Série 9 (Corrigé)

La matrice D de l'exercice 1 sera traité en classe.

Exercice 1

Soient
$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$
et $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces matrices A, B, C, D, E.

Solution :

A. Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - 5\lambda + 5$. Les valeurs propres de A sont $\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\}$. Les vecteurs propres correspondants sont $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

B. Le polynôme caractéristique de B est $(\lambda - 4)^2$. Les valeurs propres de B sont $\{4, 4\}$ (il y a une seule valeur propre 4 de multiplicité 2). Vecteurs propres correspondants : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Remarque : l'espace propre est de dimension seulement 1 alors que la valeur propre est de multiplicité 2, la matrice n'est pas diagonalisable.

C. Le polynôme caractéristique de C est $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$. Les valeurs propres de C sont $\{4, 1, 1\}$ c-à-d les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire. Les vecteurs propres correspondants sont $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

D. Le polynôme caractéristique de D est $-\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda + 6)(\lambda - 6)$. Les valeurs propres de D sont donc $\{-6, 0, 6\}$. Les vecteurs propres correspondants sont

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

E. Le polynôme caractéristique de E est $\lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Les valeurs propres de E sont $\{3, 4, 1, 2\}$ c-à-d les coefficients diagonaux de

la matrice triangulaire. Les vecteurs propres correspondants sont
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}31\\-34\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}113\\-60\\7\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 2

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.
Solution : *λA est obtenue à partir de A en faisant n opérations élémentaires sur les lignes : on multiplie les lignes 1 à n par λ. Chacune de ces opérations multiplie le déterminant par λ. Donc $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.*

Exercice 3

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $k \geq 2$ un entier. Montrer que si λ est une valeur propre de A avec pour vecteur propre $\mathbf{v}$, alors λ^k est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A\,A\,\cdots\,A}_{k \text{ fois}}$$

avec pour vecteur propre $\mathbf{v}$.
Solution : *Par définition, on a $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Par récurrence sur k, on montre $A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$. Supposons le résultat vrai au rang $k-1$, c-à-d $A^{k-1}\mathbf{v} = \lambda^{k-1}\mathbf{v}$. On a alors :*

$$A^k\mathbf{v} = A(A^{k-1}\mathbf{v}) = A(\lambda^{k-1}\mathbf{v}) = \lambda^{k-1}A\mathbf{v} = \lambda^{k-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}.$$

Ceci montre que le vecteur $\mathbf{v}$, non nul, est un vecteur propre de la matrice A^k associé à la valeur propre λ^k.

Exercices supplémentaires

Exercice 4

Montrer :

a) Si A est une matrice inversible, alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

b) Si A et Q sont des matrices inversibles de taille $n \times n$, alors $\det\left(QAQ^{-1}\right) = \det A$.

c) Si U est une matrice carrée de taille $n \times n$ telle que $U^T U = I_n$, alors $\det U = \pm 1$.

d) Si A est une matrice carrée telle que $\det A^3 = 0$, alors A est non inversible.

Solution :

a) On a $1 = \det I_n = \det\left(A^{-1}A\right) = \det A^{-1} \cdot \det A$. Ainsi, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

b) C'est une conséquence de a) (à noter qu'il n'est pas nécessaire que A soit inversible) :

$$\det\left(QAQ^{-1}\right) = \det Q \cdot \det A \cdot \det Q^{-1} = \det Q \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det Q} = \det A.$$

c) (De telles matrices U s'appellent des matrices orthogonales). On a $1 = \det I_n = \det\left(U^T U\right) = \det U^T \cdot \det U = (\det U)^2$*. Ainsi,* $(\det U)^2 = 1$*, d'où* $\det U = \pm 1$.

d) On a $\det A^3 = (\det A)^3$ *. Ainsi,* $(\det A)^3 = 0$ *ssi* $\det A = 0$*, ce qui équivaut au fait que la matrice* A *est non inversible.*

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) La matrice A n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A.

b) Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable.

c) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale.

d) On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée.

Solution : *Vrai : a). Faux : b), c), d).*

Exercice 6

a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}. Trouver un vecteur propre correspondant.

Solution : *Si* $\mathbf{v}$ *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* λ*, on a*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

La valeur propre λ *est non nulle car la matrice* A *est inversible. On multiplie à gauche par* $\lambda^{-1}A^{-1}$*, et on obtient*

$$\lambda^{-1}\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{v},$$

d'où le résultat.

b) Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Solution : *Le déterminant de la matrice* $A - \lambda I_n$ *étant égal au déterminant de la transposée* $(A - \lambda I_n)^T = A^T - \lambda I_n$*, les matrices* A *et* A^T *ont donc le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres (qui sont les racines du polynôme caractéristique).*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*. Les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ *et les vecteurs propres associés sont* $\mathbf{v}_1 = (2\ \ 1)^T, \mathbf{v}_2 = (-2\ \ 1)^T$*. Par contre les vecteurs propres correspondants de la matrice* A^T *sont* $\mathbf{v}_1 = (1\ \ 2)^T, \mathbf{v}_2 = (-1\ \ 2)^T$.

Remarque : bien sûr, si A *est symétrique, les vecteurs propres de* A *et* A^T *sont les mêmes.*

Exercice 7

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse : Si deux matrices A et B de taille $n \times n$ ont les mêmes valeurs propres alors elles sont semblables.
Solution : *Faux. Contre exemple :*

$$A = I_2 \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La seule valeur propre de B est 1, car B est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont égaux à 1. De même, la seule valeur propre de la matrice identité est 1. Pourtant, B n'est pas semblable à I_2, car la seule matrice semblable à I_2 est I_2 elle même.

Exercice 8

Soit A une matrice $n \times n$. Soit $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définit par $T(\mathbf{x}) = \det(A_i(\mathbf{x}))$, où $A_i(\mathbf{x})$ est la matrice obtenue en remplaçent la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le vecteur $\mathbf{x}$. Montrer que l'application est linéaire.
Solution : *Une application $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est linéaire si*

(a) $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ *pour tout* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *dans* $\mathbb{R}^n$,

(b) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ *pour tout* $\mathbf{u}$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* c *dans* $\mathbb{R}$.

On veut donc montrer que

(a) $\det(A_i(\mathbf{u})) + \det(A_i(\mathbf{v})) = \det(A_i(\mathbf{u} + \mathbf{v}))$ *pour tout* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *dans* $\mathbb{R}^n$,

(b) $\det(A_i(c\mathbf{u})) = c \det(A_i(\mathbf{u}))$ *pour tout* $\mathbf{u}$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* c *dans* $\mathbb{R}$.

On a vu au cours que le déterminant d'une matrice A d'ordre n peut être calculé par un développement selon n'importe quelle ligne ou encore n'importe quelle colonne. Nous pouvons donc écrire le développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ colonne :

$$\det(A_i(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j C_{ij},$$

où C_{ij} pour $j = 1, \ldots, n$ sont les cofacteurs de $A_i(\mathbf{x})$ (ou equivalentement de A) par rapport à la $i^{\text{ème}}$ colonne. Finalement on a

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{u}_j C_{ij}}_{\det(A_i(\mathbf{u}))} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_j C_{ij}}_{\det(A_i(\mathbf{v}))} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{u}_j + \mathbf{v}_j) C_{ij}}_{\det(A_i(\mathbf{u}+\mathbf{v}))}.$$

De la même façon

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} (c\mathbf{u}_j) C_{ij}}_{\det(A_i(c\mathbf{u}))} = \underbrace{c \sum_{j=1}^{n} \mathbf{u}_j C_{ij}}_{c\det(A_i(\mathbf{u}))}.$$

Partiellement en classe

Exercice 9

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Alors les valeurs propres de A sont

- ☒ -2 et 7
- ☐ 3 et 4
- ☐ -5, -1 et 1
- ☐ -2 et 3

Exercice 10

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

a Soient A et B deux matrices carrées semblables. Alors A et B ont les mêmes valeurs propres.

b Soient A et B deux matrices carrées semblables. Alors A et B ont les mêmes vecteurs propres.

c Soient A et B deux matrices carrées qui ont les mêmes valeurs propres. Alors A et B sont semblables.

d Soit A une matrice carrée. A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 11

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 10 & 4 & -\ell \\ -4 & c & -2 \end{pmatrix},$$
avec les paramètres $\ell, c \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, -1 est une valeur propre de la matrice A si

- ☒ $c = -2$
- ☐ $c = 8$
- ☐ $c = 1$
- ☒ $c = -1$

(plusieures réponses correctes).

Solution : *$det(A + I_3) = -(l - 10) \cdot (2c + 4)$ Donc, si $c = -2$, -1 est valeur propre de A quel que soit l.*

Exercice 12

Soient a, b deux nombres réels tels que $a + b = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$ une matrice non-inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie ?

☐ $\det(A) = -4$
☐ A est une matrice de changement de base
☒ le polynôme caractéristique de A a une seule racine réelle
☐ le polynôme caractéristique de A a deux racines réelles distinctes

Exercice 13

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

a Une matrice carrée a au moins une valeur propre.

b Une matrice de taille $n \times n$ a au plus n valeurs propres différentes.

c Soit A une matrice de taille $n \times n$ et λ une valeur propre de A. Alors la multiplicité algébrique de λ est toujours plus grande où égale à la multiplicité géométrique de A.

d Soit A une matrice carrée. Alors A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A.

e Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sont 3, 1 et 4.

Exercice 14

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et soit P une matrice de taille $n \times n$ telle que chacune des colonnes de P est un vecteur propre de la matrice A. Alors il est toujours vrai que

☒ $AP = PD$, où D est une matrice diagonale
☐ P est inversible et PAP^{-1} est une matrice diagonale
☐ P est inversible et $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale
☐ $PA = DP$ où D est une matrice diagonale

Exercice 15

Soit A une matrice de taille $n \times n$ de rang $m < n$. Alors,

☒ 0 est valeur propre de A de multiplicité géométrique $n - m$
☐ 0 est valeur propre de A de multiplicité algébrique $n - m$
☐ 0 est une valeur propre de A de multiplicité algébrique $\geq n - m$
☐ 0 n'est pas valeur propre de A

Exercice 16

Soit A une matrice de taille 3×3 tel que le polynôme caractéristique de A est $c_A(t) = (2-t)^3$. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- ☒ A est inversible.
- ☐ A est diagonalisable.
- ☒ $\det(A) \neq 0$.
- ☒ La seule valeur propre de A est 2.
- ☐ Aucune des affirmations ci-dessus n'est vraie.

(plusieures réponses possibles)

Exercice 17

Soient A et B deux matrices carrées de même taille. On suppose que B est une matrice inversible. Soit λ une valeur propre de A et aussi de B. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

- ☐ λ est une valeur propre de la matrice $A + B$
- ☐ λ est une valeur propre de la matrice AB
- ☒ λ est une valeur propre de la matrice BAB^{-1}
- ☐ λ^2 est une valeur propre de la matrice BA.

Informations générales, séries et corrigés : cf.
`http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=15414`
Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre : D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.