Examen Propédeutique d'algèbre linéaire I

6 août 2020, 8h15–11h15

Nom :

Prénom :

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- Ce cahier fait 14 pages. Vérifier que votre cahier est complet.
- Les feuilles de brouillon sont pour vos calculs, elles ne seront pas corrigées.
- Ne pas dégrafer le cahier !
- L'examen contient 19 questions, le total est de 100 points.
- Ne pas écrire au crayon, ni au stylo rouge.
- Documents autorisés: aucun !
- Appareil électronique : Selon contrat avec l'EPFL
- Pour les questions à choix multiple il n'y a qu'une réponse correcte. On compte +5 points pour une réponse correcte et -2 points pour une réponse fausse. Si vous ne savez pas répondre il faut l'indiquer (il ne vaut pas la peine de répondre au hasard).
- Pour les questions VRAI/FAUX, on compte +2 point pour vrai et -1 point pour Faux.
- A la fin de l'examen, vous laisserez votre copie sur la table, ainsi que toutes les feuilles de brouillons.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

12	13	14	15	16	17	18	19	Total	Note

Bon travail et bonne chance !

1 Questions à choix multiples

Exercice 1. [5 points.] On considère la matrice complexe

$$B = \begin{pmatrix} i & 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{C}$.

Répondre au QCM :

- ☐ Si $a \neq \pm i$ alors B est inversible.
- ☐ Si $a \neq i$ alors B n'est pas diagonalisable.
- ☐ Si $a \neq -i$ alors B n'est pas diagonalisable.
- ☐ B est diagonalisable quel que soit $a \in \mathbb{C}$.
- ☐ ne sais pas.

Exercice 2. [5 points.] Quel est le polynôme minimal de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- ☐ $\mu_A(t) = (t-2)^2(t-1)^2$.
- ☐ $\mu_A(t) = (t-2)(t-1)^2$.
- ☐ $\mu_A(t) = (t-2)^2(t-1)$.
- ☐ $\mu_A(t) = (t-2)(t-1)$.
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 3. [5 points.] On considère l'application déterminant sur l'espace vectoriel des 2×2 matrices.
Laquelle parmi les affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ n'est pas une forme quadratique.
- ☐ $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique définie positive.
- ☐ $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique et sa signature est $(p, q) = (1, 1)$.
- ☐ $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique et sa signature est $(p, q) = (2, 2)$.
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 4. [5 points.] Soit $A \in M_n(K)$ une matrice dont les polynômes caractéristique et minimal sont

$$\chi_A(t) = (t-5)^3(t-2)^2 \qquad \text{et} \qquad \mu_A(t) = (t-5)^2(t-2)^2.$$

Quelle est la forme canonique de Jordan A' de A ?

☐ $A' = J_3(5) \oplus J_2(2)$.

☐ $A' = J_2(5) \oplus J_1(5) \oplus J_2(2)$.

☐ $A' = J_2(5) \oplus J_1(5) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2)$.

☐ $A' = J_2(5) \oplus J_3(2)$.

☐ Ne sais pas.

Exercice 5. [5 points.] Quelle est la valeur de la trace de A^9, où $A = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$?

☐ $\mathrm{Tr}(A^9) = 2560$

☐ $\mathrm{Tr}(A^9) = 0$

☐ $\mathrm{Tr}(A^9) = 2$

☐ $\mathrm{Tr}(A^9) = -2$

☐ Ne sais pas

Exercice 6. [5 points.]
Soit $A \in O(n)$, c'est-à-dire A est une matrice orthogonale. Laquelle parmi les affirmations suivantes est *fausse* ?

☐ $A^{-1} = A^\top$.

☐ A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

☐ Toute valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ vaut ± 1.

☐ Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

☐ Ne sais pas

Exercice 7. [5 points.]
Soit $f \in \mathcal{L}(V)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps K. On suppose qu'il existe un polynôme $p(t) \in K[t]$ scindé à racines simples, et qui annule f.

Laquelle parmi les affirmations suivantes est correcte?

☐ Le théorème de Cayley-Hamilton implique que le polynôme caractéristique $\chi_f(t)$ divise $p(t)$.

☐ Sous ces hypothèses, f est toujours diagonalisable.

☐ f est diagonalisable si et seulement si $p(t)$ est le polynôme minimal.

☐ f est diagonalisable dans le cas où $K = \mathbb{C}$ mais pas en général.

☐ Ne sais pas

Exercice 8. [5 points.]
On considère la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{C}^3$ où

$$v_1 = (1, i, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (0, i, 1).$$

On note $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base duale de $\mathcal{B}$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

☐ $\varphi_1(e_3) = 0.$

☐ $\varphi_1(e_3) = \frac{1}{2}.$

☐ $\varphi_3(e_3) = \frac{i}{2}.$

☐ $\varphi_2(e_3) = \frac{1}{2}.$

☐ Ne sais pas

Exercice 9. [5 points.] Soit $A \in M_5(\mathbb{R})$ une matrice différente de l'identité et dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(t) = (t-1)^5$.

Laquelle des affirmation suivantes est correcte ?

☐ La trace de A est un nombre entier compris entre 0 et 4.

☐ A n'est pas diagonalisable.

☐ A est congruente à I_5.

☐ $A - I_5$ n'est pas nilpotente.

☐ Ne sais pas

2 Vrai ou Faux ?

Pour chaque question dans cette partie , marquer (sans faire de ratures) la VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse). On compte +2 points par réponse correcte et −1 par réponse fausse.

Exercice 10. [2 points.]
Soit V un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie. Alors pour tout $\varphi \in V^*$ non nul on a $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(V) - 1$.

☐ VRAI

☐ FAUX

Exercice 11. [2 points.]
La somme de deux matrices nilpotentes est nilpotente.

☐ VRAI

☐ FAUX

Exercice 12. [2 points.]
Si D est une matrice diagonalisable et N est nilpotente, alors D et N commutent.

☐ VRAI

☐ FAUX

Exercice 13. [2 points.]
Soit $Q : V \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie sur un espace vectoriel réel V de dimension finie, et soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de V. Alors Q est identiquement nulle si et seulement si $Q(v_i) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

☐ VRAI

☐ FAUX

Exercice 14. [2 points.]
Une matrice $A \in M_n(K)$ est inversible si et seulement si son polynôme minimal vérifie $\mu_A(0) \neq 0$.

☐ VRAI

☐ FAUX

Exercice 15. [2 points.]
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ un endomorphisme quelconque de $\mathbb{C}^n$. Alors tout vecteur de $\mathbb{C}^n$ est somme de vecteurs propres généralisés pour f.

☐ VRAI

☐ FAUX

Exercice 16. [2 points.]
Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(A)$.

☐ VRAI

☐ FAUX

3 Définitions et théorèmes

Exercice 17. [15 points.]
Donner les énoncés précis des théorèmes et définitions suivantes :

a) Définir la notion de vecteur propre généralisé associé à un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(V)$.

b) Que dit le théorème spectral ?

c) Soit W un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien. Ecrire la formule qui donne la projection orthogonale P_W de V sur W ? Expliquer ensuite rapidement pourquoi P_W est linéaire.

d) Définir la notion de *polynôme minimal* d'un endomorphisme f d'un K-espace vectoriel V.

e) Définir la notion de *couplage non dégénéré* entre deux K-espaces vectoriels V et W.

4 Questions ouvertes

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.

Exercice 18. [8 points.]

On considère la matrice $G \in M_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Expliquer (sans faire de calcul) pourquoi il existe une matrice orthogonale $P \in O(3)$ telle que $P^\top G P$ est une matrice diagonale.

(b) Calculer une telle matrice.

Exercice 19. [18 points.]

(a) Définir soigneusement la notion d'espace vectoriel euclidien.

(b) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

(c) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

(d) Enoncer l'inégalité du triangle pour la norme dans un espace vectoriel euclidien.

(e) Démontrer l'inégalité du triangle.

(f) Définir la notion d'angle entre deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien et expliquer pourquoi cette notion est bien définie.

(g) Prouver l'énoncé suivant, ou donner un contre-exemple si vous pensez qu'il est faux : *Toute famille de vecteurs non nuls et deux-à-deux orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien est une famille libre.*