Durée : 144 minutes

Algèbre linéaire
Examen
Partie commune
Automne 2023

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème composante de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.
– Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.
– Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne est définie par $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

possède une décomposition QR telle que

☐ $r_{12} = 0$. ☐ $r_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. ☐ $r_{12} = \sqrt{2}$. ☐ $r_{12} = 1$.

Question 2 : Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

deux bases ordonnées de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la deuxième ligne de P est

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 3 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \pi & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ $\det(A) = 12\pi$. ☐ $\det(A) = -6\pi$. ☐ $\det(A) = 0$. ☐ $\det(A) = \sqrt{6}\pi$.

Question 4 : La droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(-3,-7), (-2,-3), (0,3), (3,7)$ est

☐ $y = \frac{8}{7} + \frac{16}{7}x$. ☐ $y = -\frac{8}{7} + \frac{16}{7}x$. ☐ $y = \frac{16}{7} + \frac{8}{7}x$. ☐ $y = -\frac{16}{7} + \frac{8}{7}x$.

Question 5 : Soit $\mathcal{B} = \{2 - t,\ t + t^2,\ -1 + t^3,\ -1 - t + 2t^2\}$ une base ordonnée de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. La quatrième coordonnée du polynôme $p(t) = t + 2t^2 + 3t^3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est égale à

☐ 3. ☐ $-\frac{1}{7}$. ☐ -7. ☐ $\frac{1}{7}$.

Question 6 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont

☐ -3 et 2. ☐ -2 et 3. ☐ -1 et 2. ☐ -1 et 1.

Question 7 : Soient

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{b}$ est la projection orthogonale de $\vec{y}$ sur $W = \text{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$, alors

☐ $b_3 = \frac{5}{4}$. ☐ $b_3 = 20$. ☐ $b_3 = \frac{7}{8}$. ☐ $b_3 = 14$.

Question 8 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Si $\widehat{x} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix}$ est une solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés, alors l'erreur de l'approximation de $\vec{b}$ par $A\widehat{x}$ est

☐ $\|\vec{b} - A\widehat{x}\| = \sqrt{2}$. ☐ $\|\vec{b} - A\widehat{x}\| = 6$. ☐ $\|\vec{b} - A\widehat{x}\| = 0$. ☐ $\|\vec{b} - A\widehat{x}\| = \sqrt{6}$.

Question 9 : Le système d'équations linéaires

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

possède une solution unique telle que

☐ $x_1 = 3$. ☐ $x_1 = 2$. ☐ $x_1 = -2$. ☐ $x_1 = -3$.

Question 10 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

☐ $b_{33} = \frac{4}{39}$. ☐ $b_{41} = \frac{1}{3}$. ☐ $b_{43} = \frac{2}{3}$. ☐ $b_{33} = -\frac{1}{13}$.

Question 11 : Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2 et soit $T\colon \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to W$ l'application linéaire définie par

$$T(a+bt+ct^2) = \begin{pmatrix} a & b-c \\ b-c & a+b+c \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \{1,\, 1-t,\, t+t^2\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

des bases ordonnées de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et W respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et la base $\mathcal{C}$ de W, telle que $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, est

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 12 : La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ☐ est inversible mais pas diagonalisable.
- ☐ est inversible et diagonalisable.
- ☐ n'est ni inversible ni diagonalisable.
- ☐ est diagonalisable mais pas inversible.

Question 13 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ toutes les valeurs propres de A ont la même multiplicité géométrique.
- ☐ $\lambda = 4$ est une valeur propre de A avec multiplicité algébrique 2.
- ☐ toutes les valeurs propres de A ont la même multiplicité algébrique.
- ☐ $\lambda = 2$ est une valeur propre de A avec multiplicité géométrique 2.

Question 14 : Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \\ -5x+6y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ T est injective mais pas surjective.
- ☐ T est injective et surjective.
- ☐ T n'est ni injective ni surjective.
- ☐ T est surjective mais pas injective.

Question 15 : L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

fournit une base orthogonale de $\mathrm{Col}(A)$ donnée par les vecteurs

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 16 : Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Si $\vec{u} \in W$, alors le produit scalaire canonique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit scalaire canonique entre $\vec{u}$ et la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur W.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 17 : Soit $T \colon \mathbb{P}_6(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ une application linéaire. Alors il existe $p, q \in \mathbb{P}_6(\mathbb{R})$ tels que $p \neq q$ et $T(p) = T(q)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Soit $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\}$ une base de $\mathbb{R}^m$. Si A est une matrice de taille $m\times n$ telle que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}_k$ possède au moins une solution pour tout $k = 1, \ldots, m$, alors $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Soit S est un ensemble de k vecteurs orthonormés de $\mathbb{R}^n$. Si $W = \mathrm{Vect}\{S\}$, alors le complément orthogonal de W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - k$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n\times n$ telles que $A + B$ n'est pas la matrice nulle, alors $A + B$ est aussi inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ une matrice de rang 3. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, alors $A\vec{u}$, $A\vec{v}$, $A\vec{w}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable avec valeurs propres 2, 3, -5. Alors

$$\det(A^3) = -27000.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soient V et W deux espaces vectoriels et soit $T \colon V \to W$ une application linéaire.
Si $\dim(\mathrm{Ker}\, T) = \dim(V)$, alors $\mathrm{Im}(T) = \{\vec{0}_W\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit A une matrice de taille $m\times n$ avec $m < n$. Si la forme échelonnée réduite de A possède exactement k lignes nulles, alors l'ensemble des solutions du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - k$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soit $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Si A est telle que $A^5 = 0$, alors T est surjective.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors

$$\det(A - A^T) = \det(A) - \det(A^T).$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit q un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\big\{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid q(0) - p(0) = 0\big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_5(\mathbb{R})$ engendré par $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$. Si $\dim(W) = 4$, alors il existe deux polynômes $p_5, p_6 \in \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$ tels que l'ensemble $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ est une base de $\mathbb{P}_5(\mathbb{R})$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29 : *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 *Réservé au correcteur*

Soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs linéairement indépendants.

Soit A une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ telle que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivement.

Soit B une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ telle que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs propres de B associés aux valeurs propres $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivement.

Montrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable et satisfait

$$\det(A - B) = (\alpha_1 - \beta_1) \cdots (\alpha_n - \beta_n) .$$

Question 30 : *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 *Réservé au correcteur*

Soit A une matrice symétrique de taille 3×3 dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 4\,.$$

Soit c un nombre réel et soient

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des vecteurs propres de la matrice A associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 respectivement.

Déterminer la valeur de c et construire la matrice A.