Prof. Marc Troyanov
Algèbre linéaire avancée II - Physique
Mardi 29 juin 2021
de 8h15 à 11h15

1

Theodule

SCIPER : **3.14159** SIGNATURE

Signature :

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et signer votre examen.
- Documents autorisés: aucun ! Aucun appareil électronique (machine à calculer, téléphone, tablette, montre connectée...)
- L'examen contient 9 questions à choix multiples, 7 questions Vrai/Faux et 4 problèmes ouverts. Le total est de 100 points.
- Pour les questions à choix multiple il n'y a qu'une réponse correcte. On compte +5 points pour une réponse correcte et -2 points pour une réponse fausse. Si vous ne savez pas répondre il faut l'indiquer (il ne vaut pas la peine de répondre au hasard).
- Pour les questions Vrai/Faux on compte + 2 pour une bonne réponse et -1 pour une mauvaise.
- Ce cahier fait 16 pages. Vérifier que votre cahier est complet.
- Les feuilles de brouillon sont pour vos calculs, elles ne seront pas corrigées.
- Ne pas dégrafer le cahier.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** (ne pas écrire au crayon, ni au stylo rouge).
- Si vous changez d'avis dans un QCM, effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- A la fin de l'examen, laissez votre copie sur la table, ainsi que toutes les feuilles de brouillons.

Première partie, questions à choix multiple.

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question. On compte +5 points par réponse correcte et −2 par réponse fausse. L'option "ne sait pas" donne 0 point.

Question 1 Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

Parmi les assertions suivantes, laquelle est fausse *?*

- ☐ Si $\phi, \psi \in V^*$ sont non nuls, alors $\dim(\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{Ker}(\psi)) = n - 2$.
- ☐ Si $v \in V$ est un vecteur non nul, alors il existe $\psi \in V^*$ tel que $\psi(v) = 1$.
- ☐ Étant donné $v \in V \setminus \{0\}$ fixé, il existe $\psi \in V^*$ non nulle tel que $\psi(v) = 0$.
- ☐ Pour tout covecteur $\phi \in V^*$ non nul, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = n - 1$.
- ☐ Ne sais pas

Question 2 On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Laquelle parmi les affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ La matrice B est nilpotente.
- ☐ La forme normale de Jordan $J[B]$ possède un unique blocs de Jordan.
- ☐ La forme normale de Jordan $J[B]$ possède exactement deux blocs de Jordan.
- ☐ La matrice B est diagonalisable.
- ☐ Ne sais pas

Question 3 Soit $\mathcal{P}_k$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq k$ (on suppose $k \geq 2$). On considère la fonction $Q : \mathcal{P}_k \to \mathbb{R}$ définie pour tout polynôme $h(x)$ par

$$Q(h) = (h'(\alpha))^2.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h'(x)$ est le polynôme dérivé de $h(x)$.

Laquelle parmi les affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ Q est une forme quadratique définie positive.
- ☐ Q est une forme quadratique et sa signature dépend du choix de α.
- ☐ Q est une forme quadratique et sa signature est $(p, q) = (1, 0)$.
- ☐ Q n'est pas une forme quadratique sur $\mathcal{P}_2$.
- ☐ Ne sais pas

Question 4 Soit $A \in M_6(K)$ une matrice dont les polynômes caractéristique et minimal sont

$$\chi_A(t) = (t-3)^4(t+2)^2 \qquad \text{et} \qquad \mu_A(t) = (t-3)^3(t+2)$$

Quelle est la forme canonique de Jordan $J[A]$ de A ?

- ☐ $J[A] = J_3(3) \oplus J_1(3) \oplus J_1(-2) \oplus J_1(-2)$.
- ☐ $J[A] = J_3(3) \oplus J_3(-2)$.
- ☐ $J[A] = J_4(3) \oplus J_2(-2)$.
- ☐ $J[A] = J_2(3) \oplus J_2(3) \oplus J_2(-2)$.
- ☐ Ne sais pas

Question 5 Quel est le terme général de la récurrence linéaire

$$x_{k+2} = 2x_k + x_{k+1}$$

avec conditions initiales $x_0 = 2,\ \ x_1 = 1$?

- ☐ $x_k = (-1)^k + 2^k$
- ☐ $x_k = (-1)^k + (-2)^k$
- ☐ $x_k = \frac{1}{3}(5 + (-2)^k)$
- ☐ $x_k = 2^k - 1$
- ☐ Ne sais pas

Question 6 Soit $V \subset \mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1,1,0,0), \qquad v_2 = \big(2,0,1,1\big), \qquad v_3 = (2,0,0,1).$$

On note $\{u_1, u_2, u_3\}$ la base orthonormée de V obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Laquelle parmi les affirmation suivante est correcte ?

- ☐ $u_2 = \frac{1}{2}\big(1,-1,1,1\big)$.
- ☐ $u_2 = \frac{1}{2}\big(1,1,1,-1\big)$.
- ☐ $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)$.
- ☐ $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1,-1,-1,-1\big)$.
- ☐ Ne sais pas

Question 7 Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

Laquelle parmi les affirmations suivantes est correcte?

- ☐ La somme de deux vecteurs isotropes est toujours un vecteur isotrope.
- ☐ Q est définie positive si et seulement s'il existe une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ telle que $Q(v_i) > 0$ pour tout i.
- ☐ Une base de Sylvester contient un vecteur isotrope si et seulement si Q est dégénérée.
- ☐ Une base de Sylvester ne contient jamais de vecteur isotrope.
- ☐ Ne sais pas

Question 8 On considère la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{C}^3$ où

$$v_1 = (2, i, 1), \qquad v_2 = (1, 0, -1), \qquad v_3 = (i, 0, 1),$$

où $i = \sqrt{-1}$. On note $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base duale de $\mathcal{B}$ et $w = (1, i, 1 + i)$.

Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

- ☐ $\varphi_2(w) = -i$.
- ☐ $\varphi_1(w) = 3 - i$.
- ☐ $\varphi_1(w) = 4$.
- ☐ $\varphi_3(w) = i$.
- ☐ Ne sais pas

Question 9 Laquelle parmi les affirmation suivantes concernant les matrice symétriques réelles $A \in M_n(\mathbb{R})$ est correcte ? (on suppose $n \geq 2$).

- ☐ Si la matrice symétrique A n'a qu'une valeur propre réelle λ alors son polynôme minimal est $\mu_A(t) = (t - \lambda)^n$.
- ☐ Le polynôme minimal d'une matrice symétrique A ne possède pas de racine multiple.
- ☐ Il existe une matrice symétrique réelle A et une valeur propre $\lambda \in \sigma(A)$ telle que la multiplicité géométrique de λ est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique.
- ☐ Il existe une matrice symétrique A dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé.
- ☐ Ne sais pas

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question dans cette partie, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse). On compte $+2$ points par réponse correcte et -1 par réponse fausse.

Question 10 Soit V un espace vectoriel euclidien de dimension n et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de dimension m. Soient $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ une base orthonormée de W et $x \in V$. Alors

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle x, w_i \rangle^2 \quad \text{si et seulement si} \quad x \in W.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 Soient $B, N \in M_n(K)$ deux matrices qui commutent. Supposons que B est inversible et N est nilpotente. Alors $A = B + N$ est inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont des matrice symétriques.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de V. Soient $\psi_1, \cdots, \psi_n$ des formes linéaires sur V. Alors elles forment une base de V^* si et seulement la matrice $(\psi_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 Pour toute matrice inversible $A \in M_n(\mathbb{C})$ on a $\chi_A(0) = \mu_A(0)$, où $\chi_A(t)$ est le polynôme caractéristique et $\mu_A(t)$ est le polynôme minimal.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 15 Pour tout sous-espace vectoriel W d'un espace vectoriel pseudo-euclidien on a toujours $V = W \oplus W^{\perp}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\delta_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ le covecteur défini par $\delta_a(p) = p(a)$. Alors $\{\delta_a, \delta_b, \delta_c\} \subset (\mathbb{R}[x])^*$ sont linéairement indépendants si et seulement si les nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont deux-à-deux distincts (on rappelle que $\mathbb{R}[x]$ est l'espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients réels en la variable x).

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert.

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 17: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

a) Définir la notion d'*espace dual* d'un espace vectoriel V sur un corps K.

b) Définir la notion de *base duale* une base $\mathcal{B}$ d'un K-espace vectoriel V de dimension finie, puis expliquer pourquoi toute base de V admet une et une seule base duale.

c) Définir la notion de *signature* d'une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel de dimension finie, puis énoncer soigneusement le théorème (d'inertie) de Sylvester.

d) Définir la notion de *forme hermitienne* sur un espace vectoriel complexe V. Définir ensuite la notion de *produit scalaire hermitien.*

e) Donner deux exemples de produit scalaire hermitien.

Question 18: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

(a) Définir ce qu'est l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{E}^{1,d}$.

(b) Définir les notions de vecteurs temps, espace et isotrope.

(c) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwartz inversée pour deux vecteurs de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{E}^{1,d}$ (en précisant les conditions de validité sur les vecteurs).

(d) Prouver cette inégalité.

Question 19: *Cette question est notée sur 11 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11

(a) Définir le notion de *sous-espace invariant* pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel complexe V.

(b) Prouver que si $f, g \in \mathcal{L}(V)$ commutent (i.e. $f \circ g = g \circ f$), alors $\mathrm{Ker}(g)$ est invariant par f.

(c) Définir la notion de *sous-espace caractéristique* (aussi appelé *sous-espace propre généralisé*) d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(V)$.

(d) Prouver tout sous-espace caractéristique de f est invariant par f.

(e) Expliquer le lien entre la dimension de l'espace caractéristique associé à une valeur propre λ et la multiplicité algébrique de cette valeur propre.

Question 20: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

Le but de cet exercice est de jordaniser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Donner la forme normale de Jordan $J[A]$.

(b) Trouver une base de Jordan.

(c) Donner une matrice P telle que $P^{-1}AP = J[A]$.

Brouillon

Brouillon