Structures algébriques (MATH-113) — Examen final

22 janvier 2021, 8 h 15 – 11 h 15

Nom : Grothendieck Alexander

SCIPER : 42

Signature : ______________________________

Numéro

1

Ce dossier d'examen contient 8 exercices, sur 20 pages, pour un total de 100 points. Veuillez utiliser l'espace quadrillé pour vos réponses. N'écrivez **PAS** dans la marge intérieure du livret

Veuillez rédiger vos solutions sous l'exercice correspondant : sous chaque exercice, il y a des feuilles blanches prévues à cet effet. Si vous avez besoin de davantage de papier, demandez aux surveillant(e)s, auquel cas vous devez penser à écrire vos noms et prénoms ainsi que le numéro de l'exercice que vous résolvez (sauf s'il s'agit de feuilles de brouillon). Vous n'êtes pas autorisé à utiliser vos propres feuilles de brouillon. Veuillez ne pas écrire vos solutions avec un crayon.

Il est interdit de commencer à lire l'examen avant que le signal ne soit explicitement donné. La durée totale de l'épreuve est 180 minutes. Durant les 15 dernières minutes, veuillez rester à votre place, même si vous avez fini. Les copies seront collectées par les surveillant(e)s à la fin de l'examen, et il sera alors demandé de rester assis.

La seule feuille de papier autorisée, autre que celles de ce dossier d'examen et des brouillons, est un aide-mémoire manuscrit d'une page A4 (possiblement recto-verso). Tous les documents devront être rendus à la fin de l'examen, y compris les brouillons et l'aide-mémoire.

Les livres, notes de cours, et aide-mémoire de plus d'une page ne sont **PAS** autorisés. Aucun matériel électronique n'est autorisé. Veuillez présenter votre CAMIPRO sur le bord de votre table. Aucun sac ou manteau ne doit se trouver à votre place assise.

Prenez soin de démontrer tous vos calculs, de justifier et expliquer toutes les étapes de votre raisonnement. Nous ne donnons le maximum de points que si la preuve est correcte et présente tous les détails importants.

Vous êtes autorisés à utiliser tous les résultats vus en cours ou en exercices, sauf si la question demande exactement un tel résultat ou un cas particulier évident d'un tel résultat. Quand vous utilisez un résultat du cours ou des exercices, vous devez soit le citer par nom, soit citer la proposition précisément en disant: on a vu dans le cours que "ici vient la proposition précisément".

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Points:	5	12	8	10	15	18	17	15	100
Score:									

Exercice 1 [**5 pts**]

Démontrez que $|\mathbb{Z} \setminus \{0\}| = |\mathbb{Z}|$.

Exercice 2 [**12 pts**]

(1) Soit $H \leq G$ un sous-groupe. Donnez la définition du normalisateur $N_G(H)$ de H dans G.

(2) Soient $H \leq G$ et $F \leq G$ deux sous-groupes tels que $F \subseteq N_G(H)$. Prouvez que $\langle H, F \rangle = HF$.

Exercice 3 [**8 pts**]

Soit $H \leq G$ un sous-groupe, et considérons le sous-ensemble

$$R_H := \left\{ (g, f) \in G \times G \;\middle|\; g^{-1} f \in H \right\} \subseteq G \times G.$$

Démontrez que R_H est une relation d'équivalence sur G.

Exercice 4 [**10 pts**]

Soit $R \subseteq A \times A$ une relation d'équivalence sur un ensemble fini A. Soient $R_1, \ldots, R_t \subseteq A$ les classes d'équivalences de R (on liste toutes les classes exactement une fois, ce qui veut dire que $\forall i \neq j : R_i \neq R_j$ et $\bigcup_{i=1}^{t} R_i = A$).

(1) Donnez une formule pour $|R|$ en terme des $|R_i|$.

(2) Si $|A| = 7$ et $t = 3$, alors quelles sont les possibilités pour $|R|$?

Rappel : Il faut justifier votre réponse. Vous pouvez utiliser tout ce qui a été démontré dans le cours et en exercices, sauf la question ou une généralisation de la question elle-même.

Exercice 5 [**15 pts**]

Rappelons que pour un nombre premier p, le groupe $G = U(3, \mathbb{F}_p)$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_p)$ qui contient les matrices de forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit H le sous-ensemble constitué des éléments de G de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Pour $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}_p$ calculez la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Démontrez que H est un sous-groupe normal de G (si vous argumentez en utilisant que $Z(G) = H$, alors il faut démontrez aussi ce fait).

(3) Démontrez que ${G}/{H} \cong {\mathbb{Z}}/{p\mathbb{Z}} \times {\mathbb{Z}}/{p\mathbb{Z}}$.

Exercice 6 [**18 pts**]

Soit $n \geq 3$ un entier et soient $\tau \neq \rho \in S_n$ deux 2-cycles distincts. Démontrez que :

(1) Si τ et ρ sont à supports disjoints, alors $\langle \tau, \rho \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) Si τ et ρ ne sont pas à supports disjoints, alors $\langle \tau, \rho \rangle \cong S_3$.

Exercice 7 [**17 pts**]

Soit $G = S_7$, $h = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in G$ et $f = (2\ 5)(3\ 4)(6\ 7) \in G$.

(1) Démontrez que $f \in N_G(\langle h \rangle)$.

(2) Considérons $P = \langle h, f \rangle \subseteq S_7$. Démontrez que $P \cong D_{10}$.

Exercice 8 [**15 pts**]

Soit $G = D_{28}$ le groupe diédral à 28 éléments. Posons $H = \langle \sigma^2 \rangle \trianglelefteq G$ et $F = \langle \sigma^7, \tau \rangle$ (*vous n'avez pas besoin de démontrer que H est un sous-groupe normal de G, on l'a déjà démontré dans les exercices*).

Considérons l'homomorphisme $\mathrm{Ad}_F^H : F \to \mathrm{Aut}(H)$ de la représentation adjointe de F sur H. Calculez l'ordre de l'image de Ad_F^H, c'est-à-dire $\left|\mathrm{im}\, \mathrm{Ad}_F^H\right|$, et justifiez votre calcul.