiplicité géométrique de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique.

21. Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ qui est non diagonalisable n'a aucune valeur propre réelle.

22. Si λ est valeur propre d'une matrice complexe A, alors le nombre de blocs de Jordan de A associés à λ est égal à la multiplicité géométrique de A.

23. Si $f \in \mathcal{L}(V)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie (non nulle), alors il existe toujours un sous-espace vectoriel $W \subset V$ de dimension 1 ou 2 qui est invariant par f.

24. Deux matrices complexes sont semblables si et seulement si elles ont la même forme normale de Jordan.

25. Deux matrices complexes sont semblables si et seulement si elles ont la même base de Jordan.

Chapitre 10

26. Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $v \in V$ non nul, il existe $\phi \in V^*$ tel que $\phi(v) = 1$ (on rappelle que V^* est le dual de V).

27. Soit V un K-espace vectoriel. Pour tout $v \in V$ il existe $\phi \in V^*$ non nul tel que $\phi(v) = 0$.

28. Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de l'espace vectoriel V. Alors $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \in V^*$ est une base de l'espace dual V^* si et seulement la matrice $A = (a_{ij})$ est de déterminant non nul, où $a_{ij} = \phi_i(v_j)$.

29. Deux matrices carrées congruentes ont le même rang.

30. Une fonction $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique si et seulement si $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

31. Une forme quadratique est associée à une unique forme bilinéaire symétrique.

32. Pour toute forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel on peut trouver une base orthogonale.

Chapitre 11

33. Dans un espace vectoriel vectoriel euclidien, on a $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si et seulement si les vecteurs x et y sont linéairement indépendants.

34. Si W est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien V, alors pour tout $x \in V$ il existe un unique point de W à distance minimale de x.

35. Soient $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base d'un espace vectoriel euclidien V. Notons $\{u_1, \ldots, u_n\}$ la base orthonormée obtenue par Gram-Schmidt. Alors u_3 est combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.

36. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

37. Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si et seulement s'il existe une matrice orthogonale $A \in O(n)$ telle que $f(x) = Ax$.

38. Si $A \cdot B$ est une matrice orthogonale, alors A et B sont orthogonales.

39. Toute matrice orthogonale admet au moins une valeurs propre réelle.

40. Les seules valeurs propres réelles possibles d'une matrice orthogonales sont ± 1.

41. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices telles que AB est une matrice orthogonale, alors A est orthogonale si et seulement si B est orthogonale.

42. Toute matrice $A \in SO(3)$ représente une rotation autour d'un axe.

43. Tout projecteur orthogonal P appartient au groupe orthogonal $O(n)$.

Chapitre 12

45. Une forme bilinéaire symétrique de signature (p, q) sur $\mathbb{R}^n$ est non-dégénérée si et seulement si $p + q = n$.

46. Le théorème de Sylvester implique que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors ses valeurs propres sont ± 1 ou 0.

47. Si (V, g) un espace euclidien, alors une base de Sylvester pour g est une base orthonormée.

48. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive, alors toute matrice congruente à A est également définie positive.

49. Pour tout sous-espace vectoriel W d'un espace pseudo-euclidien (V, g) on a $V = W \oplus W^{\perp_g}$.

50. Si x, y sont deux vecteurs de l'espace de Minkowski $\mathbb{E}^{1,d}$ alors on a toujours l'inégalité de Cauchy-Schwartz inversée $g(x,y)^2 \geq g(x,x)g(y,y)$.

51. Si une forme bilinéaire symétrique réelle est à la fois semi-définie positive et non dégénérée, alors elle est définie positive.

Chapitre 13

52. Deux formes quadratiques sur $\mathbb{C}^n$ sont isométriques si et seulement si elles ont le même rang.

53. Le produit scalaire Hermitien standard sur $\mathbb{C}^n$ s'écrit $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_i w_i$.

54. L'endomorphisme $z \mapsto Az$ de $\mathbb{C}^n$ associé à la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est auto-adjoint pour le produit scalaire Hermitien standard sur $\mathbb{C}^n$ si et seulement si A est une matrice hermitienne, i.e. $\overline{A}^\top = A$.

55. Toute matrice hermitienne est diagonalisable.

56. Le produit scalaire hermitien d'un vecteur par lui-même est toujours un nombre purement imaginaire.

57. Si T est un opérateur normal, alors $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ pour tout vecteur v de l'espace.

58. Les valeurs propres d'un opérateur normal sont toujours réelles.

59. Les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint sont toujours réelles.

60. Les valeurs propres d'une matrice unitaire $A \in U(n)$ sont ± 1.