

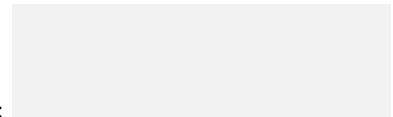


Prof. Marc Troyanov  
Algèbre linéaire avancée II - Physique  
Mardi 29 juin 2021  
de 8h15 à 11h15













# Theodule

SCIPER : **3.14159** SIGNATURE

Signature :



- Posez votre carte d'étudiant sur la table et signer votre examen.
- Documents autorisés: aucun ! Aucun appareil électronique (machine à calculer, téléphone, tablette, montre connectée...)
- L'examen contient 9 questions à choix multiples, 7 questions Vrai/Faux et 4 problèmes ouverts. Le total est de 100 points.
- Pour les questions à choix multiple il n'y a qu'une réponse correcte. On compte +5 points pour une réponse correcte et -2 points pour une réponse fausse. Si vous ne savez pas répondre il faut l'indiquer (il ne vaut pas la peine de répondre au hasard).
- Pour les questions Vrai/Faux on compte + 2 pour une bonne réponse et -1 pour une mauvaise.
- Ce cahier fait 16 pages. Vérifier que votre cahier est complet.
- Les feuilles de brouillon sont pour vos calculs, elles ne seront pas corrigées.
- Ne pas dégrafer le cahier.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** (ne pas écrire au crayon, ni au stylo rouge).
- Si vous changez d'avis dans un QCM, effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- A la fin de l'examen, laissez votre copie sur la table, ainsi que toutes les feuilles de brouillons.

| Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien   |   |   |
|--|---|---|
| choisir une réponse   select an answer<br>Antwort auswählen  | ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer<br>NICHT Antwort auswählen        | Corriger une réponse   Correct an answer<br>Antwort korrigieren   |
|     |  |   |
| ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte   |   |   |
|       |   |   |

**Première partie, questions à choix multiple.**

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question. On compte +5 points par réponse correcte et -2 par réponse fausse. L'option "ne sait pas" donne 0 point.

**Question 1** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$ .

Parmi les assertions suivantes, laquelle est fausse ?

- ☐ Si  $\phi, \psi \in V^*$  sont non nuls, alors  $\dim(\text{Ker}(\phi) \cap \text{Ker}(\psi)) = n - 2$ .
- ☐ Si  $v \in V$  est un vecteur non nul, alors il existe  $\psi \in V^*$  tel que  $\psi(v) = 1$ .
- ☐ Étant donné  $v \in V \setminus \{0\}$  fixé, il existe  $\psi \in V^*$  non nulle tel que  $\psi(v) = 0$ .
- ☐ Pour tout covecteur  $\phi \in V^*$  non nul, on a  $\dim(\text{Ker}(\phi)) = n - 1$ .
- ☐ Ne sais pas

---

**Question 2** On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Laquelle parmi les affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ La matrice  $B$  est nilpotente.
- ☐ La forme normale de Jordan  $J[B]$  possède un unique blocs de Jordan.
- ☐ La forme normale de Jordan  $J[B]$  possède exactement deux blocs de Jordan.
- ☐ La matrice  $B$  est diagonalisable.
- ☐ Ne sais pas

---

**Question 3** Soit  $\mathcal{P}_k$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré  $\leq k$  (on suppose  $k \geq 2$ ). On considère la fonction  $Q : \mathcal{P}_k \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout polynôme  $h(x)$  par

$$Q(h) = (h'(\alpha))^2.$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $h'(x)$  est le polynôme dérivé de  $h(x)$ .

Laquelle parmi les affirmations suivantes est vraie ?

- ☐  $Q$  est une forme quadratique définie positive.
  - ☐  $Q$  est une forme quadratique et sa signature dépend du choix de  $\alpha$ .
  - ☐  $Q$  est une forme quadratique et sa signature est  $(p, q) = (1, 0)$ .
  - ☐  $Q$  n'est pas une forme quadratique sur  $\mathcal{P}_2$ .
  - ☐ Ne sais pas
-



**Question 4** Soit  $A \in M_6(K)$  une matrice dont les polynômes caractéristique et minimal sont

$$\chi_A(t) = (t-3)^4(t+2)^2 \quad \text{et} \quad \mu_A(t) = (t-3)^3(t+2)$$

Quelle est la forme canonique de Jordan  $J[A]$  de  $A$  ?

- ☐  $J[A] = J_3(3) \oplus J_1(3) \oplus J_1(-2) \oplus J_1(-2).$   
☐  $J[A] = J_3(3) \oplus J_3(-2).$   
☐  $J[A] = J_4(3) \oplus J_2(-2).$   
☐  $J[A] = J_2(3) \oplus J_2(3) \oplus J_2(-2).$   
☐ Ne sais pas

---

**Question 5** Quel est le terme général de la récurrence linéaire

$$x_{k+2} = 2x_k + x_{k+1}$$

avec conditions initiales  $x_0 = 2, x_1 = 1$  ?

- ☐  $x_k = (-1)^k + 2^k$   
☐  $x_k = (-1)^k + (-2)^k$   
☐  $x_k = \frac{1}{3}(5 + (-2)^k)$   
☐  $x_k = 2^k - 1$   
☐ Ne sais pas

---

**Question 6** Soit  $V \subset \mathbb{R}^4$  le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (2, 0, 1, 1), \quad v_3 = (2, 0, 0, 1).$$

On note  $\{u_1, u_2, u_3\}$  la base orthonormée de  $V$  obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .

Laquelle parmi les affirmation suivante est correcte ?

- ☐  $u_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1).$   
☐  $u_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1).$   
☐  $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, 1).$   
☐  $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, -1, -1).$   
☐ Ne sais pas

---

**Question 7** Soit  $Q$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$ .

Laquelle parmi les affirmations suivantes est correcte?

- ☐ La somme de deux vecteurs isotropes est toujours un vecteur isotrope.  
☐  $Q$  est définie positive si et seulement s'il existe une base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  telle que  $Q(v_i) > 0$  pour tout  $i$ .  
☐ Une base de Sylvester contient un vecteur isotrope si et seulement si  $Q$  est dégénérée.  
☐ Une base de Sylvester ne contient jamais de vecteur isotrope.  
☐ Ne sais pas



---

**Question 8** On considère la base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  de  $\mathbb{C}^3$  où

$$v_1 = (2, i, 1), \quad v_2 = (1, 0, -1), \quad v_3 = (i, 0, 1),$$

où  $i = \sqrt{-1}$ . On note  $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  la base duale de  $\mathcal{B}$  et  $w = (1, i, 1 + i)$ .

Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

- ☐  $\varphi_2(w) = -i$ .
- ☐  $\varphi_1(w) = 3 - i$ .
- ☐  $\varphi_1(w) = 4$ .
- ☐  $\varphi_3(w) = i$ .
- ☐ Ne sais pas

---

**Question 9** Laquelle parmi les affirmations suivantes concernant les matrices symétriques réelles  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est correcte ? (on suppose  $n \geq 2$ ).

- ☐ Si la matrice symétrique  $A$  n'a qu'une valeur propre réelle  $\lambda$  alors son polynôme minimal est  $\mu_A(t) = (t - \lambda)^n$ .
  - ☐ Le polynôme minimal d'une matrice symétrique  $A$  ne possède pas de racine multiple.
  - ☐ Il existe une matrice symétrique réelle  $A$  et une valeur propre  $\lambda \in \sigma(A)$  telle que la multiplicité géométrique de  $\lambda$  est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique.
  - ☐ Il existe une matrice symétrique  $A$  dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé.
  - ☐ Ne sais pas
-



## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question dans cette partie, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse). On compte +2 points par réponse correcte et  $-1$  par réponse fausse.

**Question 10** Soit  $V$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$  et  $W \subset V$  un sous-espace vectoriel de dimension  $m$ . Soient  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$  une base orthonormée de  $W$  et  $x \in V$ . Alors

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m \langle x, w_i \rangle^2 \quad \text{si et seulement si } x \in W.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 11** Soient  $B, N \in M_n(K)$  deux matrices qui commutent. Supposons que  $B$  est inversible et  $N$  est nilpotente. Alors  $A = B + N$  est inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 12** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  est hermitienne si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont des matrice symétriques.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 13** Soit  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $V$ . Soient  $\psi_1, \dots, \psi_n$  des formes linéaires sur  $V$ . Alors elles forment une base de  $V^*$  si et seulement si la matrice  $(\psi_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  est inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 14** Pour toute matrice inversible  $A \in M_n(\mathbb{C})$  on a  $\chi_A(0) = \mu_A(0)$ , où  $\chi_A(t)$  est le polynôme caractéristique et  $\mu_A(t)$  est le polynôme minimal.

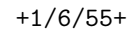
☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 15** Pour tout sous-espace vectoriel  $W$  d'un espace vectoriel pseudo-euclidien on a toujours  $V = W \oplus W^\perp$ .

☐ VRAI ☐ FAUX

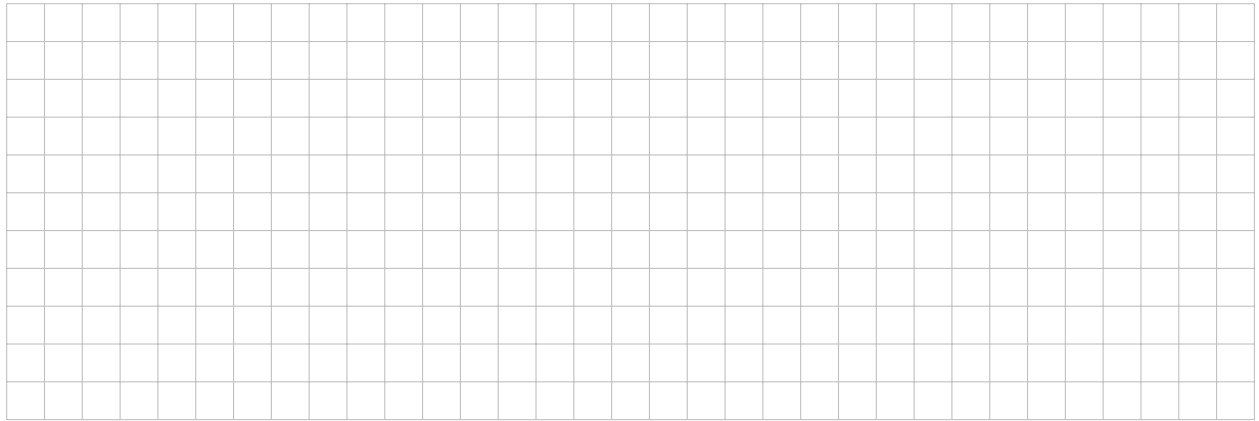
**Question 16** Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $\delta_a : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$  le covecteur défini par  $\delta_a(p) = p(a)$ . Alors  $\{\delta_a, \delta_b, \delta_c\} \subset (\mathbb{R}[x])^*$  sont linéairement indépendants si et seulement si les nombres  $a, b, c \in \mathbb{R}$  sont deux-à-deux distincts (on rappelle que  $\mathbb{R}[x]$  est l'espace vectoriel de tous les polynômes à coefficients réels en la variable  $x$ ).

☐ VRAI ☐ FAUX



Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10



- d) Définir la notion de *forme hermitienne* sur un espace vectoriel complexe  $V$ . Définir ensuite la notion de *produit scalaire hermitien*.



- e) Donner deux exemples de produit scalaire hermitien.

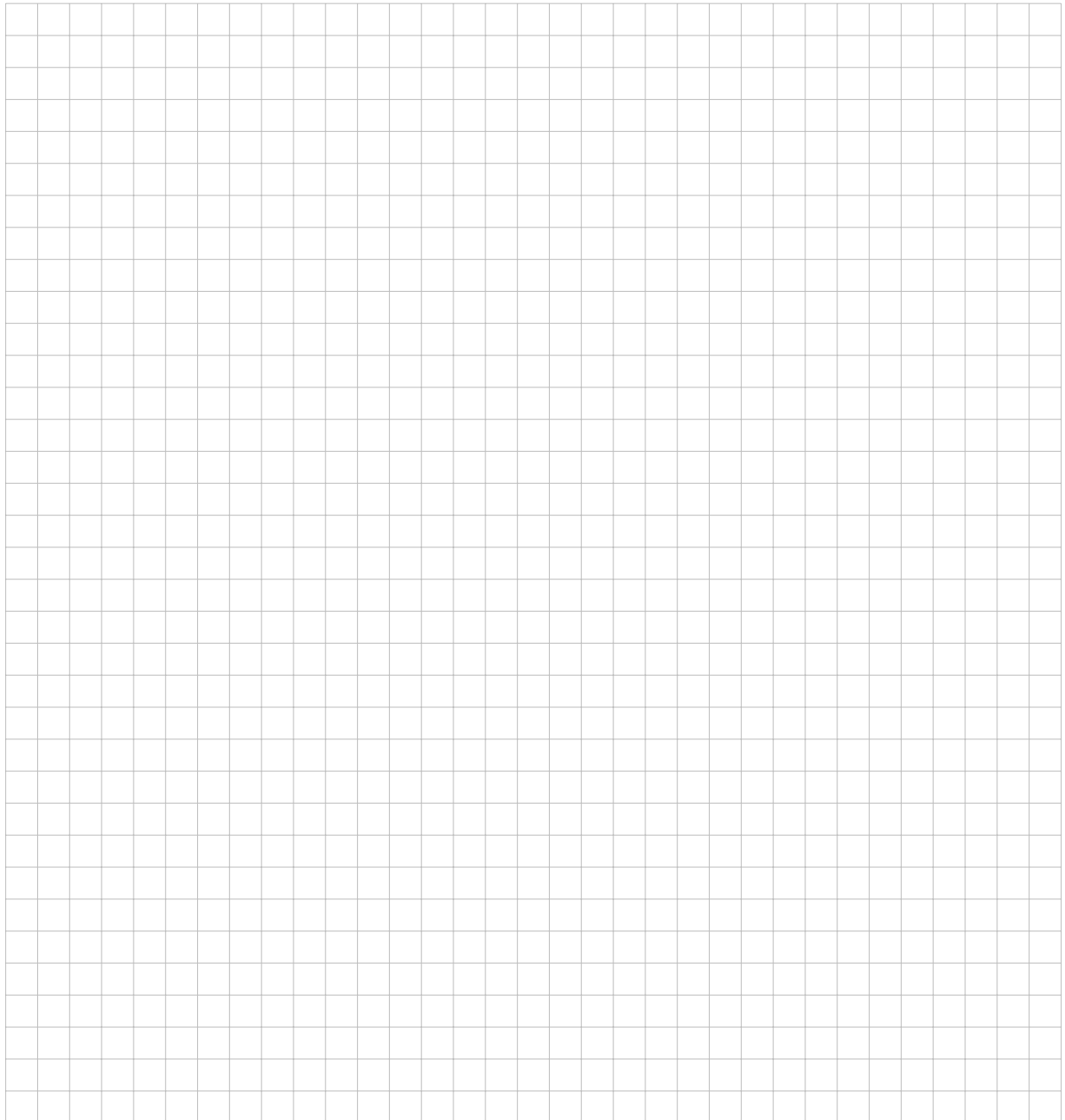




**Question 18:** *Cette question est notée sur 10 points.*

|                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| 0                    | 1                    | 2                    | 3                    | 4                    | 5                    | 6                    | 7                    | 8                    | 9                    | 10                   |                      |                      |                      |                      |

- (a) Définir ce qu'est l'espace-temps de Minkowski  $\mathbb{E}^{1,d}$ .
- (b) Définir les notions de vecteurs temps, espace et isotrope.
- (c) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwartz inversée pour deux vecteurs de l'espace-temps de Minkowski  $\mathbb{E}^{1,d}$  (en précisant les conditions de validité sur les vecteurs).
- (d) Prouver cette inégalité.

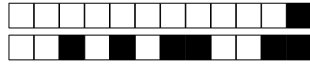






+1/9/52+

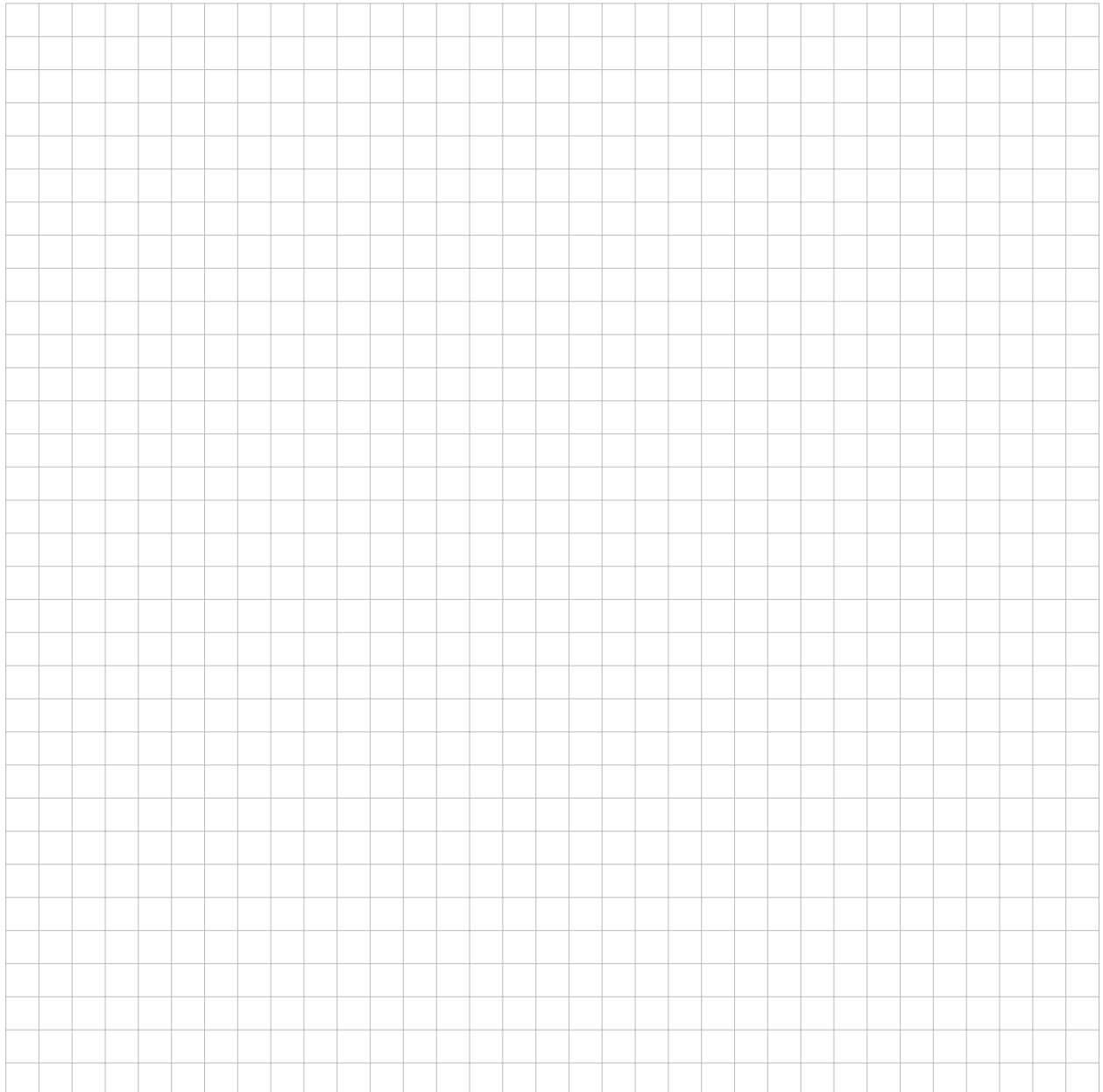




**Question 19:** *Cette question est notée sur 11 points.*

|                      |   |                      |   |                      |   |                      |   |                      |    |                      |    |
|----------------------|---|----------------------|---|----------------------|---|----------------------|---|----------------------|----|----------------------|----|
| <input type="text"/> | 0 | <input type="text"/> | 1 | <input type="text"/> | 2 | <input type="text"/> | 3 | <input type="text"/> | 4  | <input type="text"/> | 5  |
| <input type="text"/> | 6 | <input type="text"/> | 7 | <input type="text"/> | 8 | <input type="text"/> | 9 | <input type="text"/> | 10 | <input type="text"/> | 11 |

- (a) Définir le notion de *sous-espace invariant* pour un endomorphisme  $f$  d'un espace vectoriel complexe  $V$ .
- (b) Prouver que si  $f, g \in \mathcal{L}(V)$  commutent (i.e.  $f \circ g = g \circ f$ ), alors  $\text{Ker}(g)$  est invariant par  $f$ .
- (c) Définir la notion de *sous-espace caractéristique* (aussi appelé *sous-espace propre généralisé*) d'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(V)$ .
- (d) Prouver tout sous-espace caractéristique de  $f$  est invariant par  $f$ .
- (e) Expliquer le lien entre la dimension de l'espace caractéristique associé à une valeur propre  $\lambda$  et la multiplicité algébrique de cette valeur propre.







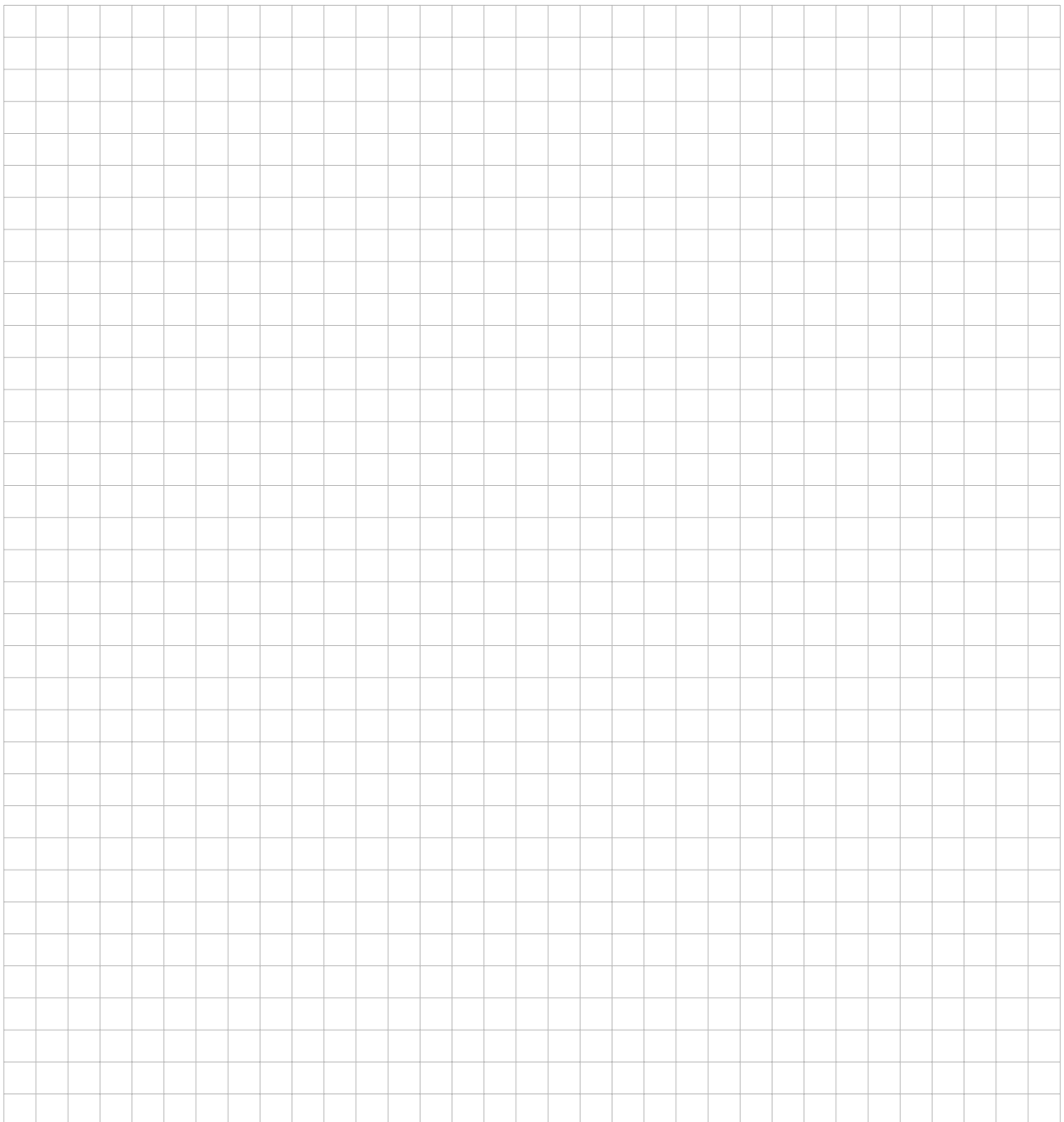
**Question 20:** *Cette question est notée sur 10 points.*

☐\_0 ☐\_1 ☐\_2 ☐\_3 ☐\_4 ☐\_5 ☐\_6 ☐\_7 ☐\_8 ☐\_9 ☐\_10

Le but de cet exercice est de jordaniser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Donner la forme normale de Jordan  $J[A]$ .
- (b) Trouver une base de Jordan.
- (c) Donner une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP = J[A]$ .









Brouillon



+1/16/45+

Brouillon