

# Algèbre linéaire

## Examen

### Partie commune

Automne 2022

---

## Réponses

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

## Notation

- Pour une matrice  $A$ ,  $a_{ij}$  désigne l'élément situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice.
- Pour un vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i$  désigne la  $i$ -ème composante de  $\vec{x}$ .
- $I_m$  désigne la matrice identité de taille  $m \times m$ .
- $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices de taille  $m \times n$  à coefficients réels.
- Pour  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire canonique est défini par  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .
- Pour  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , la norme euclidienne est définie par  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ .

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors une solution au sens des moindres carrés  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$  de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  satisfait

$\hat{x}_1 = \frac{6}{17}$ .        $\hat{x}_1 = \frac{12}{35}$ .        $\hat{x}_1 = -\frac{6}{17}$ .        $\hat{x}_1 = -\frac{12}{35}$ .

**Question 2 :** Soit  $R$  la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$r_{14} = -4$ .        $r_{14} = -3$ .        $r_{14} = -6$ .        $r_{14} = 0$ .

**Question 3 :** La droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points  $(-2, -1), (0, 1), (2, -2), (4, 1)$  est

$y = \frac{2}{5} + \frac{3}{20}x$ .        $y = -\frac{2}{5} - \frac{3}{20}x$ .        $y = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}x$ .        $y = -\frac{2}{5} + \frac{3}{20}x$ .

**Question 4 :** Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 4z = a \\ x - z = 2 \end{cases}$$

possède des solutions si et seulement si

$a = -\frac{2}{9}$ .        $a = \frac{2}{9}$ .        $a = -\frac{9}{2}$ .        $a = \frac{9}{2}$ .

**Question 5 :** Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

deux bases ordonnées de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $P$  la matrice de changement de base de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{C}$ , telle que  $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ . Alors la troisième colonne de  $P$  est

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .        $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .        $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .        $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Question 6 :** Soit  $t$  un paramètre réel. Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} t \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si et seulement si

$t \neq 5$ .

$t = 5$ .

$t \neq -5$ .

$t = -5$ .

**Question 7 :** Soit  $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  l'application linéaire définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}).$$

Soient

$$\mathcal{B} = \{1, t + t^2, t - t^2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

des bases ordonnées de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  respectivement. La matrice  $A$  associée à  $T$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  et la base  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , telle que  $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , est

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

**Question 8 :** Soient

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a & 3b & c \\ d+2a & 3e+6b & f+2c \\ g & 3h & k \end{pmatrix}$$

deux matrices de taille  $3 \times 3$ . Si  $\det(A) = 1$ , alors on a

$\det(B) = 1$ .

$\det(B) = 2$ .

$\det(B) = 3$ .

$\det(B) = 6$ .

**Question 9 :** L'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

est

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

**Question 10:** L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

fournit une base orthogonale de  $\text{Im}(A)$  donnée par les vecteurs

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**Question 11:** La projection orthogonale du vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  sur le sous-espace vectoriel engendré par la première et la deuxième colonne de la matrice  $A$  de la Question 10 est le vecteur

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}.$

**Question 12:** La matrice  $A$  de la Question 10 possède une décomposition QR telle que

$r_{23} = \frac{3}{\sqrt{6}}.$

$r_{23} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$

$r_{23} = -2.$

$r_{23} = -\sqrt{6}.$

**Question 13:** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Alors

$\lambda = 4$  est une valeur propre avec multiplicité géométrique 2.

$\lambda = 3$  est une valeur propre avec multiplicité algébrique 1.

$\lambda = 3$  est une valeur propre avec multiplicité géométrique 2.

$\lambda = 4$  est une valeur propre avec multiplicité géométrique 1.

**Question 14:** Soit  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application linéaire définie par  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$  pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors

$T$  est injective mais pas surjective.

$T$  est injective et surjective.

$T$  n'est ni injective ni surjective.

$T$  est surjective mais pas injective.

## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 15:** Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  et soient  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ . Si les vecteurs  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont linéairement indépendants, alors les vecteurs  $\text{proj}_V(\vec{w}_1)$  et  $\text{proj}_V(\vec{w}_2)$  sont linéairement indépendants.

VRAI       FAUX

**Question 16:** Soit  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  un ensemble orthogonal de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^n$  est tel que  $\{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  est un ensemble orthogonal, alors  $\vec{v}_0$  est orthogonal à  $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ .

VRAI       FAUX

**Question 17:** Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$ , alors on a

$$\dim(\text{Im } A) + \dim(\text{Im } A^T) + \dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Ker } A^T) = m + n.$$

VRAI       FAUX

**Question 18:** Soient  $A$  et  $P$  deux matrices de taille  $n \times n$ . Si  $P^TAP$  est symétrique, alors  $A$  est symétrique.

VRAI       FAUX

**Question 19:** Soit  $W = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$ . Alors  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  de dimension 3.

VRAI       FAUX

**Question 20:** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ . Si  $R$  est la forme échelonnée réduite de  $A$ , alors

$$\det(A) = \det(R).$$

VRAI       FAUX

**Question 21:** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $n \times n$ . Si  $A$  et  $B$  ont le même polynôme caractéristique, alors  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres et pour chaque valeur propre  $\lambda$  on a

$$\dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n)) = \dim(\text{Ker}(B - \lambda I_n)).$$

VRAI       FAUX

**Question 22:** Soient  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels de dimension finie et soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Soit  $d$  la dimension de l'image de  $T$ . Alors  $d \leq \dim W$  et  $d \leq \dim V$ .

VRAI       FAUX

**Question 23:** Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$  dont les colonnes forment une base de  $\mathbb{R}^m$ , alors pour tout choix de  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , le système  $A\vec{x} = \vec{b}$  possède une solution unique.

VRAI       FAUX

**Question 24:** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  un ensemble de vecteurs de  $V$ . Si tout sous-ensemble de  $\mathcal{F}$  formé de  $n - 1$  éléments est linéairement indépendant, alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $V$ .

VRAI       FAUX

**Question 25:** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices inversibles de taille  $n \times n$ , alors  $(A + B)^2$  est inversible.

VRAI       FAUX

**Question 26:** L'ensemble  $\{p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid p(-t) = -p(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ .

VRAI       FAUX

**Question 27:** Si  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , alors la matrice

$$A = \vec{v}\vec{v}^T - \vec{w}\vec{w}^T$$

est diagonalisable.

VRAI       FAUX

### Troisième partie, questions de type ouvert

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée: toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

**Question 28:** *Cette question est notée sur 3 points.*

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<sub>0</sub>	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>
--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------	--------------	--------------	--------------

Réservé au correcteur

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  à coefficients réels telle que sa forme échelonnée réduite contient exactement  $k$  lignes nulles. Déterminer le rang de  $A$  et la dimension de  $\text{Ker}(A)$  en fonction de  $m$ ,  $n$  et  $k$ .

A large grid of squares, approximately 20 columns by 25 rows, intended for the student to write their answer to Question 28. The grid is provided for handwriting practice and to accommodate a detailed response.

**Question 29:** *Cette question est notée sur 3 points.*

0    1    2    3

Réervé au correcteur

Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$  à coefficients réels. Soit  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur propre de  $A$  et  $W = \text{Vect}\{\vec{v}\}$ . Montrer que si  $\vec{y} \in W^\perp$ , alors  $A\vec{y} \in W^\perp$ .

**Question 30:** *Cette question est notée sur 3 points.*

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input checked="" type="checkbox"/>	3
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	-------------------------------------	---

Réserve au correcteur

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  à coefficients réels et soit  $O$  la matrice nulle de taille  $n \times n$ .

Montrer que si  $A$  est diagonalisable et  $A^2 = O$ , alors  $A = O$ .

A large grid of squares, approximately 20 columns by 20 rows, intended for students to work out their solution to the problem.