Algèbre linéaire inversée
Prof. Simone Deparis

Jeudi 5 décembre 2024
EPFL

Série 12

Exercice 1

Soient les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver la meilleure approximation de $\mathbf{v}$ par un vecteur de la forme $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$.

b) Calculer la distance entre $\mathbf{v}$ et $\mathrm{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

Soient maintenant les vecteurs

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Trouver la meilleure approximation de $\mathbf{v}$ par un vecteur de la forme $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$.

d) Calculer la distance entre $\mathbf{v}$ et $\mathrm{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

Exercice 2

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^T A = R$.

b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\hat{\mathbf{y}}$ la projection orthogonale de $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W. Alors $\hat{\mathbf{y}}$ dépend du choix de la base de W.

c) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tel que $W = \text{Span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Si $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}_1$ et $\mathbf{z} \perp \mathbf{w}_2$, alors $\mathbf{z} \in W^{\perp}$.

d) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{y} \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $\mathbf{p}_W(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$.

Exercice 4

Soit V une espace euclidien. On note $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ et la norme associée est $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.

Montrer :

a) Si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est une famille orthonormale, alors $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2\right)$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right)$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ coïncide avec l'ensemble non vide des solutions de l'équation normale $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Le problème général des moindres carrés consiste à trouver un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ qui rend $A\mathbf{x}$ aussi proche que possible de $\mathbf{b}$.

c) Soit V un espace euclidien et soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Alors $(\mathbf{uv}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

d) L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire classique est un espace euclidien.

Exercice 6

Répondez par vrai ou faux, en justifiant brièvement votre réponse : Le point $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -16 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$ est le point le plus proche de $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ dans le sous-espace engendré par $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 7

Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ une base orthogonale de U. On considère la transformation $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{p}_U(\mathbf{v})$. Montrer que $\mathbf{T}$ est une transformation linéaire.

Exercice 8

Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

i	$T_i \quad [°C]$	$U_i \quad [V]$
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi $U = a + bT + cT^2$. Calculer a, b, c au sens des moindres carrés.

Exercice 9

Soit $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que

(a) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$;

(b) $W_1 = (W_1^\perp)^\perp$;

(c) $W_1 \subset W_2$ implique $W_2^\perp \subset W_1^\perp$.

Exercice 10

i) Soit $\{u_1, ..., u_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et v un vecteur dans $\mathbb{R}^n$. Montrer

$$\|v\|^2 = |v \cdot u_1|^2 + ... + |v \cdot u_n|^2 .$$

ii) (Inégalité de Bessel) Soit $\{u_1, ..., u_p\}$ une famille orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ et soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer

$$\|v\|^2 \geq |v \cdot u_1|^2 + ... + |v \cdot u_p|^2 .$$

Partiellement en classe

Exercice 11

Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $W = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$. Calculer la décomposition $v = z + p_W(v)$, où $z \in W^\perp$.

Exercice 12

Soient $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$ et $W = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Alors, le projeté orthogonal (par rapport au produit scalaire euclidien) de v sur W est

[A.] $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ [B.] $\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$ [C.] $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$ [D.] $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice 13

Calculer la droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(-1, 3), (1, 0), (0, 3)$.

Par où passe cette droite en $x = -1, 1$ et 0 ?

Exercice 14

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres carrés $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $Ax = b$ satisfait

[A.] $\hat{x}_2 = 1/6$ [B.] $\hat{x}_2 = -35/6$ [C.] $\hat{x}_2 = 41/6$ [D.] $\hat{x}_2 = -5/6$

Exercice 15

Quelle affirmation est vraie pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $b \in \mathbb{R}^n$?

A. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution

B. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution au sens des moindres carrées

C. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution.

D. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution au sens des moindres carrées.

Exercice 16

Soit $u_1, \ldots, u_p$ une base orthonormée d'un sous-espace $W \subset \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ et soit U la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$. Montrer que $p_W(y) = UU^T y$.

Exercice 17

Soient A une matrice de taille $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Soit $c = \text{proj}_{\text{Col}(A)}(b)$. Alors, il es toujours vrai que

A. la solution au sens des moindres carrés de l'équation $Ax = b$ est $A^{-1}c$.

B. l'équation $Ax = b$ n'admet aucune solution

C. toute solution de $Ax = c$ est une solution au sens des moindres carrés de $Ax = b$

D. l'équation $Ax = c$ possède une solution unique.

Exercice 18

Quelle équation correspond à la droite de régression par les points $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2)$?

A. $y = 0.9 + 0.4x$

B. $y = 1 + 0.5x$

C. $y = 18 + 4x$

D. $y = 1.1 + 0.6x$

Exercice 19

Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées et soit $W = \text{Col}(U)$. Alors, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, on a

A. $U^T Ux = \text{proj}_W(x)$ et $UU^T y = \text{proj}_W(y)$

B. $U^T Ux = x$ et $UU^T y = 0$

C. $U^T Ux = x$ et $UU^T y = y$

D. $U^T Ux = x$ et $UU^T y = \text{proj}_W(y)$.

Exercice 20

Soit A une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes, et soit $A = QR$ sa factorisation QR. Alors R est une matrice inversible.

A. Vrai

B. Faux

Exercice 21

Calculer une factorisation QR de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 22

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Soit $A = QR$ la décomposition QR de A. Alors
[A.] $r_{33} = 2\sqrt{2}$ [B.] $r_{33} = \sqrt{2}$ [C.] $r_{33} = \sqrt{3}$ [D.] $r_{33} = 3\sqrt{2}$

Exercice 23

Soient A une matrice non-nulle de taille $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Alors, il est toujours vrai que

A. le vecteur $b - Ax$ appartient à $\ker(A^T)$ pour un unique choix de $x \in \mathbb{R}^n$.

B. la matrice A^TA est inversible.

C. l'équation $Ax = b$ admet une unique solution au sens des moindres carrés.

D. si $\hat{x}$ et $\hat{x}'$ sont deux solutions au sens des moindres carrés de $Ax = b$, alors $A\hat{x} = A\hat{x}'$

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.