



### Troisième partie, questions de type ouvert

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 30 :** *Cette question est notée sur 3 points.*

0    1    2    3

Réservé au correcteur

Soient  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$  des vecteurs linéairement indépendants.

Soit  $A$  une matrice diagonalisable de taille  $n \times n$  telle que  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  sont des vecteurs propres de  $A$  associés aux valeurs propres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  respectivement.

Soit  $B$  une matrice diagonalisable de taille  $n \times n$  telle que  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  sont des vecteurs propres de  $B$  associés aux valeurs propres  $\beta_1, \dots, \beta_n$  respectivement.

Montrer que la matrice  $A - B$  est diagonalisable et satisfait

$$\det(A - B) = (\alpha_1 - \beta_1) \cdots (\alpha_n - \beta_n).$$



**Question 31:** Cette question est notée sur 3 points.

0    1    2    3

Réserve au correcteur

Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $3 \times 3$  dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 4.$$

Soit  $c$  un nombre réel et soient

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des vecteurs propres de la matrice  $A$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  respectivement.

Déterminer la valeur de  $c$  et construire la matrice  $A$ .



**Question 32:** Cette question est notée sur 4 points.

0    1    2    3    4

Réserve au correcteur

Soit  $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . On rappelle que la trace  $\text{Tr}(A)$  d'une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ , est définie par  
$$\text{Tr}(A) = a + d.$$

On définit un produit scalaire  $\langle , \rangle$  sur  $V$  par

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B), \quad \text{pour tout } A, B \in V.$$

- (a) Trouver toutes les matrices  $A \in V$  qui satisfont  $\langle A, A \rangle = 0$ . *(2 points)*
- (b) Démontrer que  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  est une base ortho-  
normée de  $V$ , par rapport au produit scalaire  $\langle , \rangle$ . *(2 points)*



+1/11/50+



**Question 33:** Cette question est notée sur 6 points.

0    1    2    3    4    5    6

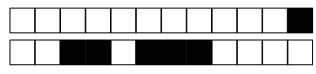
Réserve au correcteur

Soit  $A$  une matrice de taille  $2 \times 4$  et soient  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  deux vecteurs propres de la matrice  $A^T A$  tels que

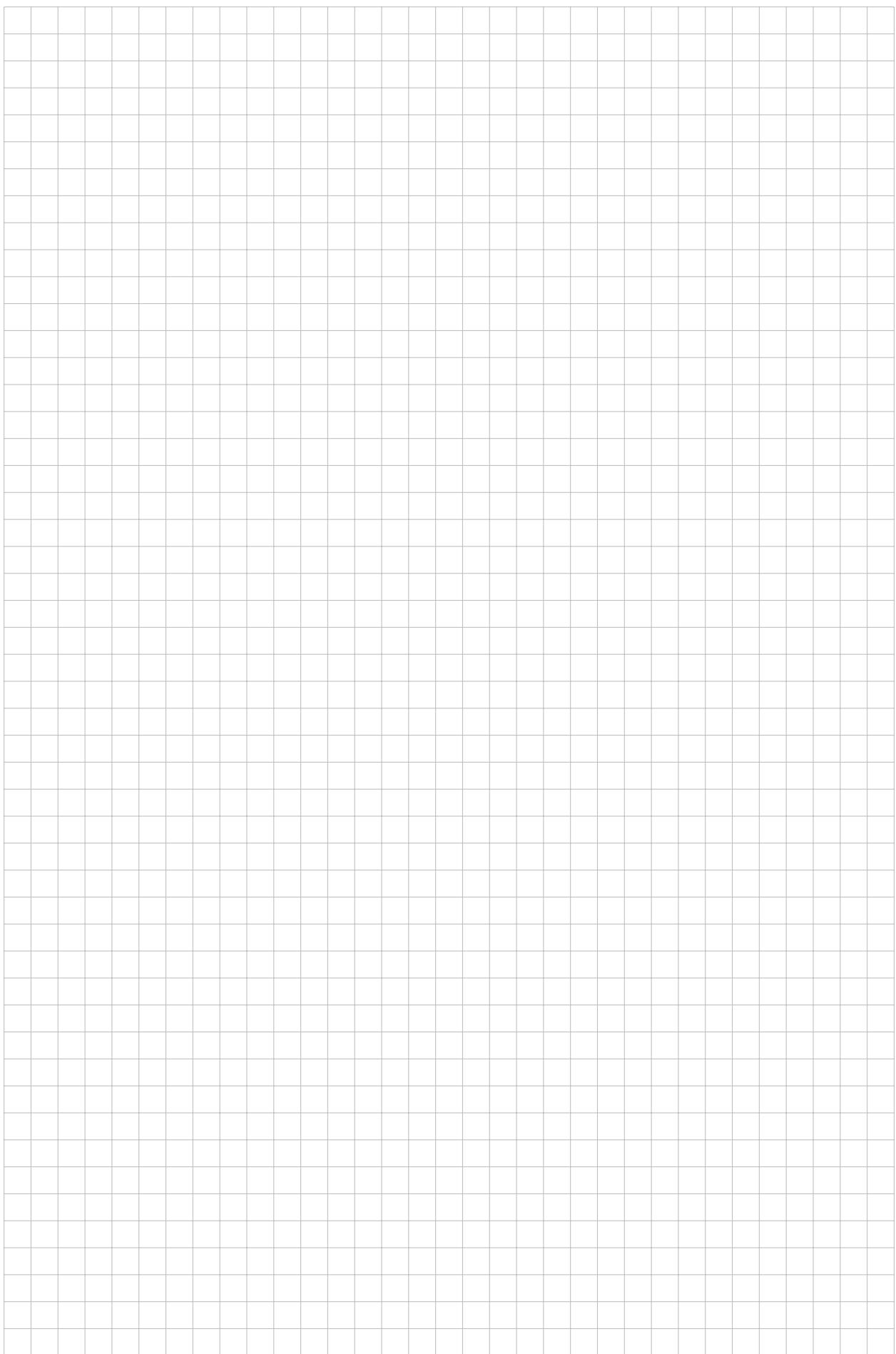
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices  $U$ ,  $\Sigma$  et  $V$  telles que  $A$  possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T.$$



+1/13/48+





**Question 34:** Cette question est notée sur 3 points.

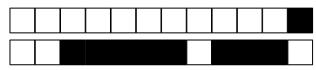
0    1    2    3

Réserve au correcteur

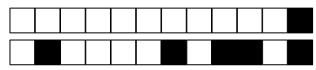
Soit  $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  une application linéaire telle que

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(1+x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(1+x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T(1+x^3) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de  $\text{Ker}(T)$ .



+1/15/46+



+1/16/45+