Structures algébriques (MATH-113) — Examen final différé

5 mars 2021, 12 h 15 – 15 h 15

Nom : Grothendieck Alexander

Numéro

1

SCIPER : 42

Signature : ______________________________

Ce dossier d'examen contient 7 exercices, sur 28 pages, pour un total de 100 points. Veuillez utiliser l'espace quadrillé pour vos réponses. N'écrivez **PAS** dans la marge intérieure du livret.

Veuillez rédiger vos solutions sous l'exercice correspondant : sous chaque exercice, il y a des feuilles blanches prévues à cet effet. Si vous avez besoin de davantage de papier, demandez aux surveillant(e)s, auquel cas vous devez penser à écrire vos noms et prénoms ainsi que le numéro de l'exercice que vous résolvez (sauf s'il s'agit de feuilles de brouillon). Vous n'êtes pas autorisé à utiliser vos propres feuilles de brouillon. Veuillez ne pas écrire vos solutions avec un crayon.

Il est interdit de commencer à lire l'examen avant que le signal ne soit explicitement donné. La durée totale de l'épreuve est 180 minutes. Durant les 15 dernières minutes, veuillez rester à votre place, même si vous avez fini. Les copies seront collectées par les surveillant(e)s à la fin de l'examen, et il sera alors demandé de rester assis.

La seule feuille de papier autorisée, autre que celles de ce dossier d'examen et des brouillons, est un aide-mémoire manuscrit d'une page A4 (possiblement recto-verso). Tous les documents devront être rendus à la fin de l'examen, y compris les brouillons et l'aide-mémoire.

Les livres, notes de cours, et aide-mémoire de plus d'une page ne sont **PAS** autorisés. Aucun matériel électronique n'est autorisé. Veuillez présenter votre CAMIPRO sur le bord de votre table. Aucun sac ou manteau ne doit se trouver à votre place assise.

Prenez soin de démontrer tous vos calculs, de justifier et expliquer toutes les étapes de votre raisonnement. Nous ne donnons le maximum de points que si la preuve est correcte et présente tous les détails importants.

Vous êtes autorisés à utiliser tous les résultats vus en cours ou en exercices, sauf si la question demande exactement un tel résultat ou un cas particulier évident d'un tel résultat. Quand vous utilisez un résultat du cours ou des exercices, vous devez soit le citer par nom, soit citer la proposition précisément en disant: on a vu dans le cours que "ici vient la proposition précisément".

Question:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points:	10	10	10	10	30	15	15	100
Score:								

Exercice 1 [**10 pts**]

Démontrez que $\left|\left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z} \right\}\right| = |\mathbb{N}|$.

Exercice 2 [**10 pts**]

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et soit $H \leq G$ un sous-groupe normal. Démontrez que la multiplication et l'inverse sont bien définis sur l'ensemble G/R_H, où R_H est la relation d'équivalence

$$R_H := \left\{ (g, f) \in G \times G \;\middle|\; g^{-1}f \in H \right\} \subseteq G \times G.$$

(On rappelle donc que G/R_H peut être décrit de deux manières :

1. G/R_H est l'ensemble des classes à gauche de H,
2. G/R_H est le quotient de G par la relation d'équivalence R_H.)

Exercice 3 [**10 pts**]

Soit G un groupe, $H \leq G$ un sous-groupe, $g \in N_G(H)$ un élément quelconque et $F \leq N_G(H)$ un sous-groupe. Démontrez que

(1) $\mathrm{Ad}_g^H \in \mathrm{Aut}(H)$.

(2) Ad_F^H est un homomorphisme $F \to \mathrm{Aut}(H)$.

Exercice 4 [**10 pts**]

Quelles sont les possibilités pour les ordres des éléments de S_4 ? Combien y a-t-il d'éléments de S_4 pour chaque possibilité?

Exercice 5 [**30 pts**]

Pour un nombre premier p, considérons le sous-ensemble $G \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ qui contient les matrices de forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $b \in \mathbb{F}_p$ et $a \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ sont des éléments arbitraires. Soit H le sous-ensemble constitué des éléments de G de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) (1 pt) Pour $b, d \in \mathbb{F}_p$ et $a, c \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ calculez la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) (3 pts) Démontrez que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$.

(3) (3 pts) Démontrez que H est un sous-groupe normal de G.

(4) (10 pts) Démontrez que ${}^{G}\!/_{H} \cong \left({}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}\right)^{\times}$.

(5) (10 pts) Démontrez que si $F \subseteq G$ est un sous-groupe tel que $F \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$, alors $F = H$.

(6) (3 pts) Si $p = 3$, alors, démontrez que $G \cong S_3$.

Exercice 6 [**15 pts**]

Soit $H = \langle (1\ 2), (3\ 4), (5\ 6) \rangle \leq S_6$, et posons

$$f = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) \in S_6, \quad F = \langle f \rangle \leq S_6, \quad \overline{f} = (1\ 3\ 5) \in S_6.$$

(1) (6 pts) Démontrez que $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) (4 pts) Montrez que $f \in N_G(H)$ et $\overline{f} \notin N_G(H)$.

(3) (5 pts) Montrez que $|\langle H, F \rangle| = 24$.

Exercice 7 [**15 pts**]

(1) (5 pts) Démontrez qu'il existe un seul homomorphisme non-trivial $\phi : D_{10} \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right)$.

(2) (10 pts) Démontrez que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\phi D_{10}$ contient un sous-groupe normal N tel que $|N| = 15$.