Troisième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 30 : *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 *Réservé au correcteur*

Soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs linéairement indépendants.

Soit A une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ telle que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivement.

Soit B une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ telle que $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs propres de B associés aux valeurs propres $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivement.

Montrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable et satisfait

$$\det(A - B) = (\alpha_1 - \beta_1) \cdots (\alpha_n - \beta_n) .$$

Question 31 : *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 *Réservé au correcteur*

Soit A une matrice symétrique de taille 3×3 dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 4\,.$$

Soit c un nombre réel et soient

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des vecteurs propres de la matrice A associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 respectivement.

Déterminer la valeur de c et construire la matrice A.

Question 32 : *Cette question est notée sur 4 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 *Réservé au correcteur*

Soit $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. On rappelle que la trace $\mathrm{Tr}(A)$ d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$, est définie par

$$\mathrm{Tr}(A) = a + d\,.$$

On définit un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur V par

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)\,, \qquad \text{pour tout } A, B \in V.$$

(a) Trouver toutes les matrices $A \in V$ qui satisfont $\langle A, A\rangle = 0$. *(2 points)*

(b) Démontrer que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthonormée de V, par rapport au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. *(2 points)*

Question 33 : *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 *Réservé au correcteur*

Soit A une matrice de taille 2×4 et soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs propres de la matrice A^TA tels que

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices U, Σ et V telles que A possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T\,.$$

Question 34 : *Cette question est notée sur 3 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 *Réservé au correcteur*

Soit $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ une application linéaire telle que

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(1+x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(1+x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T(1+x^3) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de $\mathrm{Ker}(T)$.