Exercices structures algébriques
Semaine 5

EPFL, Semestre d'automne 2023

Exercice 1.
Soit G un groupe. Montrer que $e_G^{-1} = e_G$.

Exercice 2.
Soit G un groupe. Pour un élément $g \in G$ d'ordre fini on note $o(g) \in \mathbb{N}$ l'ordre de g.

1. Soit $g \in G$ and $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $g^m = e_G$ implique que $o(g)|m$.
2. Soit $g \in G$ un élément d'ordre fini ($o(g) = n < \infty$). Montrer que
$$o\left(g^r\right) = \frac{n}{\operatorname{pgcd}(n,r)} \qquad \text{pour } 0 < r < n.$$
3. Soient $g_1, \ldots, g_m \in G$ des éléments d'ordres finis commutant deux-à-deux (c'est-à-dire $g_i g_j = g_j g_i$ pour tous i, j). Montrer que
$$o\left(\prod_{i=1}^{m} g_i\right) \leq \operatorname{ppcm}\{o(g_1), \ldots, o(g_m)\},$$
où $\operatorname{ppcm}\{a_1, \ldots, a_s\}$ désigne le plus petit commun multiple des entiers naturels $a_1, \ldots, a_s$.

Exercice* 3.
1. Soit G un groupe tel que $\forall g \in G$, $g^2 = e_G$. Montrer que G est abélien.
2. Soit G un groupe non trivial d'ordre pair. Montrer qu'il existe un $g \in G$ tel que $g \neq e_G$ mais $g^2 = e_G$.

Exercice 4.
Considérer l'ensemble $G = \{0, 1, 2\}$ avec l'opération $\star : G \times G \to G$, $g \star h = |g - h|$. Vérifiez quelles conditions de la définition des groupes sont satisfaites.

Exercice 5.
(Version corrigée). Soient $a \geq b > 0$ deux entiers naturels.

1. On note r_i le reste de l'étape i de l'algorithme d'Euclide. Montrer que $r_{i+1} < \frac{r_{i-1}}{2}$.

2. Prouvez que l'algorithme d'Euclide appliqué à $\{a, b\}$ se termine en un nombre d'étapes inférieur à

$$\min\{1 + 2\log_2 a, 2 + 2\log_2 b\}.$$